Transformaciones Lineales

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

16 de abril de 2009

Índice

21.1. Introducción

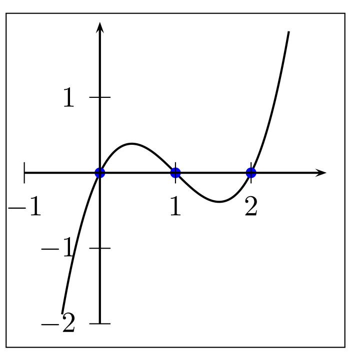
En esta lectura se presentan las funciones entre espacios vectoriales que *preservan* las cualidades de los espacios vectoriales. Es decir, de funciones que preservan la suma y la multiplicación por escalares.

21.2. Idea

En los cursos básicos relativos a ecuaciones vimos que la solución a la ecuación

$$f(x) = 0$$

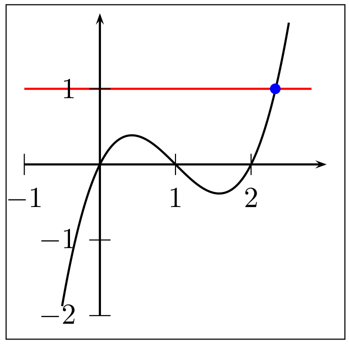
podría entenderse como los puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ corta el eje de las x's:



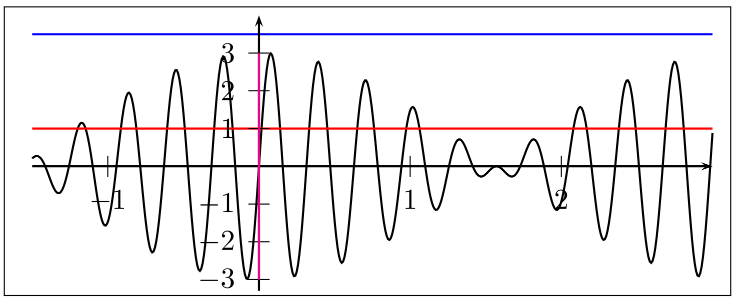
esta forma de ver a una ecuación permite entonces resolver ecuaciones de la forma:

$$f(x) = a$$

en este caso lo que se busca son los valores de x de aquellos puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ corta la línea horizontal $y = a$:



Esta idea de corte de la gráfica de $f(x)$ con la recta $y = a$ da pie a métodos gráficos de solución de ecuaciones y también permite obtener conclusiones cualitativas a ciertas ecuaciones. Por ejemplo, se deduce fácilmente que $3\,\mathrm{sen}(20\,x)\cos(x) = 1$ tiene infinitas soluciones, mientras que $3\,\mathrm{sen}(20\,x)\cos(x) = 3.5$ no tiene solución:



En el caso anterior, $3\,\mathrm{sen}(20\,x)\cos(x) = 1$ tiene solución debido a que 1 está en el rango de la función; mientras que $3\,\mathrm{sen}(20\,x)\cos(x) = 3.5$ no tiene solución porque 3.5 no lo está. El rango de la función está marcado en el eje y como un segmento de línea magenta. En general, el siguiente resultado se tiene:

Teorema

La ecuación

$$f(x) = a$$

tiene solución si y sólo si a está en el *rango* de $f(x)$.

Nosotros usaremos el concepto de la función para darle un tratamiento a los sistemas de ecuaciones lineales. La restricción que haremos será sobre el tipo de funciones: sólo estaremos interesados en funciones que preserven las operaciones en el espacio vectorial. Este tipo de funciones serán llamadas funciones lineales. Primeramente las definiremos, veremos algunas propiedades generales y después veremos cómo se aplican estos resultados a sistemas de ecuaciones.

21.3. Transformación Lineal

Definición 21.1

Sean V y W dos espacios vectoriales posiblemente iguales. Una *transformación lineal* o *mapeo lineal* de V a W es una función $T : V \to W$ tal que para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de V y cualquier escalar c:

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(c\,\mathbf{u}) = c\,T(\mathbf{u})$

Ejemplo 21.1
Demuestre que la tranformación $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por

$$T \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} x + 3\,y \\ x + 2\,y \end{array} \right]$$

es lineal.
Solución
Sean $\mathbf{u} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right]$ y $\mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right]$.
Entonces

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & = & T\left(\left[\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right] \right) = T \left[\begin{array}{c} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{array} \right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} (x_1 + x_2) + 3\,(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2\,(y_1 + y_2) \end{array} \right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2\,y_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} x_2 + 3\,y_2 \\ x_2 + 2\,y_2 \end{array} \right] \\ & = & T \left[\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right] + T \left[\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right] = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{array}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{array}{rcl} T(c\,\mathbf{u}) & = & T \left[\begin{array}{c} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{array} \right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} c\,x_1 + 3\,c\,y_1 \\ c\,x_1 + 2\,c\,y_1 \end{array} \right] \\ & = & c \left[\begin{array}{c} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{array} \right] \\ & = & c\,T \left[\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right] \\ & = & c\,T(\mathbf{u}) \end{array}$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & = & T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(c\,\mathbf{u}) & = & c\,T(\mathbf{u}) \end{array}$$

T es lineal ■

Ejemplo 21.2
Demuestre que la transformación $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ es lineal:

$$T((x, y, z)') = (x + z, y - z)'$$

Solución
Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)'$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)'$. Entonces

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)') \\
&= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2))' \\
&= (x_1+z_1, y_1-z_1)' + (x_2+z_2, y_2-z_2)' \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\
&= (c\,x_1 + c\,z_1, c\,y_1 - c\,z_1)' \\
&= c\,(x_1+z_1, y_1-z_1)' \\
&= c\,T((x_1, y_1, z_1)') \\
&= c\,T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\
T(c\,\mathbf{u}) &= c\,T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

T es lineal ■

Ejemplo 21.3
Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \to \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución
Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{B}) + \mathbf{T}(\mathbf{C}) \\
T(c\,\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,(c\,\mathbf{B}) = c\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = c\,T(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= T(\mathbf{B}) + T(\mathbf{C}) \\
T(c\,\mathbf{B}) &= c\,T(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

T es lineal ■

Ejemplo 21.4
¿Es lineal la transformación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Solución
No, la parte 1 de la definición no se cumple porque

$$f(x+y) = (x+y)+1$$

y

$$f(x)+f(y) = x+1+y+1 = x+y+2$$

no son iguales ■

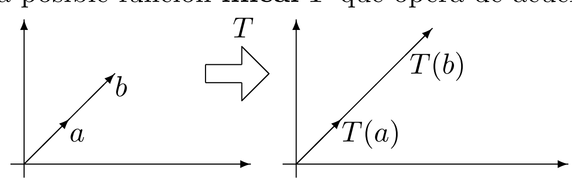
Ejemplo 21.5
Sea $D : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.
Solución
Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} D(p(x)+q(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(p(x)+q(x)) = D(p(x)) + D(q(x)) \\ D(c\,p(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(c\,p(x)) = c\,D(p(x)) \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 21.6
Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



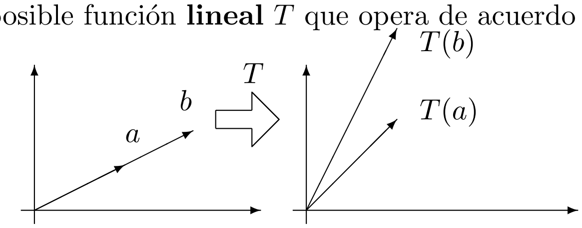
$\boxed{\text{A}}$ La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

$\boxed{\text{B}}$ No es posible que exista una función lineal así: la proporción entre a y b y entre $T(a)$ y $T(b)$ debe ser la misma.

$\boxed{\text{C}}$ Sí es posible que exista una función lineal así.

$\boxed{\text{D}}$ No es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ no deben ser colineales.

Solución
Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $b = 2a$, sin embargo en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(b) = 3\,T(a)$. Si T fuera lineal de $b = 2\,a$ se obtendría $T(b) = T(2\,a) = 2\,T(a)$, lo cual no se cumple, por tanto la respuesta correcta es **B** ■
Ejemplo 21.7
Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



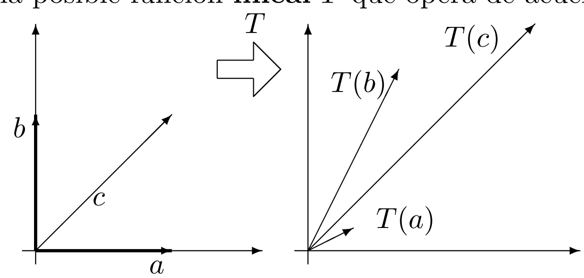
$\boxed{\text{A}}$ No es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ deben ser colineales.

$\boxed{\text{B}}$ Sí es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ pueden no ser colineales.

$\boxed{\text{C}}$ La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

Solución
Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $b = 2a$. Si T fuera lineal de $b = 2\,a$ se obtendría $T(b) = T(2\,a) = 2\,T(a)$, es decir $T(b)$ y $T(a)$ deberían tener la misma dirección. Es decir, $T(b)$ y $T(a)$ deberían ser colineales. Lo cual no se cumple en la imagen (figura derecha); por tanto, la respuesta correcta es **A** ■

Ejemplo 21.8
Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



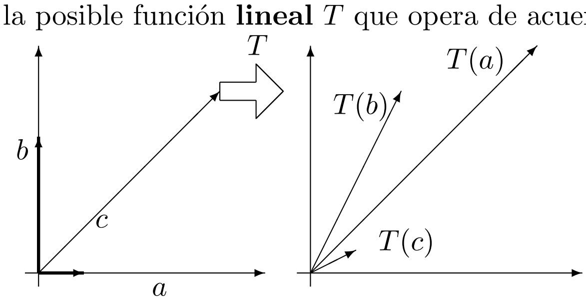
$\boxed{\text{A}}$ **Sí** es posible que exista una función lineal así.

$\boxed{\text{B}}$ **No** es posible que exista una función lineal así.

$\boxed{\text{C}}$ La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

Solución
Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $c = a + b$, sin embargo, en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(c) \neq T(a) + T(b)$: Pues $T(c)$ no corresponde a la diagonal del paralelogramo construido con lados en $T(a)$ y $T(b)$ ■

Ejemplo 21.9
Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



$\boxed{\text{A}}$ **Sí** es posible que exista una función lineal así.

$\boxed{\text{B}}$ **No** es posible que exista una función lineal así.

$\boxed{\text{C}}$ La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

Solución
Del dominio (figura a la izquierda) se observa que c está entre a y b. Sin embargo, en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(c)$ no está entre $T(a)$ y $T(b)$: T no puede ser lineal. (Recuerde que si c está entre a y b, entoces los valores de d_1 y de d_2 para que $c = d_1\,a + d_2 b$ deben ser positivos) ■

21.4. Geometría de las transformaciones lineales

De los ejemplos anteriores podemos concluir que: Una transformación lineal preserva

- colinealidad:
$$\mathbf{b} = c\,\mathbf{a} \rightarrow T(\mathbf{b}) = c\,T(\mathbf{a})$$
- proporcionalidad:
$$\mathbf{b} = c\,\mathbf{a} \rightarrow T(\mathbf{b}) = c\,T(\mathbf{a})$$
- la relación entre:
$$\mathbf{d} = c_1\,\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \rightarrow T(\mathbf{d}) = c_1\,T(\mathbf{a}) + c_2\,T(\mathbf{b})$$

21.5. Linealidad en una condición

El siguiente resultado formula las dos condiciones para ser lineal en sólo una.

Teorema

$T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si y sólo si para todos los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 \in V$, y todos los escalares c_1 y c_2, se cumple

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2)$$

Demostración

Por la afirmación *si y sólo si*, se requiere demostrar las dos implicaciones:

Suficiencia ($\rightarrow$): Supongamos que T es lineal: Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son dos elementos cualquiera de V y c_1 u c_2 son dos escalares cualquiera por la propiedad 1 de transformación lineal:

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = T(c_1\,\mathbf{v}_1) + T(c_2\,\mathbf{v}_2)$$

ahora por la propiedad 2 se cumple:

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1) + T(c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2)$$

de estas dos igualdades se tiene:

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2)$$

que es la igualdad a demostrar.

Necesidad ($\leftarrow$): Supongamos que la propiedad

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2)$$

se cumple para todos los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 \in V$, y todos los escalares c_1 y c_2. En particular se cumple para $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$ lo cual queda:

$$T(1\,\mathbf{v}_1 + 1\,\mathbf{v}_2) = 1\,T(\mathbf{v}_1) + 1\,T(\mathbf{v}_2)$$

por el axioma M5 de espacios vectoriales aplicado a V y a W se tiene

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$$

lo caul es precisamente la condición 1 para que T sea lineal. Por otro lado, si tomamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, $c_1 = c$ y $c_2 = 0$ entonces la propiedad establece

$$T(c\,\mathbf{v} + 0\,\mathbf{v}_2) = c\,T(\mathbf{v}) + 0\,T(\mathbf{v}_2)$$

como para todo espacio vectorial $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, lo anterior queda

$$T(c\,\mathbf{v}) = c\,T(\mathbf{v})$$

lo cual es precisamente la condición 2 para que T sea transformación lineal ■

Ejemplo 21.10

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\,dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$\begin{array}{rcl} I(c_1\,p(x) + c_2\,q(x)) & = & \int_a^b (c_1\,p(x) + c_2\,q(x))\,dx \\ & = & c_1\,\int_a^b p(x)\,dx + c_2\,\int_a^b q(x)\,dx \\ & = & c_1\,I(p(x)) + c_2\,I(q(x)) \blacksquare \end{array}$$

21.6. Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
Entonces

a) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Es decir, el neutro se envia al neutro.

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
Es decir, envia inversos aditivos en inversos aditivos.

c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
Es decir, envia restas en restas.

Demostración

- Para demostrar a):

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbf{0}_V) & = & T(0 \cdot \mathbf{0}_V) \\ & = & 0 \cdot T(\mathbf{0}_V) \\ & = & \mathbf{0}_W \end{array}$$

- Para demostrar b):

$$\begin{array}{rcl} T(-\mathbf{v}) & = & T(-1 \cdot \mathbf{v}) \\ & = & -1 \cdot T(\mathbf{v}) \\ & = & -T(\mathbf{v}) \end{array}$$

- Para demostrar c):

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u})+(-1)\cdot T(\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v}) \blacksquare \end{aligned}$$

El anterior resultado se podría haber utilizado para ver que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x + 1$ no puede ser lineal pues $f(0) = 0 + 1 = 1 \neq 0$. Debe entenderse el teorema anterior, dice que si la función es lineal debe enviar el cero en el cero, pero no lo contrario; es decir, que **se requiere** para ser lineal enviar el cero en el cero. Con ejemplos se puede ver que no es suficiente. Es decir, que habrá funciones que envien el cero en el cero pero que no son lineales. Por ejemplo, la función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = x^2$ envía el cero en el cero pero no es lineal pues $1 = (-1)^2 = g(-1) \neq -g(1) = -1$ $\blacksquare$
Recuerde el concepto de rango o contradominio:

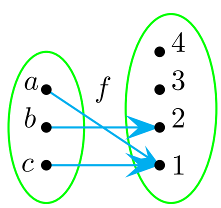
Definición 21.2
Sea $F : X \to Y$ una función del conjunto X al conjunto Y. El *rango de F* es el conjunto de elementos de Y que son imagen de un valor en X:

$$\text{rango}(F) = \{y \in Y \,|\exists x \in X,\, F(x) = y\}$$

Son sinónimos rango o imagen de una función.

21.7. Conceptos relativos a funciones

Conceptos a recordar
Considere la función:



- Dominio de $f =$ _____ $\{a, b, c\}$
- Codominio de $f =$ _____ $\{1, 2, 3, 4\}$
- $f(a) =$ ____ 1, $f(b) =$ ____ 2, $f(\{a, b\}) =$ ____ $\{1, 2\}$
- Rango de $f =$ _____ $\{1, 2\}$
- Imagen inversa de $1 =$ _____ $\{a, c\}$
- Imagen inversa de $2 =$ _____ $\{b\}$
- Imagen inversa de $3 =$ _____ $\{\}$
- Parejas que forman $f =$ _______________ $\{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$

21.8. Imágenes de espacios generados

El siguiente resultado afirma que la imagen de un espacio generado es precisamente el espacio generado por las imágenes individuales de los vectores del generador.

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ el generador de V.
Entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ genera a la imagen de T. Y por lo tanto, el conjunto imagen de una transformación lineal es un subespacio lineal.

Demostración

Sea $\mathbf{w}$ un elemento de W en la imagen de T, por tanto debe existir un vector $\mathbf{v}$ en V tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Como $\mathcal{B}$ genera a V y $\mathbf{v} \in V$ deben existir escalares c_1,c_2,…,c_n tales que:

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathbf{v}_n$$

si aplicamos T a la igualdad anterior

$$T(\mathbf{v}) = T(c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathbf{v}_n)$$

como T es lineal

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathbf{v}_n) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n\,T(\mathbf{v}_n)$$

de donde

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n\,T(\mathbf{v}_n)$$

lo cual dice que $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $T(\mathcal{B})$. Es decir, $\mathbf{w}$ está en el generado por $T(\mathcal{B})$. Hemos probado que: si $\mathbf{w}$ está en la imagen de T, entonces $\mathbf{w}$ está en el generado por $T(\mathcal{B})$. Por otro lado, si $\mathbf{w}$ está en el generador por $T(\mathcal{B})$, entonces deben existir c_1, c_2, …,c_n tales que

$$\mathbf{w} = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n\,T(\mathbf{v}_n)$$

siendo T lineal lo anterior queda:

$$\mathbf{w} = T(c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathbf{v}_n)$$

siendo $\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathbf{v}_n$ un elemento de V, se concluye que $\mathbf{w}$ está en la imagen de T. Hemos probado que: si $\mathbf{w}$ está en el generado por $T(\mathcal{B})$, entonces $\mathbf{w}$ está en la imagen de T. De los dos hechos demostrados se deduce que el conjunto imagen de T es igual al espacio generado por $T(\mathcal{B})$ ■

Ejemplo 21.11

Sea $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$F((x, y, z)') = (-2\,x - 4\,z, -x - 2\,z, 3\,x + y + 6\,z)'$$

Indique en qué se transforma

- La línea L_1: $x/2 = y/(-3) = z$
- El plano P_1: $x - 2\,y + 3\,z = 0$
- El plano P_2: $x - 2\,y + 2\,z = 0$

Solución
Al pasar por el origen, la línea $x/2 = y/(-3) = z$ corresponde al espacio generado por su vector de dirección que es $\mathbf{d} =< 2, -3, 1 >'$. Por el resultado anterior, la imagen de la línea será el espacio generado por

$$T(\mathbf{d}) = (-2(2) - 4(1), -(2) - 2(1), 3(2) + (-3) + 6(1))' = (-8, -4, 9)'$$

El generado por un vector corresponde a una línea que pasa por el origen, por tanto, la imagen de la línea es la línea:

$$\frac{x}{-8} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{9}$$

El plano P_1: $x - 2\,y + 3\,z = 0$ corresponde al conjunto:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2\,y - 3\,z \\ y \\ z \end{array}\right) = y\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) + z\left(\begin{array}{c} -3 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

Es decir, corresponde al espacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)'$ y $\mathbf{v}_2 = (-3, 0, 1)'$. Por tanto, la imagen del plano P_1 corresponderá al generado por $T(\mathbf{v}_1) = (-4, -2, 7)'$ y $T(\mathbf{v}_2) = (2, 1, -3)'$. En $\mathbf{R}^3$ el generado por dos vectores no colineales corresponde a un plano que pasa por el origen. Su vector normal será:

$$\mathbf{n} = T(\mathbf{v}_1) \times T(\mathbf{v}_2) = (-1, 2, 0)'$$

Por tanto el plano P_1 se transforma en el plano:

$$-1\,x + 2\,y + 0\,z = 0$$

El plano P_2: $x - 2\,y + 2\,z = 0$ corresponde al conjunto:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2\,y - 2\,z \\ y \\ z \end{array}\right) = y\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) + z\left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

Es decir, corresponde al espacio generado por los vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0)'$ y $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1)'$. Por tanto, la imagen del plano P_2 corresponderá al generado por $T(\mathbf{u}_1) = (-4, -2, 7)'$ y $T(\mathbf{u}_2) = (0, 0, 0)'$. En $\mathbf{R}^3$ el generado por tales vectores corresponde a el espacio generado sólo por $T(\mathbf{u}_1)$ que corresponde a la línea con vector de dirección $(-4, -2, 7)'$. Por tanto el plano P_2 se transforma en la línea:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$$

Ejemplo 21.12
Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right],\ T\left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -8 \\ -6 \\ 5 \end{array}\right]$$

Calcule $T\left[\begin{array}{r} -9 \\ 6 \end{array}\right]$ y $T\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$.

Solución
Como

$$\left[\begin{array}{r} -9 \\ 6 \end{array}\right] = -4\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] + 5\left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array}\right]$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} &= T(-4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}) = -4\,T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\,T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -4\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ -42 \\ 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La segunda igualdad permanece porque T es lineal.
Es fácil observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & - & 3y \\ 4x & - & y \\ -x & + & 2y \end{bmatrix} \blacksquare$$