



MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS UTFSM

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS GRUPOS Y ANILLOS

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Rubén A. Hidalgo

**ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRUPOS Y ANILLOS**

PRIMERA EDICIÓN 2009

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso,
Chile.

E-mail : `ruben.hidalgo@usm.cl`

Url : `http://docencia.mat.utfsm.cl/~rhidalgo`

Este libro fué parcialmente patrocinado por los proyectos Fondecyt 1070271 y UTFSM 12.09.02.

**ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRUPOS Y ANILLOS**

PRIMERA EDICIÓN 2009

Rubén A. Hidalgo

A Betty, Cata y Bucky

INTRODUCCIÓN

El propósito de este libro es presentar desde un punto de vista básico (en lo posible) el concepto de grupos y anillos que puedan ser utilizados por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas e Ingeniería Civil Matemática de nuestro Departamento de Matemática de la UTFSM.

Muchos de los fenómenos que encontramos en la naturaleza tienen ciertas simetrías con las cuales podemos sacar conclusiones que nos permitan entender tal situación de una manera simple. Muchos casos corresponden a problemas de la física y biología. Por ejemplo en física, conceptos como momentos angulares, tensores, etc., aparecen como propiedades de la teoría de grupos. En biología podemos entender moléculas y cristales por sus grupos de simetrías.

Muchos temas se han propuesto como ejercicios para que el estudiante pueda poner en práctica los conceptos ya estudiados. Por supuesto, esto podría tener la desventaja de producir una idea de aislamiento de los temarios tratados, lo cual no es nuestro propósito.

Es claro que en esta primera versión existen muchos errores tipográficos y de temarios. Esperamos que durante el transcurso del curso los estudiantes puedan hacer las correcciones al escrito y así poder tener en el futuro unas notas mejoradas, las cuales deberán crecer con el tiempo.

Mis primeros agradecimientos van dirigidos a Betty, Cata y Pucky, a quienes quite tiempo de dedicación para escribir esta monografía, por su comprensión durante ese tiempo. Quiero también agradecer de manera especial a Sebastian Reyes, Víctor González y a todos aquellos quienes leyeron parte de estas notas y me indicaron algunos errores.

TABLA DE MATERIAS

Introducción	ix
Parte I. Teoría Básica de Grupos	1
1. Grupos de Permutaciones	3
1.1. Grupos por medio de permutaciones.....	3
1.2. Orden de un grupo de permutaciones.....	4
1.3. Subgrupo de permutaciones.....	4
2. Grupos	7
2.1. Definición de grupos.....	7
2.2. Grupos Abelianos.....	9
2.3. Subgrupos.....	9
2.4. Generadores.....	12
2.5. El pequeño teorema de Fermat.....	13
2.6. El teorema de Euler.....	14
2.7. Grupo fundamental.....	14
3. Homomorfismos de Grupos y Automorfismos	17
3.1. Homomorfismos de grupos.....	17
3.2. Grupo de automorfismos.....	19
3.3. Teorema de Caeley.....	20
3.4. Automorfismos interiores y grupos Abelianos.....	22
4. Grupos Cíclicos	23
5. Grupos Cocientes	27
6. Algunos Subgrupos Normales y Abelianización de Grupos	37
7. Productos de Grupos	43
7.1. Producto Directo de Grupos.....	43
7.2. Producto Débil de Grupos.....	44
7.3. Producto Directo Interno.....	45

7.4. Producto Semidirecto de Grupos.....	45
8. Producto Libre de Grupos.....	47
9. Producto Libre Amalgamado.....	51
10. HNN-Extensión.....	53
11. Grupos Libres.....	55
12. Grupos Abelianos Finitamente Generados.....	57
12.1. Grupos Abelianos Libres.....	57
12.2. Grupos Abelianos Finitamente Generados.....	58
13. Grupos Como Cociente de Grupos Libres.....	59
14. Grupos de Permutaciones Finitos.....	63
Parte II. Acción de Grupos y Aplicaciones.....	69
15. Acción de Grupos sobre Conjuntos.....	71
16. Los Teoremas de Sylow.....	83
17. Aplicaciones de los Teoremas de Sylow.....	85
17.1. Aplicación 1.....	85
17.2. Aplicación 2.....	87
17.3. Aplicación 3.....	88
17.4. Aplicación 4.....	90
Parte III. Anillos.....	93
18. Definición y Ejemplos.....	95
19. Homomorfismos de Anillos.....	103
20. Ideales y Anillos Cocientes.....	107
21. Ideales Primos y Maximales.....	111
22. Cuerpo Cociente de un Dominio Entero.....	115
23. Dominios Euclidianos, Principales y Factorización Única.....	119
23.1. Dominios Euclidianos.....	119
23.2. Dominios de Ideales Principales.....	120
23.3. Dominios de Factorización Única.....	121
23.4. Relaciones entre Dominios.....	122
24. Anillo de Polinomios y Factorización Única.....	127
25. Anillos Noetherianos.....	131

Parte IV. Representaciones Lineales de Grupos	135
26. Representaciones Lineales	137
27. Algunos Ejemplos de Representaciones	139
27.1. Representación regular dada por la acción de un grupo	139
27.2. Representación suma directa	139
27.3. representación producto tensorial	140
27.4. Representación wedge	140
27.5. Representación Hom	140
27.6. Representación cociente	141
28. Representaciones Irreducibles y Reducibles	143
29. Homomorfismos de Representaciones	145
30. Carácteres y Conteo de Representaciones Irreducibles	155
Referencias	163
Indice	165

PARTE I

TEORÍA BÁSICA DE GRUPOS

En la naturaleza aparecen en diversas formas la idea de simetría, como es el caso de cristales, moléculas, movimiento de electrones por un campo simétrico, etc. Todos esos fenómenos tienen un concepto común el cual es la noción de un grupo.

CAPÍTULO 1

GRUPOS DE PERMUTACIONES

En esta parte introduciremos el concepto de grupos desde un punto de vista clásico, dado por biyecciones de algún conjunto no vacío. En el próximo capítulo daremos la noción general de grupos.

1.1. Grupos por medio de permutaciones

Definición 1.1.1. — Consideremos primero algún conjunto no vacío X (por ejemplo, representando una molécula, cristales, etc). Una *permutación* de X será por definición una función biyectiva $f : X \rightarrow X$. Denotemos por $\text{Perm}(X)$ al conjunto de las permutaciones de X .

Observemos que todo conjunto X posee la permutación trivial dada por la función identidad I_X . También, dada una permutación $f : X \rightarrow X$, siempre tenemos la permutación inversa $f^{-1} : X \rightarrow X$.

Ejercicio 1.1.2. — Verificar que X es un conjunto finito sí y sólo si $\text{Perm}(X)$ es finito. En el caso que X es un conjunto finito de cardinalidad n , calcular la cardinalidad de $\text{Perm}(X)$.

Dadas dos permutaciones $f, g \in \text{Perm}(X)$ del conjunto X , tenemos que al componerlas obtenemos nuevamente una permutación $g \circ f \in \text{Perm}(X)$. Esto como consecuencia del hecho que la composición de dos biyecciones es de nuevo una biyección. Así, tenemos en $\text{Perm}(X)$ una operación (binaria) dada por la composición, que satisface las siguientes propiedades :

(1) La operación de composición en $\text{Perm}(X)$ es *asociativa*, es decir,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

para todos $f, g, h \in \text{Perm}(X)$.

(2) La función identidad I_X es un *elemento neutro* para la composición, es decir,

$$f \circ I_X = f = I_X \circ f$$

para todo $f \in \text{Perm}(X)$.

(3) Toda permutación $f \in \text{Perm}(X)$ tiene un *elemento inverso* $f^{-1} \in \text{Perm}(X)$.

Definición 1.1.3. — Decimos que el par $(\text{Perm}(X), \circ)$ es el *grupo de permutaciones* del conjunto X .

Desde ahora en adelante usaremos indistintamente la notación $\text{Perm}(X)$ para denotar tanto al conjunto de permutaciones de X como al grupo de permutaciones de X ya que esto no produce confusión alguna.

1.2. Orden de un grupo de permutaciones

Definición 1.2.1. — La cardinalidad de $\text{Perm}(X)$ es llamado el *orden* del grupo de permutaciones $\text{Perm}(X)$.

Notación : Sea $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Si $k > 0$, entonces usaremos la notación f^k para denotar la composición de f consigo misma k veces. La notación f^{-k} indicará que hacemos la composición de f^{-1} consigo misma k veces. Por último, f^0 indicará el neutro I_X .

Ejemplo 1.2.2. — Consideremos $X = \{a, b, c\}$ un conjunto de tres elementos. Entonces $\text{Perm}(X) = \{I_X, A, A^2, B, A \circ B, A^2 \circ B\}$, donde

$$A : (a, b, c) = (b, c, a) \text{ y } B(a, b, c) = (b, a, c)$$

Es decir, $\text{Perm}(X)$ es un grupo de permutaciones de orden 6.

Ejercicio 1.2.3. — Sea X un conjunto de $n > 0$ elementos. Determinar los elementos de $\text{Perm}(X)$. Verificar que el orden de $\text{Perm}(X)$ es $n!$.

1.3. Subgrupo de permutaciones

Hay veces en que no estaremos interesados en todas las permutaciones de un conjunto, pero sólo de algunas de ellas, por ejemplo, de aquellas que preservan cierta propiedad.

Definición 1.3.1. — Supongamos que tenemos un conjunto $X \neq \emptyset$ y un subconjunto $G \subset \text{Perm}(X)$ de algunas de las permutaciones de X . Si :

(1) Para todos. El conjunto G consiste $f, g \in G$ vale que $f \circ g \in G$;

(2) Para todo $f \in G$ vale que $f^{-1} \in G$, entonces diremos que G es un *subgrupo de permutaciones* de X y esto lo denotaremos con el símbolo $G < \text{Perm}(X)$. La cardinalidad de G es llamado el *orden* del subgrupo de permutaciones G .

Observación 1.3.2. — Observar que las condiciones (1) y (2) obligan a tener $I_X \in G$ y que G satisface las mismas propiedades antes verificadas para $\text{Perm}(X)$.

Ejercicio 1.3.3. — Calcular todos los subgrupos del grupo $\text{Perm}(X)$ del ejemplo 1.2.2.

Ejemplo 1.3.4. — Sea X un conjunto no vacío y $p \in X$ un punto que hemos fijamos. Consideremos el conjunto G formado por las permutaciones de X que tienen la propiedad de dejar al punto p fijo. Entonces claramente valen las dos propiedades anteriores y vemos que G es un subgrupo de permutaciones de X . Por ejemplo, en el caso $X = \{a, b, c\}$ y $p = a$, entonces $G = \{I_X, A \circ B\}$.

Ejemplo 1.3.5. — Generalicemos un poco más el ejemplo anterior. Sea X un conjunto no vacío y $A \subset X$ un subconjunto que hemos fijamos. Consideremos el conjunto G formado por las permutaciones de X que tienen la propiedad de dejar invariante al subconjunto A , es decir, para cada $g \in G$ y cada $a \in A$ vale que $g(a) \in A$. Entonces G es un subgrupo de permutaciones de X . Observemos que cada $g \in G$, al restringirla a A , produce una permutación $\phi(g)$ de A . Luego tenemos inducida una función $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(A)$, definida por tal restricción. Puede ocurrir que tengamos $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 \neq g_2$ pero que sus restricciones coincidan en A ; luego, ϕ no es necesariamente una función inyectiva. Por otro lado, cada permutación $h \in \text{Perm}(A)$ puede ser extendida a una permutación $\psi(h) \in \text{Perm}(X)$ por extensión como la función identidad en $X - A$. Tenemos entonces una función, ahora inyectiva, $\psi : \text{Perm}(A) \rightarrow \text{Perm}(X)$. Observemos que $\psi(\text{Perm}(A))$ es un subgrupo de permutaciones de X (Verificar).

Ejemplo 1.3.6. — Si $X = V$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo K , entonces el grupo $\text{Perm}(V)$ contiene como subgrupo a

$$GL(V) = \{L : V \rightarrow V : L \text{ es un isomorfismo de } V\}$$

es decir, los isomorfismos lineales de V es un subgrupo de permutaciones de V (las permutaciones que preservan la estructura de espacio vectorial).

Por otro lado, si $Q \subset V$, entonces

$$G = \{L \in GL(V) : L(Q) = Q\},$$

resulta también ser un subgrupo de $\text{Perm}(V)$.

Tenemos las contenciones

$$G \subset GL(V) \subset \text{Perm}(V)$$

Supongamos por ejemplo que Q es alguna figura geométrica dentro de V , que podría estar representando una molécula, una colección de electrones o un cristal. Entonces G estaría formado por aquellos isomorfismos que preservan tal configuración. Veamos esto de una manera un poco más concreta. Supongamos $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ y Q un polígono regular de $n \geq 3$ lados con centro en el origen $(0, 0)$ y uno de sus vértices localizado en $(1, 0)$. Entonces todo elemento de G debe obligatoriamente ser una rotación (de determinante positivo o negativo). Más aún, si R es la rotación positiva en ángulo π/n , S es la reflexión $S(x, y) = (x, -y)$ y $T = R \circ S \circ R^{-1}$, entonces se puede verificar que todo elemento de G se obtiene con todas las posibles composiciones entre T y S y que este tiene orden $2n$ (mirar la figura de la tapa para $n = 6$).

Ahora, supongamos que en el espacio vectorial real V tenemos un producto interior Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por ejemplo, en \mathbb{R}^n podemos usar el producto punto

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Denotemos por $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ al conjunto de todos los isomorfismos $L \in GL(V)$ tales que preservan tal producto, es decir,

$$\langle L(x), L(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \text{para todos } x, y \in V$$

Si V es de dimensión finita, digamos n , entonces podemos considerar una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V y formar la matriz simétrica $A \in GL(n, \mathbb{R})$ cuyo coeficiente $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$. Entonces escribiendo $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$, vale que

$$\langle x, y \rangle = (x_1 \dots x_n) A^t (y_1 \dots y_n)$$

De esta manera si $M \in M(n, \mathbb{R})$ es la matriz que representa a la transformación lineal $L : V \rightarrow V$ en la base β , entonces tenemos que $L \in O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ sí y sólo si

$$M A^t M = A$$

Llamamos a $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ el *grupo de isometrías* del espacio Euclidiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Se tiene que $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ es un subgrupo de permutaciones de $\text{Perm}(V)$. Este tipo de permutaciones (llamados isometrías de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) son los que interesan para el estudio de algunos fenómenos de la naturaleza.

Ejercicio 1.3.7. — Verificar y completar los detalles del ejercicio anterior.

Ejercicio 1.3.8. — Para cada entero $n \geq 3$ considere el polígono regular P de n lados centrado en el origen en \mathbb{R}^2 . Use el producto punto usual

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$$

y determine las isometrías de P .

CAPÍTULO 2

GRUPOS

La pregunta natural es si existe en el fondo alguna diferencia entre un grupo de simetrías $\text{Perm}(X)$ y alguno de sus subgrupos. La verdad es que, excepto por la propiedad que uno es subconjunto del otro, no hay diferencia conceptual entre ellos. En este capítulo veremos la definición general de grupos, el cual responde a la interrogante anterior.

2.1. Definición de grupos

Definición 2.1.1. — Un conjunto $G \neq \emptyset$ junto a una función

$$* : G \times G \rightarrow G$$

llamada una operación binaria en G es llamado un grupo si valen las siguientes propiedades :

- (1) La operación binaria $*$ es *asociativa*, es decir,

$$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3,$$

para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$.

- (2) Existe un *elemento neutro* para la operación binaria $*$, denotado por I_G , que satisface :

$$g * I_G = g = I_G * g$$

para todo $g \in G$.

- (3) Todo elemento $g \in G$ tiene un *elemento inverso* respecto a la operación binaria $*$, es decir que existe un elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = I_G = g^{-1} * g$.

Ejercicio 2.1.2. — Verificar que el elemento neutro y los inversos son únicos en un grupo.

Definición 2.1.3. — El orden de un grupo $(G, *)$, denotado por $|G|$, es definido como la cardinalidad de conjunto G . De la misma manera, por cada elemento $g \in G - \{I_G\}$ llamaremos el orden de g , denotado por $o(g)$, al entero positivo k más pequeño tal que $g^k = I_G$ en caso de existir, o $o(g) = \infty$ en caso contrario. Diremos que el orden del neutro es 1.

Ejercicio 2.1.4. — Ver que todo grupo de permutaciones es un grupo con la operación de composición.

Ejercicio 2.1.5. — Sea $(G, *)$ un grupo y dos elementos $x, y \in G$ de ordenes $n > 1$ y $m > 1$ respectivamente. Supongamos que $x * y = y * x$. Verificar que el orden de $x * y$ es el mínimo común múltiplo $M.C.M.(n, m)$ entre n y m .

Ejercicio 2.1.6. — Supongamos que $(G, *)$ es un grupo finito donde la ecuación $x^2 = I_G$ tiene como única solución a $x = I_G$. Calcular el valor en G del producto de todos los elementos de G .

Ejemplo 2.1.7. — Para analizar conjuntos finitos muy pequeños con alguna operación binaria dada, uno puede utilizar tablas de multiplicación para analizar si estamos en presencia de un grupo o no. Por ejemplo, consideremos el conjunto $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ y definamos la operación binaria dada por la siguiente tabla :

		e	a	b	c	d	f
e		e	a	b	c	d	f
a		a	b	e	f	c	d
b		b	e	a	d	f	c
c		c	d	f	e	a	b
d		d	f	c	b	e	a
f		f	c	d	a	b	e

Lo que esta tabla nos dice, por ejemplo, que el coeficiente $(2, 3)$, es decir, e es igual a $a * b$.

Ejercicio 2.1.8. — Verificar que el grupo del Ejemplo 2.1.7 tiene orden 6.

2.2. Grupos Abelianos

Definición 2.2.1. — Un grupo $(G, *)$ es llamado un un *grupo Abeliano* si se satisface la siguiente propiedad de *commutatividad*

(*) para todo par de elementos $x, y \in G$ vale que $x * y = y * x$.

Ejemplo 2.2.2. — Es claro que no todo grupo puede ser Abeliano. Un ejemplo típico es el grupo $\text{Perm}(X)$ cuando la cardinalidad de X es al menos 3. Otro ejemplo es el siguiente. Sea $GL(n, \mathbb{Z})$ el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ invertibles con coeficientes enteros (las inversas con coeficientes enteros también). Usando como la operación binaria el producto usual de matrices, tenemos que para $n \geq 2$ este da un grupo no Abeliano.

Ejercicio 2.2.3. — Verificar que el Ejemplo 2.1.7 define un grupo que no es Abeliano.

Ejemplo 2.2.4. — Supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ con la propiedad que todos sus elementos diferentes del neutro son de orden 2. Si $x, y \in G$, entonces $x * y * x^{-1} * y^{-1} = x * y * x * y = (x * y)^2 = I_G$, es decir, G es un grupo Abeliano.

2.3. Subgrupos

Definición 2.3.1. — Si $(G, *)$ es un grupo y $H \subset G$ satisface ser un grupo con la misma operación $*$, entonces H es llamado un *subgrupo* de G , denotado esto por $H < G$.

Ejercicio 2.3.2. — Obtener todos los subgrupos del grupo del Ejemplo 2.1.7.

Ejercicio 2.3.3. — Sea $(G, *)$ un grupo y $H \neq \emptyset$ un subconjunto de G . Verificar que H es un subgrupo de G sí y sólo si :

- (1) Para cada $h \in H$ se tiene que $h^{-1} \in H$; y
- (2) Si $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 * h_2 \in H$.

Concluir que $I_H = I_G$ y que todo inverso en H es inverso en G .

Es claro que todo grupo de permutaciones y todo subgrupo de permutaciones es un grupo (donde $*$ = \circ) en la versión moderna. Antes de verificar que todo grupo, en la notación moderna, es un subgrupo de permutaciones de algún conjunto, necesitaremos un concepto que permita comparar grupos, estos son los homomorfismos.

Ejercicio 2.3.4. — Determinar que todos los subgrupos del grupo Abeliano \mathbb{Z} son de la forma $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 2.3.5. — Consideremos el grupo \mathbb{R} con la operación binaria de la suma usual de número reales. Recordemos del curso de análisis 1 que \mathbb{R} es un espacio normado, la norma siendo el valor absoluto. Un subgrupo H de \mathbb{R} tiene dos posibilidades : ser un subconjunto discreto (es decir, no tiene puntos de acumulación) o no serlo. En caso que H no sea discreto entonces existe una sucesión $x_n \in H$ que converge hacia un número real p . Entonces $y_n = x_{n+1} - x_n \in H$ nos dá una sucesión que converge hacia $0 \in H$. Escojamos cualquier intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Entonces podemos escoger y_n de manera que $z = |y_n| < (b - a)$. Es claro que $z \in H$ y que $kz = z + \dots + z \in H$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_0 z \in (a, b)$, tenemos que si H no es discreto, entonces debe ser un subconjunto denso de \mathbb{R} . Ahora, si H es discreto, entonces lo anterior también nos dice que $w = \text{mínimo}\{h \in H : h > 0\} > 0$. Ahora, consideremos $w\mathbb{Z} = \{kw : k \in \mathbb{Z}\}$. Se tiene que $w\mathbb{Z}$ es un subgrupo de \mathbb{R} y también de H . Si $w\mathbb{Z} \neq H$, entonces es posible encontrar $k \in \mathbb{Z}$ y $h \in H$ tales que $(k - 1)w < h < kw$. Pero en este caso, $0 < kw - h < h$. Como $kw - h \in H$, obtenemos una contradicción con la minimalidad de w . En consecuencia, el hemos obtenido lo siguiente :

Teorema 2.3.6. — *Todo subgrupo aditivo de \mathbb{R} es o bién denso o de la forma $w\mathbb{Z}$ para cierto $w > 0$.*

Ejemplo 2.3.7. — Sea K un cuerpo (por ejemplo, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) y denotemos por $GL(n, K)$ al conjunto de las matrices de tamaño $n \times n$, con coeficientes en K , que son invertibles. Entonces, con la operación de jultiplicación de matrices, obtenemos que $GL(n, K)$ es un grupo. Este grupo es un modelo del grupo $GL(V)$ donde V es un espacio vectorial sobre K y dimensión n . Definamos la relación de equivalencia

$$A \equiv B \quad \text{sí y sólo si existe } \lambda \in K - \{0\} \text{ tal que } B = \lambda A$$

Sea $PGL(n, K)$ el conjunto de las clases de equivalencia y denotemos por

$$\pi : GL(n, K) \rightarrow PGL(n, K)$$

la proyección natural que asocia a cada matriz $A \in GL(n, K)$ su clase de equivalencia $\pi(A) := [A] \in PGL(n, K)$. Si definimos la operación

$$[A] \cdot [B] := [AB]$$

la cual está bién definida, entonces obtenemos en $PGL(n, K)$ una estructura de grupo, cual es llamado el *grupo proyectivo lineal*.

Observemos que el *grupo especial lineal* $SL(n, K)$, formado de las matrices de $GL(n, K)$ de determinante 1, satisface que $\pi(SL(n, K)) = PSL(n, K)$ es un subgrupo de $PGL(n, K)$.

Ejercicio 2.3.8. —

- (1) Verificar que $PSL(n, \mathbb{C}) = PGL(n, \mathbb{C})$.
- (2) ¿Es verdad lo anterior con \mathbb{C} reemplazado por \mathbb{R} ?

Ejemplo 2.3.9. — Un grafo \mathcal{G} es una colección disjunta de objetos llamados "vértices" y objetos llamados "ejes" que conectan dos vértices (puede ocurrir que los dos vértices conectados por un eje sean el mismo). Un automorfismo del grafo \mathcal{G} es una función biyectiva al nivel de vértices y al nivel de ejes, es decir, este envía vértices en vértices y envía ejes en ejes. Denotamos por $Aut(\mathcal{G})$ al conjunto de los automorfismos del grafo \mathcal{G} . Junto con la operación de composición de funciones obtenemos una estructura de grupo para $Aut(\mathcal{G})$.

Ejercicio 2.3.10. — Completar los detalles del ejemplo anterior.

La operación conjuntista dada por la intersección nos permite construir subgrupos de algún grupo a partir de otros.

Proposición 2.3.11. — Sea $(G, *)$ un grupo y $\{H_j : j \in J\}$ una colección cualquiera de subgrupos de G . Entonces $\bigcap_{j \in J} H_j$ es de nuevo un subgrupo de G .

Demonstración. — Supongamos que $x, y \in \bigcap_{j \in J} H_j$. Entonces $x, y \in H_j$, para cada $j \in J$. Como H_j es subgrupo, entonces $x * y, x^{-1} \in H_j$ y, como consecuencia, $x * y, x^{-1} \in \bigcap_{j \in J} H_j$. \square

Ejercicio 2.3.12. — Verificar que la unión de subgrupos no es necesariamente un subgrupo. Dar un ejemplo.

Ejemplo 2.3.13. — Un ejemplo de un grupo es dado por las rotaciones Euclidianas en \mathbb{R}^3 . Consideremos dos ángulos de rotación $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y consideremos las rotaciones en \mathbb{R}^3 dadas por

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos $A \circ B = B \circ A$, pero con las rotaciones

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

tenemos $C \circ D \neq D \circ C$.

Ejemplo 2.3.14. — Consideremos un grupo $(G, *)$ de orden par. Entonces $G - \{I_G\}$ es un conjunto de cardinalidad impar. Consideremos la función

$$\tau : G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$$

Observamos que τ es una biyección, es su propia inversa y que $\tau(I_G) = I_G$. Así, tenemos una biyección $\tau : G - \{I_G\} \rightarrow G - \{I_G\}$. Como τ es su propia función inversa, tenemos que para cada $x \in G - \{I_G\}$ vale que $\tau(\{x, x^{-1}\}) = \{x, x^{-1}\}$. Esto nos obliga a tener al menos un elemento $x \in G - \{I_G\}$ con $\tau(x) = x$, es decir, G tiene al menos un elemento de orden 2.

Ejercicio 2.3.15. — Sea $(G, *)$ un grupo de orden par. Verificar que $\#\{x \in G : o(x) = 2\}$ es impar (Ind. Use la función biyectiva dada por inversión, es decir, $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$).

Ejercicio 2.3.16. — Consideremos el grupo de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 invertible reales, es decir $G = GL(2, \mathbb{R})$ con la operación binaria dada por multiplicación usual de matrices. Sean

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Verificar que $o(x) = 4$, $o(y) = 3$ y $o(x * y) = \infty$. Comparar al ejercicio anterior.

2.4. Generadores

Consideremos un grupo $(G, *)$ y un subconjunto $A \subset G$. Lo más probable es que A no sea un subgrupo de G . Podemos preguntarnos por el subgrupo de G más pequeño que contenga A .

Lo que podemos intentar es considerar la intersección de todos los subgrupos de G que contenga a A , es decir

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H < G \\ A \subset H}} H$$

Esta intersección es no vacía ya que G es uno de los subgrupos conteniendo A .

Como la intersección de subgrupos de un grupo dado es nuevamente un subgrupo, tenemos que en efecto $\langle A \rangle$ es un subgrupo de G .

Definición 2.4.1. — El grupo $\langle A \rangle$ es llamado el subgrupo de G generado por A . En caso que $\langle A \rangle = G$, decimos que A es un conjunto de generadores de G . En este caso decimos también que los elementos de A son generadores de G .

Ejercicio 2.4.2. — Buscar generadores para los grupos del ejemplo 1.3.6.

2.5. El pequeño teorema de Fermat

Definición 2.5.1. — Sea p un número primo y sea $G = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Considere la operación binaria $*$ de la siguiente manera : si $a, b \in G$ entonces $a * b$ denota el resto de dividir $ab \in \mathbb{Z}$ por p .

Ejercicio 2.5.2. — (i) Verificar que $(G, *)$ es un grupo conmutativo de orden $p-1$ (Ind. Si $a \in G$ entonces $(a, p) = 1$, es decir, a no es divisible por p . Más adelante veremos que existen enteros n, m tales que $na + mp = 1$). Al grupo así construido le denotaremos por $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
(ii) Verificar que si p no fuese un número primo, entonces la operación $*$ definida no determina una estructura de grupo en G .

Ejemplo 2.5.3. — Consideremos un número primo p y formemos el grupo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Busquemos los elementos de orden 2, es decir $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que $a * a = 1$, es decir, $a^2 - 1$ sea divisible por p . Como $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ y $(a-1) < p$, debemos tener que $(a+1)$ debe ser divisible por p , dando como única solución $a = p-1$. En particular, como todo otro elemento de $\{2, 3, \dots, p-2\}$ tiene inverso diferente, tenemos que $1 * 2 * 3 * \dots * (p-1) = (p-1)$, es decir,

$$(p-1)! \equiv -1 \text{ módulo } p$$

Si n es un entero positivo tal que $(n, p) = 1$, es decir, p no divide n . Entonces $n = ap + r$ cierto $r \in G$. Más adelante veremos que si G es un grupo finito de orden N y $x \in G$, entonces vale que $x^N = 1$, donde $1 \in G$ denota al elemento neutro. Luego $r^{p-1} = 1$ en $(G, *)$, es decir, vale la igualdad $r^{p-1} = 1 + bp$ en \mathbb{Z} para cierto entero b . Luego, en \mathbb{Z} tenemos que :

$$n^p = nn^{p-1} = n(ap + r)^{p-1} = nr^{p-1} + pq, \text{ cierto entero } q$$

es decir

$$n^p = n(1 + bp) + pq = n + p(nb + q)$$

De donde concluimos el siguiente

Teorema 2.5.4 (Pequeño teorema de Fermat). — Sean p un primo y n un entero cualquiera, entonces

$$n^p \equiv n \text{ módulo } p$$

2.6. El teorema de Euler

Definición 2.6.1. — Para cada número entero positivo q consideramos la función

$$e(q) = \#\{k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\} : (q, k) = 1\}$$

llamada la *función de Euler*.

Ejercicio 2.6.2. — Verificar que

(i) si p es un número primo, $t > 0$ un entero, entonces

$$e(p^t) = p^t \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(ii) Si q, r son enteros positivos y $(q, r) = 1$, entonces $e(qr) = e(q)e(r)$.

(iii) Sea $G = \{\{k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\} : (q, k) = 1\}\}$ y considere la operación binaria $*$ dada por : si $a, b \in G$, entonces $a * b$ denota el resto al dividir ab por q . Verificar que $(G, *)$ es un grupo abeliano de orden $e(q)$ (Ind. Más adelante veremos que si $(k, q) = 1$, entonces existen enteros $n, m \in \mathbb{Z}$ de manera que $nq + mr = 1$).

De (iii) del problema anterior, podemos concluir la siguiente generalización al pequeño teorema de Fermat.

Teorema 2.6.3 (Teorema de Euler). — Si $q, n \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, son tales que $(q, n) = 1$, entonces

$$n^{e(q)} \equiv 1 \pmod{q}$$

2.7. Grupo fundamental

Consideremos un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y escojamos un punto $p \in X$. Sea $A(p)$ el conjunto de todas las funciones continuas $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Para $\gamma_1, \gamma_2 \in A(p)$, definamos la operación binaria $*$ dada por

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Desgraciadamente, esta operación binaria no es asociativa, es decir, en general tenemos que $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) \neq (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$. Para arreglar esto, definimos una relación de equivalencia \sim sobre $A(p)$ definida de la siguiente manera. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in A(p)$, entonces decimos que ellas son homotópicamente equivalentes relativo al punto p , es decir,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

si existe una función continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

(i) $F(t, 0) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0, 1]$;

(ii) $F(t, 1) = \gamma_2(t)$, para todo $t \in [0, 1]$;

(iii) $F(0, s) = F(1, s) = p$, para todo $s \in [0, 1]$.

Lo importante de esta relación de equivalencia es que si tenemos $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in A(p)$ tales que $\gamma_1 \sim \tilde{\gamma}_1$ y $\gamma_2 \sim \tilde{\gamma}_2$, entonces

$$\gamma_1 * \gamma_2 \sim \tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$$

Denotemos por $[\gamma]$ la clase de equivalencia de $\gamma \in A(p)$ y por $\pi_1(X, p)$ al conjunto de las clases de equivalencia. Podemos hacer descender la operación $*$ hasta $\pi_1(X, p)$, es decir,

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$$

Ahora la operación es asociativa. Si $e_p \in A(p)$ es el camino constante $e_p(t) = p$, entonces se tiene que $[e_p] * [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] * [e_p]$, es decir, $[e_p]$ es un neutro para tal operación.

Dado cualquier camino $\gamma \in A(p)$, tenemos su camino de vuelta $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t) \in A(p)$. En este caso, tenemos que $[\gamma] * [\gamma^{-1}] = [e_p] = [\gamma^{-1}] * [\gamma]$, es decir, $[\gamma^{-1}]$ es inverso de $[\gamma]$ para esta operación.

Hemos obtenido que $(\pi_1(X, p), *)$ define un grupo, llamado *grupo fundamental* de X basado en el punto p .

Ejercicio 2.7.1. — Completar los detalles del ejemplo anterior.

CAPÍTULO 3

HOMOMORFISMOS DE GRUPOS Y AUTOMORFISMOS

3.1. Homomorfismos de grupos

Definición 3.1.1. — Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ dos grupos y $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ una función. Diremos que ϕ es un *homomorfismo de grupos* si vale que

$$\phi(x *_1 y) = \phi(x) *_2 \phi(y), \quad \text{para todos } x, y \in G_1$$

Observación 3.1.2. — Sea $\phi : (G_1, *_1) \rightarrow (G_2, *_2)$ un homomorfismo de grupos. Entonces para cada $x \in G_1$ tenemos que

$$\phi(x) = \phi(x *_1 I_{G_1}) = \phi(x) *_2 \phi(I_{G_1})$$

luego, vale que

$$\phi(I_{G_1}) = I_{G_2}$$

Definición 3.1.3. — Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ dos grupos y $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos. Entonces

$$\text{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(I_{G_2}) = \{g \in G_1 : \phi(g) = I_{G_2}\}$$

es llamado el *núcleo de ϕ* y

$$\text{Im}(\phi) = \{h \in G_2 : \text{existe } g \in G_1 \text{ tal que } \phi(g) = h\}$$

es llamado la *mágen de ϕ* .

Definición 3.1.4. — En caso que un homomorfismo de grupos sea inyectivo, diremos que es un *monomorfismo*. Si este es sobreyectivo, entonces hablamos de un *epimorfismo* o *homomorfismo sobreyectivo*. Un *isomorfismo de grupos* es un homomorfismo biyectivo. En este caso diremos que los respectivos grupos son *grupos isomorfos*. Un isomorfismo de un grupo en si mismo es llamado un *automorfismo* del grupo.

La idea es que grupos isomorfos son el mismo desde el punto de vista algebraico.

Ejercicio 3.1.5. —

- (i) Verificar que las funciones $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(A)$ y $\psi : \text{Perm}(A) \rightarrow \text{Perm}(X)$ del ejemplo 1.3.5 son homomorfismos de grupos.
- (ii) Deducir del ejemplo 2.3.5 que todo subgrupo aditivo no denso de \mathbb{R} es isomorfo a \mathbb{Z} .
- (iii) Sea $(G, *)$ un grupo, X un conjunto y $F : G \rightarrow X$ una función biyectiva. Verificar que es posible dotar de una operación binaria \circ a X de manera que (X, \circ) es un grupo y $F : (G, *) \rightarrow (X, \circ)$ es un isomorfismo de grupos. Ver además que tal operación binaria es única.
- (iv) Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ dos grupos y $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos. Verificar que :
 - (iv.1) $\text{Ker}(\phi)$ es un subgrupo de G_1 .
 - (iv.2) $\text{Im}(\phi)$ es un subgrupo de G_2 .
 - (iv.3) ϕ es monomorfismo sí y sólo si $\text{Ker}(\phi) = \{I_{G_1}\}$. En este caso ver que $\phi : G_1 \rightarrow \text{Im}(\phi)$ es un isomorfismo.
 - (iv.4) ϕ es epimorfismo sí y sólo si $\text{Im}(\phi) = G_2$.
 - (iv.5) Si H es subgrupo de G_1 , entonces $\phi(H)$ es subgrupo de G_2 .
 - (iv.6) Si U es subgrupo de G_2 , entonces $\phi^{-1}(U)$ es un subgrupo de G_1 conteniendo a $\text{Ker}(\phi)$.
- (v) Verificar que la función logaritmo $\text{Log} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un isomorfismo. Determinar la inversa.
- (vi) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ junto a la operación dada por la multiplicación usual de números complejos, denotada por \cdot . Verificar que tenemos un grupo Abelian. Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ defina la función

$$F_a : (S^1, \cdot) \rightarrow (S^1, \cdot) : w = e^{i\theta} \mapsto w^a = e^{ia\theta}$$

Verificar que F_a es un homomorfismo de grupos. Calcular $\text{Ker}(F_a)$.

- (vii) Sea $(G, *)$ un grupo para el cual la función de inversión

$$J : (G, *) \rightarrow (G, *) : x \mapsto x^{-1}$$

es un homomorfismo de grupos. Verificar que $(G, *)$ es un grupo Abelian.

Ejercicio 3.1.6. — Sea (X, Υ) un espacio topológico y sean $p, q \in X$ en la misma componente arcoconexa. Verificar que los grupos fundamentales $\pi_1(X, p)$ y $\pi_1(X, q)$ son isomorfos. ¿Qué pasa si p y q están en componentes diferentes?

Ejemplo 3.1.7. — Sea $(G, *)$ un grupo finito y supongamos que tenemos un automorfismo involutivo sin puntos fijos no triviales, es decir, un automorfismo $T : (G, *) \rightarrow (G, *)$ de $(G, *)$ tal que $T \circ T = I$ y $T(x) = x$ sólo vale para $x = I_G$. Veamos que

esto obliga a tener $(G, *)$ Abeliano. En efecto, primero consideremos el subconjunto de G siguiente

$$K = \{x^{-1} * T(x) : x \in G\} \subset G$$

La igualdad $x^{-1} * T(x) = y^{-1} * T(y)$ es equivalente a tener $T(y * x^{-1}) = y * x^{-1}$, la condición sobre los puntos fijos de T asegura $x = y$. En particular, $K = G$. De esta manera, podemos escribir cada elemento de G como $u = x^{-1} * T(x)$. Ahora, $T(u) = T(x^{-1} * T(x)) = T(x)^{-1} * x = u^{-1}$, es decir, T en la nueva representación es dada por inversión. Parte (vii) del Ejercicio 3.1.5 nos permite concluir que $(G, *)$ es un grupo Abeliano.

Ejemplo 3.1.8. — Dado un grupo $(G, *)$ definamos la siguiente operación binaria

$$\bar{*} : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto x \bar{*} y := y * x$$

Sean $x, y, z \in G$. Entonces :

- (i) $(x \bar{*} y) \bar{*} z = z * (y * x) = (z * y) * x = x \bar{*} (y \bar{*} z)$, es decir, $\bar{*}$ es una operación asociativa.
- (ii) $x \bar{*} I_G = I_G * x = x = x * I_G = I_G \bar{*} x$, es decir, tenemos un elemento neutro, el cual coincide con el elemento neutro para la operación binaria $*$.
- (iii) $x \bar{*} x^{-1} = x^{-1} * x = I_G = x * x^{-1} = x^{-1} \bar{*} x$, es decir, cada elemento de G tiene un inverso respecto a la operación binaria $\bar{*}$ el cual es el mismo como para la operación binaria $*$.

Luego, $(G, \bar{*})$ resulta ser un grupo. Si consideramos la función

$$\tau : (G, *) \rightarrow (G, \bar{*}) : x \mapsto x^{-1}$$

entonces obtenemos que

$$\tau(x * y) = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} = x^{-1} \bar{*} y^{-1} = \tau(x) \bar{*} \tau(y)$$

es decir, τ es homomorfismo de grupos. Como además τ es una biyección, tenemos que es un isomorfismo de grupos. Llamaremos al grupo $(G, \bar{*})$ el *grupo reflejado* del grupo $(G, *)$.

Ejercicio 3.1.9. — Verificar que $I : (G, *) \rightarrow (G, \bar{*}) : x \mapsto x$ no es un homomorfismo si G no es un grupo Abeliano.

3.2. Grupo de automorfismos

Definición 3.2.1. — Dado un grupo $(G, *)$, definimos el conjunto $\text{Aut}(G)$, formado por todos los automorfismos de $(G, *)$. Un isomorfismo $\phi : (G, *) \rightarrow (G, \bar{*})$ será llamado un *antiautomorfismo* de $(G, *)$. Denotaremos por $\text{Aut}^-(G)$ al conjunto de los antiautomorfismos de $(G, *)$.

Ejercicio 3.2.2. — Verificar que $\text{Aut}(G)$ es un grupo con la regla de composición y de hecho un subgrupo de $\text{Perm}(G)$. Si $(G, *)$ es un grupo Abeliano, entonces $\text{Aut}(G) = \text{Aut}^-(G)$, es decir, todo antiautomorfismo es también un automorfismo. ¿Qué pasa para grupos no Abelianos? ¿Es $\text{Aut}^-(G)$ un grupo bajo la regla de composición?

Definición 3.2.3. — Algunos automorfismos de $(G, *)$ se pueden obtener por conjugación, es decir, para cada $g \in G$ la función

$$\phi(g) : G \rightarrow G : k \mapsto g * k * g^{-1}$$

resulta ser un automorfismo de $(G, *)$, llamados *automorfismos interiores*. Denotaremos por $\text{Int}(G)$ al conjunto de los automorfismos interiores de G .

Ejercicio 3.2.4. — Verificar que $\text{Int}(G)$, con la operación de composición, es un subgrupo de $\text{Aut}(G)$ y luego un subgrupo de $\text{Perm}(G)$.

Ejercicio 3.2.5. —

- (1) Sea G_n un grupo cíclico de orden n . Verificar que existe un isomorfismo de grupos entre $\text{Aut}(G_n)$ y $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
- (2) Calcular $\text{Aut}(\text{Perm}(X))$ para un conjunto X de cardinalidad 2, 3, 4.

3.3. Teorema de Caeley

A continuación veremos el clásico teorema de Caeley, el cual nos dice que todo grupo se puede ver como un subgrupo de permutaciones de algún conjunto.

Sea $(G, *)$ un grupo y consideremos al conjunto $X = G$. Entonces tenemos la función

$$\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$$

definida por

$$\phi(g) : G \rightarrow G : k \mapsto g * k$$

Este es un ejemplo de lo que definiremos más adelante como la acción de un grupo.

Ejercicio 3.3.1. — Verificar que $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ es un monomorfismo.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Caeley). — *Todo grupo $(G, *)$ es isomorfo a un subgrupo del grupo $\text{Perm}(G)$. De hecho, tal subgrupo está contenido en el subgrupo de $\text{Perm}(G)$ formado por los automorfismos interiores de G .*

Ejemplo 3.3.3. — Consideremos dos conjunto X e Y y supongamos que existe una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$. Entonces tenemos que para cada $h \in \text{Perm}(X)$ vale que $\phi_f(h) = f \circ h \circ f^{-1} \in \text{Perm}(Y)$. La función $\phi_f : \text{Perm}(X) \rightarrow \text{Perm}(Y)$ es un isomorfismo de grupos. Como todo conjunto X de cardinalidad $n > 0$ es biyectivo con el conjunto de los n primeros índices $\{1, 2, \dots, n\}$, podemos identificar (módulo isomorfismos) el grupo $\text{Perm}(X)$ con el grupo $\text{Perm}(\{1, 2, \dots, n\}) := \mathcal{S}_n$, llamado el *grupo simétrico de n letras*. Este grupo lo analizaremos en una sección futura.

Ejercicio 3.3.4. — Dar un ejemplo de un grupo de orden n para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ejemplo 3.3.5. — Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden n . Por el teorema de Caeley, existe un monomorfismo $\phi : (G, *) \rightarrow \mathcal{S}_n$. Por otro lado, podemos construir un monomorfismo

$$\psi : \mathcal{S}_n \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$$

definido por

$$\psi((1, 2, \dots, n)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, componiendo los dos monomorfismos anteriores permite obtener un monomorfismo

$$\psi \circ \phi : (G, *) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$$

Ejercicio 3.3.6. — Describir el monomorfismo $\psi \circ \phi : (G, *) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$ construido en el Ejemplo anterior.

3.4. Automorfismos interiores y grupos Abelianos

Ahora veremos que los automorfismos interiores de un grupo sirven para medir que tan lejos está un grupo de ser Abeliano.

Proposición 3.4.1. — Sea $(G, *)$ un grupo. Entonces $\text{Int}(G) = \{I\}$, donde $I : G \rightarrow G$ denota al automorfismo identidad sí y sólo si G es Abeliano.

Demonstración. — Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano, $g \in G$ y consideremos el automorfismo interno $\phi_g : G \rightarrow G$ definido por g . Entonces $\phi_g(h) = g*h*g^{-1} = g*g^{-1}*h = h$, es decir, $\phi_g = I$. Recíprocamente, si tenemos que $\text{Int}(G) = \{I\}$, entonces para $g, h \in G$ vale que $\phi_g(h) = h$, lo cual es equivalente a tener $g*h = h*g$. Como esto lo hemos hecho para cualquier par de elementos de G , tenemos que G es Abeliano como queríamos. \square

Ejemplo 3.4.2. —

- (1) Consideremos el grupo aditivo \mathbb{Z} . Como este grupo es Abeliano, tenemos que $\text{Int}(\mathbb{Z}) = \{I\}$. Ahora, sea $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ un automorfismo. Sabemos que los únicos generadores de \mathbb{Z} son -1 y 1 . Así, $\phi(1) \in \{-1, 1\}$. Si $\phi(1) = 1$, entonces es claro que $\phi(k) = k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y luego obtenemos el automorfismo identidad I . Si $\phi(1) = -1$, entonces $\phi(k) = -k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ obteniendo $\phi = -I$. De esta manera obtenemos que $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ es un grupo cíclico de orden 2.
- (2) Consideremos un grupo G cíclico de orden n y sea x un generador de G . Luego

$$G = \{I_G, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}.$$

Sea $e(n)$ la función de Euler evaluada en n . Más adelante veremos que el número total de generadores de G es $e(n)$. Al ser G Abeliano tenemos que $\text{Int}(G)$ es trivial. Sea $\phi \in \text{Aut}(G)$. Entonces $\phi(x)$ puede tomar como valor cualquiera de los generadores de G . Además, una vez indicado el valor de $\phi(x)$ tenemos determinado completamente el automorfismo ϕ ya que $\phi(x^l) = \phi(x)^l$ por ser este un homomorfismo de grupo. De esta manera obtenemos que $|\text{Aut}(G)| = e(n)$.

CAPÍTULO 4

GRUPOS CÍCLICOS

Definición 4.0.3. — Aquellos grupos que se pueden generar con un sólo elemento son llamados *grupos cíclicos*.

Tenemos dos tipos de casos ; grupos cíclicos finitos y grupos cíclicos infinitos. Observemos que si $(G, *)$ es un grupo cíclico finito, con un generador x , entonces $|G| = o(x)$. El primer resultado básico es el siguiente.

Proposición 4.0.4. — *Todo grupo cíclico es Abeliano*

Demonstración. — Sea x un generador del grupo cíclico G . Entonces todo elemento de G es de la forma x^a para algún $a \in \mathbb{Z}$. Como

$$x^a * x^b = x^{a+b} = x^{b+a} = x^b * x^a$$

tenemos lo deseado □

Ejemplo 4.0.5. —

- (1) En ejercicio 1.2.2 tenemos que S y T son generadores de $\text{Perm}(X)$. Más aún, este no puede ser cíclico. De hecho, el grupo $\text{Perm}(X)$ no puede ser cíclico cuando la cardinalidad de X es al menos 3.
- (2) El grupo aditivo \mathbb{Z} tiene como generador a 1 (también lo es -1 y no hay otros) y, en particular, es un grupo cíclico.
- (3) El conjunto aditivo \mathbb{R} no puede ser generado con un número finito de generadores (la razón de esto lo tendremos que ver mucho más adelante). Este no puede ser un grupo cíclico como consecuencia del siguiente.

Ejemplo 4.0.6 (Grupos Cíclicos infinitos). — Sea G un grupo un grupo cíclico infinito, digamos generado por x .

- (i) Sea H un subgrupo de G diferente de $\{I\}$ y consideremos la menor potencia positiva de x , digamos x^m , contenida en H . Entonces el grupo cíclico generado por x^m está contenido en H . Si esta contención fuese estricta, entonces debe existir $x^n \in H - \langle x^m \rangle$. Esto nos dice que existe $s > 0$ tal que $(s-1)m < n < sm$. Esto nos asegura que $x^{sm-n} \in H$ contradiciendo la minimalidad de m . En particular, todo subgrupo de un grupo cíclico infinito es también un grupo cíclico infinito.
- (ii) Si x^n es otro generador de G , entonces debe existir un entero $r \in \mathbb{Z}$ de manera que $x^{nr} = x$, es decir, $x^{nr-1} = I$. Como x tiene orden infinito, esto obliga a tener $nr = 1$, es decir, $n \in \pm 1$. En consecuencia, si x genera un grupo cíclico infinito, entonces x^{-1} es el único generador diferente de x .
- (iii) La función $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow G$, definida por $\phi(k) = x^k$, resulta ser un isomorfismo de grupos.

Ejemplo 4.0.7 (Grupos Cíclicos finitos). — Sea G un grupo cíclico de orden n , digamos generado por x , luego $o(x) = n$.

- (i) Sea H un subgrupo de G , diferente de $\{I_G\}$. Si consideramos la menor potencia de x contenido en H , digamos x^m , entonces H es un grupo cíclico generado por x^m . En efecto, si no fuese esto cierto, deberíamos tener alguna potencia $x^k \in H$ que no estén $\langle x^m \rangle = \{I_G, x^m, x^{2m}, \dots, x^{rm}\}$. En tal caso, debemos tener que $(s-1)m < k < sm$, para algún $s \in \{1, \dots, r\}$. Pero en tal caso, $x^{k-(s-1)m} \in H$ y obtenemos una contradicción de la minimalidad de m .
- (ii) Si escogemos $d > 0$ un divisor de n , entonces existe un y único subgrupo de G de orden igual a d . En efecto, si tomamos $y = x^{\frac{n}{d}}$, entonces el grupo generado por y es de orden d . Esto no da la existencia. Para ver la unicidad, supongamos que H es un subgrupo de G de orden d . Por (i), $H = \langle x^m \rangle$ donde m lo podemos escoger dividiendo n y tal que $\frac{n}{m} = d$. Luego $m = \frac{n}{d}$.
- (iii) Sea $m \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $y = x^m$ y H el subgrupo generado por y . Por el teorema de Lagrange, $|H| = o(y) = t$ divide n . En particular, podemos escribir $n = tq$ para cierto $q \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Consideremos K el subgrupo generado por $z = x^q$, el cual tiene orden t . Por (ii) tenemos que $H = K$. En particular, existe un entero a tal que $x^{am} = x^q$. Esto último dice que existen enteros a, b tales que $am + bn = q$, es decir $M.C.D.(m, n) = q$ (máximo común divisor entre m y n).
- (iv) De (iii) vemos que x^m genera G sí y sólo si $M.C.D.(m, n) = 1$, es decir $(m, n) = 1$.
- (v) La función $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$, definida por $\phi([k]) = x^k$, resulta ser un isomorfismo de grupos.

Proposición 4.0.8. — Sea G un grupo cíclico de orden n , digamos generado por x .

- (a) Para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tenemos que x^k genera G sí y sólo si $(k, n) = 1$, es decir, k y n son relativamente primos. En particular, la cantidad de generadores de G es $\varphi(n)$.

- (b) Todo subgrupo de G es cíclico y está generado por una potencia x^d , donde d divide n , y tiene orden n/d . Además hay exactamente un subgrupo de cada posible orden.
- (c) Sean $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y $q = M.C.D.(k, n)$. Entonces x^k y x^q generan el mismo subgrupo.

Proposición 4.0.9. — Sean n, m enteros y $q = M.C.D.(n, m)$. Entonces existen enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$q = an + bm$$

En particular, si $(m, n) = 1$, entonces existen enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$1 = an + bm$$

Demonstración. —

- (1) Usando grupos cíclicos finitos. Es claro lo anterior cuando $n = m$. Supongamos entonces que $n > m$. Consideremos el grupo cíclico de orden n generado por un elemento x . Ahora procedemos como en (iii) del ejemplo anterior.
- (2) Usando grupos cíclicos infinitos. Podemos verificar la proposición de la siguiente manera. Consideremos el grupo cíclico infinito \mathbb{Z} y sea H su subgrupo generado por n y m . Sabemos que H debe ser cíclico, digamos generado por $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Como $n, m \in H$, tenemos que r divide a ambos n y m y como consecuencia, r divide a $d = M.C.D.(n, m)$. Esto último nos dice que el grupo cíclico generado por d está contenido en H . Pero, como d divide a ambos n y m , tenemos que H está contenido en el grupo cíclico generado por d . Como consecuencia, $H = \langle d \rangle$.

□

Ejercicio 4.0.10. — Generalizar lo anterior, es decir, verificar que dados enteros n_1, \dots, n_m y $d = M.C.D.(n_1, \dots, n_m)$, entonces existen enteros r_1, \dots, r_m tales que

$$d = r_1 n_1 + \dots + r_m n_m$$

CAPÍTULO 5

GRUPOS COCIENTES

Partamos con un grupo $(G, *)$ y un subgrupo H de este. Podemos definir la relación de equivalencia siguiente : Sean $x, y \in G$, diremos que ellos son equivalentes por H a la derecha si existe $h \in H$ tal que $y = x * h$. La clase de equivalencia derecha de x la denotaremos por xH . De manera similar, diremos que ellos son equivalentes por H a la izquierda si existe $h \in H$ tal que $y = h * x$. La clase de equivalencia izquierda de x es denotada por Hx .

Ejercicio 5.0.11. — Verificar que las anteriores son relaciones de equivalencia

Consideremos la relación de equivalencia derecha de H en G (lo que haremos es similar para la otra relación de equivalencia). Denotemos por G/H al conjunto de las clases de equivalencias derechas de los elementos de G y por $\pi_H : G \rightarrow G/H$ a la proyección natural, es decir, $\pi_H(x) = xH$. Observemos que H es la clase de equivalencia de I_G .

Tomemos una clase cualquiera, digamos xH . Entonces la función $f : H \rightarrow xH$, definida por $f(h) = xh$, es una función biyectiva. De esta manera, la cardinalidad de toda clase de equivalencia es igual al orden de H , es decir a $|H|$.

Definición 5.0.12. — Denotemos por $[G : H]$ la cardinalidad del conjunto de clases G/H , también llamado el *índice de H en G* .

Usando el hecho que dos clases de equivalencia coinciden o son disjuntos, obtenemos el siguiente :

Teorema 5.0.13 (Teorema de Lagrange). — Si G tiene orden finito, entonces

$$|G| = [G : H]|H|$$

Ejercicio 5.0.14. — Usar el teorema de Lagrange para obtener lo siguiente. Sea G un grupo finito y sean subgrupos $K < H < G$. Entonces $[G : K] = [G : H][H : K]$

Si tomamos un elemento $g \in G$, donde $(G, *)$ es algún grupo, entonces el subgrupo generado por él $\langle g \rangle$ tienen orden igual a $o(g)$. Una primera aplicación de este resultado es el siguiente :

Corolario 5.0.15. — Sea $(G, *)$ un grupo de orden finito, H un subgrupo de G y $g \in G$. Entonces $|H|$ y $o(g)$ dividen al orden de G como consecuencia del teorema de Lagrange.

Lo anterior, por ejemplo, nos permite ver que un grupo de orden 6 no puede tener elementos ni subgrupos de orden 4. Una segunda aplicación es la siguiente caracterización.

Proposición 5.0.16. — Sea G un grupo finito de orden p , donde p es algún primo. Entonces G es necesariamente un grupo cíclico.

Demonstración. — Tomemos cualquier elemento $x \in G - \{I_G\}$. Por la proposición anterior, $o(x)$ divide al número primo p . Como $o(x) > 1$, necesariamente $o(x) = p$. Consideremos el subgrupo cíclico de G dado por $\langle x \rangle$. Como el orden de $\langle x \rangle$ coincide con $o(x) = p$, tenemos que $G = \langle x \rangle$. \square

Ejemplo 5.0.17. — Consideremos un grupo $(G, *)$ de orden 4. Si G contiene un elemento de orden 4, digamos x , entonces $G = \langle x \rangle$, es decir, G es un grupo cíclico de orden 4. Supongamos ahora que G no contiene elementos de orden 4. Como el orden de cada elemento no trivial (es decir diferente del neutro) debe dividir 4, debemos tener que todos ellos tienen orden 2. Sea $x \in G - \{I_G\}$. Luego $\langle x \rangle$ está formado por el neutro I_G y x . Como G tiene orden 4, podemos escoger otro elemento $y \in G - \langle x \rangle$. Tenemos que y tiene orden 2. Como $(x*y)^2 = I_G, x^2 = y^2 = I_G$, tenemos $x*y = y*x$. Consideremos el subgrupo H de G generado por x e y . Tenemos que $H = \{I_G, x, y, x*y\}$ ($x*y \neq x, y$ ya que $x, y \neq I_G$). Pero $|H| = 4$, lo cual dice que $G = H$. Ahora, consideremos $\mathcal{K} = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ con la operación binaria Δ definida componente a componente (en cada factor usamos la operación $*$). Este grupo es llamado el *grupo de Klein*. Consideremos la función

$$F : \mathcal{K} \rightarrow G : (x^a, y^b) \mapsto x^a * y^b$$

Tenemos que F es un isomorfismo de grupos. Además, como \mathcal{K} no es cíclico, obtenemos que módulo isomorfismos sólo hay dos grupos.

Ejercicio 5.0.18. — Verificar que la operación binaria para \mathcal{K} dota de la estructura de un grupo Abelian a \mathcal{K} , que F es en efecto un isomorfismo de grupos. Calcular y comparar las tablas de multiplicación de estos dos tipos de grupos de orden 4.

Ejercicio 5.0.19. — Verificar que dos grupos cíclicos finitos del mismo orden son siempre isomorfos.

Ejercicio 5.0.20. — Determinar, módulo isomorfismos, los grupos de orden $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Volvamos a mirar la proyección

$$\pi_H : G \rightarrow G/H : x \mapsto xH$$

Una pregunta natural es la posibilidad de dotar a G/H de una estructura de grupo que sea compatible con la de G por medio de ϕ_H . Compatibilidad significa que haga π_H de un homomorfismo de grupos. En la mayoría de los casos esto no será posible, pero existen ciertos subgrupos que permiten esto. Tratemos de forzar una operación binaria Δ en G/H para que haga de π_H un homomorfismo. Primero, debemos tener

$$\pi_H(x * y) = \pi_H(x) \Delta \pi_H(y)$$

lo que es equivalente a decir

$$(x * y)H = x * H \Delta y * H$$

para todos $x, y \in G$. Luego tenemos forzada nuestra operación binaria a ser definida como :

$$\Delta : G/H \times G/H \rightarrow G/H : (xH, yH) \mapsto (x * y)H$$

Para que esta función tenga sentido, debemos asegurarnos que lo anterior no dependa de los representantes de las clases respectivas, es decir, si $x'H = xH$, $y'H = yH$, entonces $(x' * y')H = (x * y)H$. Pero $x' = x * h_1$ e $y' = y * h_2$ para ciertos $h_1, h_2 \in H$. Luego lo anterior es equivalente a tener

$$(x * h_1 * y * h_2)H = (x * y)H$$

es decir

$$(h_1 * y)H = yH$$

o de manera equivalente

$$y^{-1} * h_1 * y \in H$$

En resumen, para que lo anterior tenga sentido, debemos tener la propiedad

$$zH = Hz, \text{ para todo } z \in G$$

Definición 5.0.21. — Un subgrupo H de G con la propiedad que

$$zH = Hz, \text{ para todo } z \in G$$

es llamado un *subgrupo normal* de G .

Proposición 5.0.22. — Sea H un subgrupo normal de G . Entonces G/H resulta ser un grupo con la operación binaria Δ con la cual $\pi_H : G \rightarrow G/H$ es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es exactamente H . Este grupo cociente es también llamado el grupo de las clases laterales de H en G . Más aún, (i) si G es Abeliano, entonces G/H también es Abeliano; y (ii) si G es cíclico, entonces G/H también es cíclico.

Demonstración. — La asociatividad de \triangle es heredada por la de $*$. Por otro lado, $H\triangle H = H$ (H es la clase de I_G), lo cual nos está forzando a tomar H como elemento neutro $I_{G/H}$. Hasta ahora todo camina bien. Sea $xH \in G/H$ y tratemos de buscar un candidato para el inverso. Por la condición de hacer π_H de un homomorfismo, estamos obligados a tener

$$\pi_H(x^{-1}) = \pi_H(x)^{-1}$$

lo cual es equivalente a pedir que

$$(xH)^{-1} = x^{-1}H$$

Esta definición funciona correctamente y tenemos que G/H resulta ser un grupo con la operación binaria \triangle con la cual $\pi_H : G \rightarrow G/H$ es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es exactamente H .

La definición de la operación \triangle asegura que si $*$ es conmutativa, entonces también lo es \triangle . Por otro lado, si G es cíclico generado por x , entonces xH es generador de G/H . \square

Ejemplo 5.0.23. — Sea H un subgrupo de índice dos en un grupo G (con operación binaria de grupo dada por $*$). Entonces podemos escribir

$$G = H \cup xH = H \cup Hx$$

para cualquier $x \in G - H$, donde las uniones son disjuntas. Tomemos $g \in G$. entonces (i) $g \in H$, en cuyo caso $g * h * g^{-1} \in H$, para todo $h \in H$, o (ii) $g = x * h_1 = h_2 * x$, para ciertos $h_1, h_2 \in H$. Ahora, si $h \in H$, entonces $g * h * g^{-1} = x * h_1 * h * h_3^{-1} * x^{-1} = x * h_4 * x^{-1}$, donde $h_4 \in H$. Si tenemos $x * h_4 * x^{-1} \notin H$, entonces $x * h_4 * x^{-1} \in x * H$, lo cual dice que $h_4 * x^{-1} \in H$. Esto último asegura que $x \in H$, una contradicción. Hemos verificado el siguiente.

Proposición 5.0.24. — *Todo subgrupo de índice dos es necesariamente un subgrupo normal.*

Ejemplo 5.0.25. — Consideremos el grupo, con la regla de composición, de todos los difeomorfismos de \mathbb{R}^n . Sea H el subgrupo de los difeomorfismos con jacobiano positivo (difeomorfismos que preservan la orientación). Como el jacobiano de una composición es el producto de los respectivos jacobianos, tenemos entonces que H es un subgrupo de índice dos y luego un subgrupo normal.

Ejemplo 5.0.26. —

- (1) Si G es un grupo Abeliano, entonces todo subgrupo es necesariamente normal.

(2) Consideremos $X = \{1, 2, 3\}$ y $G = \text{Perm}(X)$. Tenemos que

$$A = \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \text{ y } B = \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{cases}$$

forman un conjunto de generadores de G (comparar con el ejemplo 1.2.2). Los subgrupos de G son, aparte del trivial $\{I_G\}$ y del total G , los subgrupos de orden dos $\langle B \rangle$, $\langle A \circ B \rangle$, $\langle A^2 \circ B \rangle$ y el grupo de orden tres $\langle A \rangle$, todos ellos cíclicos. Como $B \circ A \circ B = A^3$, tenemos que $\langle A \rangle$ es subgrupo normal de G . Pero $A \circ B \circ A^{-1} = A^2 \circ B$, $A \circ A \circ B \circ A^{-1} = A \circ B$ y $A \circ A^2 \circ B \circ A^{-1} = B$, tenemos que ninguno de los tres subgrupos de orden dos es subgrupo normal. Observemos también que $[G : \langle A \rangle] = 2$, luego $G/\langle A \rangle$ es un grupo de orden dos (luego cíclico).

Ejercicio 5.0.27. — Considere el grupo multiplicativo de las matrices reales de tamaño $n \times n$ y determinante no cero (es decir, la invertibles). Calcular todos su subgrupos normales.

Ejemplo 5.0.28. — Consideremos el grupo aditivo \mathbb{Z} y sea $n \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$. Entonces se tiene que $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de \mathbb{Z} y, como este es Abeliano, es también subgrupo normal. Se tiene que $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$ y, como consecuencia,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

es un grupo Abeliano de orden n , llamado el *grupo de las clases residuales de orden n* . Este es un grupo cíclico de orden n (luego todo grupo cíclico de orden n es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Como consecuencia, el grupo de Klein es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, con la operación binaria componente a componente.

Ejemplo 5.0.29. — Volvamos al grupo de automorfismos de un grupo G , $\text{Aut}(G)$. Ya habíamos definido el subgrupo de $\text{Aut}(G)$ dado por los automorfismos interiores, $\text{Int}(G)$. Para cada $g \in G$, tenemos el automorfismo interior $\phi_g : G \rightarrow G$, definido por $\phi_g(h) = g * h * g^{-1}$. Sea $T \in \text{Aut}(G)$. Entonces,

$$T \circ \phi_g \circ T^{-1} = \phi_{T(g)}$$

obteniendo que $\text{Int}(G)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$. El grupo cociente

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$$

es llamado el *grupo de automorfismos exteriores* de G . Así, si G es un grupo Abeliano, entonces $\text{Aut}(G) = \text{Out}(G)$.

Ejercicio 5.0.30. — Calcular $\text{Out}(\text{Perm}(X))$ para X como en el ejemplo 1.2.2.

Proposición 5.0.31. — Consideremos un homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow K$, donde $(G, *)$ y (K, \cdot) son ciertos grupos. Entonces tenemos que $\text{Ker}(\phi)$ es un subgrupo normal de G . De hecho, si U es un subgrupo normal del grupo $\phi(G)$, entonces $\phi^{-1}(U)$ es subgrupo normal de G . Recíprocamente, si H es un subgrupo normal de G , entonces $\phi(H)$ es un subgrupo normal de $\phi(G)$.

Demonstración. — (i) Sea $h \in \text{Ker}(\phi)$ y $g \in G$. Entonces

$$\phi(g * h * g^{-1}) = \phi(g) \cdot \phi(h) \cdot \phi(g)^{-1} = I_K$$

(ii) Sea U subgrupo normal de $\phi(G)$, entonces sabemos que $\phi^{-1}(U)$ es un subgrupo de G . Por otro lado, si $h \in \phi^{-1}(U)$ y $g \in G$, entonces $\phi(g * h * g^{-1}) = \phi(g) \cdot \phi(h) \cdot \phi(g)^{-1} \in U$, obteniendo la normalidad de $\phi^{-1}(U)$. (iii) Sea H un subgrupo normal de G . Ya sabemos que $\phi(H)$ es un subgrupo de $\phi(G)$. Ahora, si tomamos $t \in \phi(G)$ y $k \in \phi(H)$, entonces existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $\phi(g) = t$ y $\phi(h) = k$. Luego $t \cdot k \cdot t^{-1} = \phi(g) \cdot \phi(h) \cdot \phi(g)^{-1} = \phi(g * h * g^{-1}) \in \phi(H)$. □

El resultado anterior nos permite considerar el grupo cociente $G/\text{Ker}(\phi)$ para cada homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow K$. Podemos entonces definir la nueva función $\hat{\phi} : G/\text{Ker}(\phi) \rightarrow K$ como

$$\hat{\phi}(x\text{Ker}(\phi)) = \phi(x)$$

Proposición 5.0.32 (Primer teorema del isomorfismo). —

La función $\hat{\phi} : G/\text{Ker}(\phi) \rightarrow K$ está bien definida y es un monomorfismo.

Demonstración. — Para ver que está bien definida basta ver que si $x \in G$ y $h \in \text{Ker}(\phi)$ entonces $\phi(x * h) = \phi(x)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x\text{Ker}(\phi)\Delta x\text{Ker}(\phi)) &= \hat{\phi}((x * y)\text{Ker}(\phi)) = \phi(x * y) = \\ &= \phi(x) \cdot \phi(y) = \hat{\phi}(x\text{Ker}(\phi)) \cdot \hat{\phi}(y\text{Ker}(\phi)) \end{aligned}$$

□

Corolario 5.0.33. — La función $\hat{\phi} : G/\text{Ker}(\phi) \rightarrow \phi(G)$ es un isomorfismo. En particular ; si G tiene orden finito, entonces tenemos que $|\phi(G)| = [G : \text{Ker}(\phi)]$.

Ejemplo 5.0.34. — Sean $\phi : G \rightarrow K$ un homomorfismo de grupos y H un subgrupo de G . Podemos restringir nuestro homomorfismo a H , $\phi|_H : H \rightarrow K$. Ahora, $\text{Ker}(\phi|_H) = \text{Ker}(\phi) \cap H$. Luego tenemos un isomorfismo entre $\phi(H)$ y $G/(H \cap \text{Ker}(\phi))$.

Como consecuencia de esto es que si H es además un subgrupo normal de G , entonces usando $K = G/H$, tenemos una biyección, dada por $\phi = \pi_H$, entre los subgrupos (normales) de G/H y los subgrupos (normales) de G que contienen a H .

Para nuestro siguiente ejemplo necesitaremos el subgrupo generado por la unión de dos subgrupos, lo cual pasamos a mirar inmediatamente. Supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ y dos subgrupos de este, digamos H y K . Podemos entonces mirar el subgrupo de G generado por H y K , es decir, $\langle H \cup K \rangle$. Es claro que

$$HK = \{h * k : h \in H, k \in K\} \subset \langle H \cup K \rangle$$

Luego, la igualdad $\langle H \cup K \rangle = HK$ es cierta sí y sólo si HK es un subgrupo de G . El siguiente resultado nos permite ver cuando ocurre esta situación.

Proposición 5.0.35. — HK es subgrupo de G sí y sólo si $HK = KH$.

Demonstración. — Supongamos que HK es un subgrupo de G . En tal caso consideremos un elemento $h * k \in HK$. Tenemos que su inverso $(h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1}$ pertenece a KH . Como todo elemento de HK (por ser subgrupo) es inverso de alguno de sus otros elementos, tenemos la contención $HK \subset KH$. Por otro lado, dado $k * h \in KH$, entonces $h^{-1} * k^{-1} \in HK$. Al ser HK subgrupo tenemos que este debe contener al inverso, es decir $k * h \in HK$, obteniendo la contención $KH \subset HK$.

Veamos ahora el recíproco y supongamos la igualdad $HK = KH$. Sean $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in HK$. Luego $(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2) = h_1 * (k_1 * h_2) * k_2$. Pero la igualdad $HK = KH$ asegura que $k_1 * h_2 = h_3 * k_3$, así, $(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2) = (h_1 * h_3) * (k_3 * k_2) \in HK$. También, si $h * k \in HK$, entonces $(h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} \in KH = HK$. Como consecuencia, HK es un subgrupo de G . \square

Observación 5.0.36. — Si tenemos H, K subgrupos de G y uno de ellos es un subgrupo normal, entonces la condición $HK = KH$ vale trivialmente. Más aún, si ambos son subgrupos normales, entonces HK también lo es.

Ejercicio 5.0.37. — Verificar la observación anterior.

Suponiendo que G es un grupo de orden finito, tenemos que HK (independiente de ser o no un subgrupo) tiene una cardinalidad finita. Para ver que valor tiene esta, consideremos la función

$$F : H \times K \rightarrow HK : (h, k) \mapsto h * k$$

Por la definición de HK , F es una función sobreyectiva. También sabemos que $|H \times K| = |H||K|$. Por otro lado, si $\alpha \in HK$, entonces

$$F^{-1}(\alpha) = \{(h, k) \in H \times K : h * k = \alpha\}$$

Ahora, si $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in F^{-1}(\alpha)$, entonces $h_1 * k_1 = h_2 * k_2$, lo cual asegura que $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1} = x \in H \cap K$. Entonces $h_2 = h_1 * x^{-1}$, $k_2 = x * k_1$. En forma recíproca, si $x \in H \cap K$ y $(h, k) \in F^{-1}(\alpha)$, entonces $F(h * x^{-1}, x * k) = \alpha$. Como

consecuencia, $\#F^{-1}(\alpha) = |H \cap K|$. De esta manera, como preimágenes de valores diferentes son disjuntos y la unión de todas la preimágenes es $H \times K$, obtenemos

$$\#HK = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

Ejemplo 5.0.38 (Segundo Teorema del isomorfismo). — Sean $(G, *)$ un grupo, H, K subgrupos de G y supongamos que H es además subgrupo normal de G . De esta manera nos aseguramos que HK es subgrupo de G . Como H es también subgrupo de HK , tenemos que H es subgrupo normal de HK . Consideremos la proyección $\pi : HK \rightarrow HK/H : x \mapsto xH$. Consideremos las restricción a K , es decir, $\pi|_K : K \rightarrow HK/H$. Tenemos que $\text{Ker}(\pi|_K) = K \cap H$. Veamos ahora que $\pi|_K$ es sobreyectiva. En efecto, si $z = (h * k)H \in HK/H$, entonces como $HK = KH$, tenemos que $h * k = k_1 * h_1$ y luego $\pi|_K(k_1) = z$. En consecuencia, tenemos un isomorfismo

$$\frac{K}{K \cap H} \cong \frac{HK}{H}$$

Ejemplo 5.0.39 (Tercer Teorema del isomorfismo). — Consideremos un grupo $(G, *)$ y dos subgrupos normales de G , digamos K y H , tales que $K < H$. Consideremos la función

$$\phi : G/K \rightarrow G/H : gK \mapsto gH$$

Entonces ϕ resulta ser un homomorfismo sobreyectivo. Por otro lado,

$$\text{Ker}(\phi) = \{gK : g \in H\} = H/K$$

es decir

$$G/H \cong (G/K)/(H/K)$$

Ejemplo 5.0.40. — Consideremos un grupo finito $(G, *)$ y H un subgrupo normal de G tal que $([G : H], |H|) = 1$, es decir, $[G : H]$ y $|H|$ son relativamente primos. Veamos que no existe otro subgrupo de G del mismo orden que H . En efecto, supongamos que existe K subgrupo (no necesariamente normal) de G tal que $|K| = |H|$. Tomemos el homomorfismo $\phi : K \rightarrow G/H : k \mapsto kH$. Entonces, $\text{Ker}(\phi) = K \cap H$ y $K/(K \cap H) \cong \phi(K)$. En particular, $[K : K \cap H]$ divide $[G : H]$, por el teorema de Lagrange, es decir,

$$[G : H] = [K : K \cap H]M = |K|R$$

para ciertos enteros positivos M, R . Esto dice que $|H| = |K|$ divide $[G : H]$, una contradicción a menos que $K = H$.

Ejercicio 5.0.41. —

- (i) Sea $(G, *)$ un grupo y sean H, K dos subgrupos de G . Suponga que $[G : H] < \infty$ y $[G : K] < \infty$. Verificar que $[G : H \cap K] < \infty$

- (ii) Sea S^1 el grupo multiplicativo de los números complejos de valor absoluto 1 con la operación usual de producto. Consideremos el grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ y su subgrupo normal \mathbb{Z} . Verificar que el siguiente es un isomorfismo de grupos

$$P : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 : x\mathbb{Z} \rightarrow e^{2x\pi i}$$

- (iii) Sea $(G, *)$ un grupo y sea $H = \langle x^2 : x \in G \rangle$. Verificar que H es subgrupo normal de G y que el grupo cociente G/H es un grupo Abeliano.
- (iv) Sea $(G, *)$ un grupo y sea $n > 1$ un entero positivo fijo. Supongamos que para todo $x, y \in G$ vale la igualdad $(x * y)^n = x^n * y^n$. Defina

$$G_n = \langle x : o(x) = n \rangle$$

$$G^n = \langle x^n : x \in G \rangle$$

Verificar que ambos son grupos normales de G y que $G/G_n \cong G^n$ (Ind. Utilizar el homomorfismo $\phi : G \rightarrow G^n : x \mapsto x^n$).

CAPÍTULO 6

ALGUNOS SUBGRUPOS NORMALES Y ABELIANIZACIÓN DE GRUPOS

Dado un grupo $(G, *)$, existe la posibilidad que este sea Abeliano, pero en general no es así. La condición de ser Abeliano es equivalente a que la ecuación

$$[x : y] = x * y * x^{-1} * y^{-1} = I_G$$

sea siempre válida para cualquier $x, y \in G$.

Definición 6.0.42. — Cada expresión

$$[x : y] = x * y * x^{-1} * y^{-1}$$

es llamada un *conmutador* de x e y . Denotamos por $[G, G]$ al subgrupo de G generado por todos los conmutadores.

Ejercicio 6.0.43. — Sea $(G, *)$ un grupo. Verificar que

$$[G, G] = \{x_1 * x_2 * \cdots * x_n * x_1^{-1} * x_2^{-1} * \cdots * x_n^{-1} : x_j \in G, n \geq 2\}$$

y concluir que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G .

$$\begin{aligned} & (\text{Ind. } (a * b * a^{-1} * b^{-1}) * (c * d * c^{-1} * d^{-1}) = \\ & a * (b * a^{-1}) * b^{-1} * c * (d * c^{-1}) * d^{-1} * a^{-1} * (a * b^{-1}) * b * c^{-1} * (c * d^{-1}) * d) \end{aligned}$$

Proposición 6.0.44. — *La intersección arbitraria de subgrupos normales de un grupo $(G, *)$ es un subgrupo normal.*

Demonstración. — Sean $\{H_j : j \in J\}$ una colección de subgrupos normales de G . Ya habíamos verificado que la intersección de estos subgrupos es un subgrupo de G . Ahora sólo necesitamos verificar la normalidad. Sea $g \in G$ y $h \in H = \bigcap_{j \in J} H_j$. Entonces, $h \in H_j$, para cada $j \in J$. Como H_j es subgrupo normal, tenemos que $g * h * g^{-1} \in H_j$, para cada $j \in J$ y, como consecuencia, $g * h * g^{-1} \in H$. \square

Observemos que si G es Abeliano, entonces $[G, G] = \{I_G\}$. Recíprocamente, $[G, G] = \{I_G\}$ asegura que $[x : y] = I_G$ siempre vale para cualquier $x, y \in G$, obteniendo que G es Abeliano. Es decir, tenemos que

Proposición 6.0.45. — *Un grupo $(G, *)$ es Abeliano sí y sólo si $[G, G] = \{I_G\}$.*

Luego, si $(G, *)$ no es un grupo Abeliano, entonces $[G, G] \neq \{I_G\}$ nos dá un subgrupo normal no trivial de G . La normalidad de $[G, G]$ nos permite mirar el grupo

$$G^{abel} = G/[G, G]$$

el cual es llamado la *abelianización* de G .

Proposición 6.0.46. — *El grupo cociente G^{abel} es un grupo Abeliano.*

Demonstración. — sean $x[G, G], y[G, G] \in G^{abel}$. Luego,

$$\begin{aligned} [x[G, G] : y[G, G]] &= x[G, G] \Delta y[G, G] \Delta (x[G, G])^{-1} \Delta (y[G, G])^{-1} = \\ &= x[G, G] \Delta y[G, G] \Delta x^{-1}[G, G] \Delta y^{-1}[G, G] = (x * y * x^{-1} * y^{-1})[G, G] = \\ &= [G, G] \end{aligned}$$

□

Definición 6.0.47. — Otro de los subgrupos de $(G, *)$ que mide la cercanía de G a ser Abeliano es el siguiente :

$$Z(G) = \{g \in G : [g, x] = I_G \text{ para todo } x \in G\}$$

llamado el *centralizador* de G . También podemos hablar del *centralizador de un elemento* g del grupo G que está definido por

$$Z(G; g) = \{x \in G : g * x = x * g\}$$

Ejercicio 6.0.48. — Verificar que $Z(G; g)$ es un subgrupo de G y que $Z(G; g) = G$ sí y sólo si $g \in Z(G)$.

Proposición 6.0.49. — *$Z(G)$ es siempre un subgrupo normal de G .*

Demonstración. — Es claro que $I_G \in Z(G)$, luego $Z(G) \neq \emptyset$. Sean $x, y \in Z(G)$, entonces $[x, w] = [w, x] = [y, w] = [w, y] = I_G$, vale para cada $w \in G$. Pero, para cada $w \in G$, tenemos que $x * [x^{-1} : w] * X^{-1} = [w, x] = I_G$ asegurando que $[x^{-1} : w] = I_G$ y, como consecuencia, $x^{-1} \in Z(G)$. También, para cada $w \in G$, tenemos que $[x * y, w] = [x, w] = I_G$ y, como consecuencia, $x * y \in Z(G)$. Hemos verificado que $Z(G)$ es un subgrupo de G .

Sea $g \in G, x \in Z(G)$. entonces $[g * x * g^{-1}, y] = g * x * g^{-1} * y * g * x^{-1} * g^{-1} * y^{-1}$. Pero $x \in Z(G)$ dice que x conmuta con cada elemento de G , luego $[g * x * g^{-1}, y] = I_G$, es decir, $g * x * g^{-1} \in Z(G)$, con lo cual obtenemos la normalidad de $Z(G)$ en G . \square

Observemos que si G es Abeliano, entonces $Z(G) = G$. Recíprocamente, si $Z(G) = G$, entonces $[y, x] = I_G$ es válido para todo $x, y \in G$, es decir, G es Abeliano; luego tenemos el siguiente.

Proposición 6.0.50. — Un grupo $(G, *)$ es Abeliano sí y sólo si $Z(G) = G$.

Proposición 6.0.51. — Si $(G, *)$ no es un grupo Abeliano, entonces $G/Z(G)$ no puede ser un grupo cíclico. En particular, $[G : Z(G)]$ no puede ser un primo.

Demonstración. — Sea $(G, *)$ un grupo que no es Abeliano, es decir $G \neq Z(G)$. Supongamos por el contrario que $G/Z(G)$ es un grupo cíclico. Podemos escoger $u \in G - Z(G)$ tal que $uZ(G)$ genera $G/Z(G)$. Tomemos un elemento $x \in G - Z(G)$. Existe $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que $xZ(G) = u^a Z(G)$. Para cada $y \in Z(G)$ tenemos $[x : y] = I_G$. Para $y \in G - Z(G)$ tenemos que $yZ(G) = u^b Z(G)$, para cierto $b \in \{1, \dots, p-1\}$. Esto nos dice que podemos encontrar $z, w \in Z(G)$ tales que $x = u^a * z, y = u^b * w$. En particular,

$$\begin{aligned} [x : y] &= (u^a * z) * (u^b * w) * (u^a * z)^{-1} * (u^b * w)^{-1} = \\ &= u^a * z * u^b * w * z^{-1} * u^{-a} * w^{-1} * u^{-b} = u^{a+b-a-b} = I_G \end{aligned}$$

Como consecuencia, $x \in Z(G)$, una contradicción. \square

Proposición 6.0.52. — Sea G un grupo finito y $x_1, x_2 \in G$ elementos de orden 2 tales que $x_1 * x_2$ tiene orden n . Entonces $Z(G; x_j)$ tiene orden a lo más $2|G|/n$, para $j = 1, 2$.

Demonstración. — Sea H el subgrupo de G generado por x_1 y x_2 . Denotemos por D_n el grupo dihedral de orden $2n$ generado por a y b , con las relaciones

$$a^n = b^2 = (ab)^2 = 1$$

Entonces tenemos un homomorfismo sobreyectivo $\phi : D_n \rightarrow H$, definido por $\phi(b) = x_1$ y $\phi(a) = x_2 * x_1$. Ahora, el núcleo de ϕ es un subgrupo normal de D_n . Pero los únicos subgrupos normales de D_n son los subgrupos triviales $\{1\}, D_n$ y los subgrupos cíclicos generados por una potencia no trivial de a . Los últimos dos casos obligarán tener que el cociente $D_n/Ker(\phi) \cong H$ es trivial ó el elemento a se proyecta a un elemento de orden menor a n , una contradicción. Luego $\phi : D_n \rightarrow H$ es un isomorfismo. Ahora, se puede verificar que $Z(H; x_j)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n es impar ó bien isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n es par. En cualquier caso, el orden de $Z(H; x_j)$ es a lo más 4.

Consideremos una descomposición en clases laterales izquierda de G por H , es decir

$$G = H * z_1 \cup H * z_2 \cup H * z_3 \cup \dots \cup H * z_n$$

donde $n = [G : H]$ y $z_1 = I_G$. Tenemos que $Z(G; x_j) \cap H = Z(H; x_j)$. Supongamos que tenemos dos elementos de $Z(G; x_j)$ en la misma $H * z_l$, digamos $g_1 = h_1 * z_l$, $g_2 = h_2 * z_l \in Z(G; x_j)$. Entonces $h_1 * h_2^{-1} = g_1 * g_2^{-1} \in H \cap Z(G; x_j) = Z(H; x_j)$. Luego el orden de $Z(G; x_j) \cap H * z_l$ es el mismo orden de $Z(H; x_j)$. Como tenemos la descomposición disjunta

$$Z(G; x_j) = (Z(G; x_j) \cap H) \cup (Z(G; x_j) \cap H * z_2) \cup \cdots \cup (Z(G; x_j) \cap H * z_n),$$

tenemos de lo anterior que el orden de $Z(G; x_j)$ es igual a $[G : H]$ veces el orden de $Z(H; x_j)$, es decir a lo más $4|G|/|H| = 2|G|/n$. \square

Ejemplo 6.0.53. — Consideremos un grupo $(G, *)$ y denotemos por G_{tor} el subgrupo generado por todos los elementos de orden finito de G . Si h tiene orden finito y $g \in G$, entonces $g * h * g^{-1}$ tiene el mismo orden finito que h . Como los elementos de G_{tor} son de la forma $x_1 * x_2 * \cdots * x_n$, donde $x_j \in G$ tienen orden finito, obtenemos que G_{tor} es un subgrupo normal de G . Es claro que si G es de orden finito, entonces $G = G_{tor}$. Podemos tener grupos G de orden infinito con $G = G_{tor}$, por ejemplo, considere G el grupo generado por las reflexiones de Möbius $A(z) = -\bar{z}$ y $B(z) = -\bar{z} + 1$. Este grupo contiene a la translación $B \circ A(z) = z + 1$ y luego G es infinito. Por otro lado, $A, B \in G_{tor}$ asegura que $G = G_{tor}$. De manera más general, si G puede ser generado por elementos de ordenes finito, entonces $G = G_{tor}$. Si G no contiene elementos de orden finito diferentes del neutro, entonces $G_{tor} = \{I_G\}$. Un grupo que tiene la propiedad que sus elementos diferentes de la identidad no tienen orden finito, es decir, $G_{tor} = \{I_G\}$ son llamados *grupos sin torsión*.

Dado un subgrupo H de un grupo dado $(G, *)$, lo más probable que ocurra es que H no sea un subgrupo normal de G . Una de las cosas que podemos hacer es considerar el subgrupo normal más pequeño de G que contenga a H ,

$$\langle\langle H \rangle\rangle$$

el cual resulta ser la intersección de todos los subgrupos normales de G que contienen a H . Tal colección sobre la que hacemos la intersección no es vacía ya que G pertenece trivialmente a esta. Llamamos a tal subgrupo normal la *cápsula normal* del subgrupo H . El siguiente es claro por la definición.

Proposición 6.0.54. — $H = \langle\langle H \rangle\rangle$ sí y sólo si H es subgrupo normal de G .

Otra cosa que podemos hacer es considerar el *normalizador* de H , definido por

$$N_G(H) = \{g \in G : g * H * g^{-1} = H\}$$

Puede ocurrir que $N_G(H)$ no sea un subgrupo normal de G . Es claro que cada $h \in H$ debe pertenecer a $N_G(H)$, ya que si $t \in H$, entonces $h^{-1} * t * h \in H$ y luego $h * (h^{-1} * t * h) * h^{-1} = t$. De esta manera, H es un subgrupo de $N_G(H)$. Como cada elemento de $N_G(H)$ tiene la propiedad de conjugar H en si mismo, obtenemos que :

Proposición 6.0.55. — *H es subgrupo normal de $N_G(H)$.*

CAPÍTULO 7

PRODUCTOS DE GRUPOS

7.1. Producto Directo de Grupos

Una de las maneras de producir nuevos grupos a partir de algunos dados es por medio del producto directo. Sea $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$ una colección no vacía de grupos (finita o infinita). Formemos el producto cartesiano

$$\prod_{j \in J} G_j = \{f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j : f(j) \in G_j\}$$

La operación binaria es dada por

$$f * g(j) = f_j *_j g_j$$

Proposición 7.1.1. — La operación binaria así definida define en $\prod_{j \in J} G_j$ una estructura de grupo, llamado el producto directo de los grupos G_j , $j \in J$.

Demonstración. — La asociatividad es equivalente a la asociatividad coordinada a coordenada. El neutro es dado por I , donde $I(j) = I_{G_j}$. El inverso de cada $f \in \prod_{j \in J} G_j$ es dado por $f^{-1}(j) = f_j^{-1}$. \square

Observación 7.1.2. — Cuando cada grupo G_j es un grupo Abeliano, usualmente hablamos de la en vez del producto directo y se acostumbra a denotarlo por

$$\bigoplus_{j \in J} G_j$$

Ejercicio 7.1.3. — Supongamos que G_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ son n grupos finitos. Verificar que $|\prod_{j=1}^n G_j| = \prod_{j=1}^n |G_j|$.

Por cada $k \in J$ tenemos de manera natural la inclusión

$$i_k : G_k \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$$

definido por

$$i_k(x) : J \rightarrow \prod_{j \in J} G_j : j \mapsto \begin{cases} I_{G_j} & j \neq k \\ x & j = k \end{cases}$$

Ejercicio 7.1.4. — Verificar que $i_k : G_k \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$ es un monomorfismo, con lo cual podemos mirar cada G_k como subgrupo de su producto directo.

Proposición 7.1.5. — Consideremos dos grupos cíclicos $(H, *)$ y (K, \cdot) de ordenes p y q , respectivamente. Supongamos que p y q son relativamente primos, es decir el único factor positivo entero común es 1. Entonces el producto directo $H \times K$ es un grupo cíclico de orden pq .

Demonstración. — Consideremos dos números enteros positivos p, q que sean relativamente primos, es decir no hay factores positivos comunes diferentes de 1. Sea (Z, \diamond) un grupo cíclico de orden pq . Sean x, y y w generadores de H, K y Z , respectivamente. Consideremos la función

$$\phi : H \times K \rightarrow Z : (x^a, y^b) \mapsto w^{aq+bp}$$

Este es claramente un homomorfismo de grupos. Por otro lado, si $\phi(x^a, y^b) = I_Z$, entonces $aq + bp \equiv 0$ módulo pq . Luego, p/aq y q/bp y, como p y q son relativamente primos, tenemos que p/a y q/b , es decir, $x^a = I_H$ y también $y^b = I_K$. De esta manera obtenemos que ϕ es un monomorfismo. Como la cardinalidad de $H \times K$ y Z es la misma, pq , tenemos gratis la sobreyectividad y luego el isomorfismo deseado. \square

7.2. Producto Débil de Grupos

Al igual que en la sección anterior, consideremos una colección de grupos $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$ y consideremos su producto directo $\prod_{j \in J} G_j$. El subconjunto

$$\prod_{j \in J}^{debil} G_j$$

de $\prod_{j \in J} G_j$ definido por aquellas funciones $f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j$ tales que $f(j) \in G_j$, para cada $j \in J$ y $f(j) = I_{G_j}$ con la posible excepción de un número finito de valores de j , resulta ser un subgrupo, llamado el *producto débil* de los grupos $G_j, j \in J$. Observemos que si $\#J < \infty$, entonces el producto directo y el producto débil coinciden.

Ejercicio 7.2.1. — Verificar que $\prod_{j \in J}^{debil} G_j$ es en efecto un subgrupo de $\prod_{j \in J} G_j$.

Ejemplo 7.2.2. — Los productos débiles de grupos Abelianos tienen cierta propiedad universal que pasamos a ver. Supongamos que tenemos una colección de grupos Abelianos $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$ y consideremos su producto débil $G = \prod_{j \in J} G_j$. Es claro que G (de hecho el producto directo) es un grupo Abeliano. Supongamos que tenemos un grupo Abeliano K y una colección de homomorfismos $\phi_j : G_j \rightarrow K$, para cada $j \in J$. Por cada $f \in \prod_{j \in J}^{debil} G_j$ podemos considerar el producto $h(f) = \prod_{j \in J} \phi_j(f(j))$ (el producto en la operación binaria de K), el cual tiene sentido ya que, excepto por un número finito de índices $j \in J$, vale que $\phi_j(f(j)) = I_K$, y los grupos involucrados al ser Abelianos no importa el orden para el producto. Se puede verificar que $h : G \rightarrow K$ es un homomorfismo que satisface $h \circ i_j = \phi_j$, para todo $j \in J$.

Ejercicio 7.2.3. — Completar los detalles del ejemplo anterior y deducir que $h : G \rightarrow K$ es único con la propiedad de ser homomorfismo y $h \circ i_j = \phi_j$, para todo $j \in J$.

7.3. Producto Directo Interno

Supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ y una colección de subgrupos $\{H_j : j = 1, 2, \dots, n\}$. Diremos que G es *producto directo interno* de los subgrupos H_j , $j = 1, 2, \dots, n$, si

$$\phi : \prod_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} H_j \rightarrow G : f \mapsto \prod_{j=1}^n f(j) = f(1) * f(2) * \dots * f(n)$$

resulta ser un isomorfismo. De esta definición es claro que cada elemento $g \in G$ se puede escribir de manera única como $g = h_1 * h_2 * \dots * h_n$, donde $h_j \in H_j$.

7.4. Producto Semidirecto de Grupos

Consideremos dos grupos $(H, *)$, (K, \circ) y un homomorfismo de grupos $\phi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$. El conjunto $K \times H$ junto con la operación binaria

$$(k_1, h_1) \cdot_{\phi} (k_2, h_2) = (k_1 \circ k_2, h_1 * \phi(k_1)(h_2))$$

resulta ser un grupo llamado el *producto semidirecto* de los grupos K y H el cual denotamos por $G = K \rtimes H$. En este caso, el elemento neutro es dado por $(1_K, 1_H)$, donde 1_K y 1_H denotan los elementos neutros de K y H , respectivamente. El elemento inverso de (k, h) es dado por $(k^{-1}, \phi(k^{-1})(h^{-1}))$. Observemos también que $\{1_K\} \times H$ y $K \times \{1_H\}$ resultan ser subgrupos de $K \rtimes H$ y se tiene que las inclusiones

$$j_H : H \rightarrow \{1_K\} \times H : h \mapsto (1_K, h)$$

$$j_K : K \rightarrow K \times \{1_H\} : k \mapsto (k, 1_H)$$

resultan ser isomorfismos. Más aún, el subgrupo $j_H(H) = \{1_K\} \times H$ resulta ser un subgrupo normal de $K \rtimes H$.

Ejercicio 7.4.1. — Verificar que

- (i) la operación binaria \cdot_ϕ define una estructura de grupo ;
- (ii) las funciones j_H y j_K son efectivamente isomorfismos ;
- (iii) $j_H(H)$ es subgrupo normal de $K \rtimes H$.

Ejemplo 7.4.2. — Supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ que contenga dos subgrupos H y K , donde H es normal en G , $H \cap K = \{1_G\}$ y $G = HK$. Consideremos el homomorfismo de grupos $\phi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ donde $\phi(k)(h) = k * h * k^{-1}$ y formemos el producto semidirecto $K \rtimes H$. Tenemos que $\phi : K \rtimes H \rightarrow G : (k, h) \rightarrow k * h$ resulta ser un isomorfismo de grupos. Diremos que G es el *producto semidirecto interno* de K y G .

Ejercicio 7.4.3. —

- (1) Completar los detalles del ejemplo anterior.
- (2) Sean G un grupo abeliano, H y K subgrupos de G tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{1_G\}$. Verificar que $G \cong H \times K$.
- (3) Sea G un grupo, $H, K < G$ tales que $H \triangleleft G$ y $HK = G$. Verificar que $\psi : K \rtimes H \rightarrow G : (k, h) \mapsto kh$ define un isomorfismo.
- (4) Sean H, G, K grupos, $i : H \rightarrow G$, $\pi : G \rightarrow K$, $\tau : K \rightarrow G$ homomorfismos de grupos tales que :
 - (i) i es inyectivo ;
 - (ii) π es sobreyectivo ;
 - (iii) $i(H) = \text{Ker}(\pi)$;
 - (iv) $\pi \circ \tau = I_K$.

Las condiciones (i), (ii) y (iii) dicen que la sucesión corta siguiente es exacta.

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$$

Verificar que $\psi : K \rtimes H \rightarrow G : (k, h) \mapsto \tau(k)h$ define un isomorfismo.

CAPÍTULO 8

PRODUCTO LIBRE DE GRUPOS

Ahora procederemos a generar un nuevo grupo a partir de unos ya dados, pero de manera de no producir nuevas relaciones entre los elementos. En el caso de productos directos o débiles, por ejemplo, cuando los grupos involucrados son Abelianos, el resultado nos da un grupo Abeliano, es decir hay más relaciones que las originales (sólo valían en cada grupo).

Nuevamente, consideremos una colección no vacía de grupos $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$. Definimos una *palabra reducida* (en estos grupos) de *longitud* $n > 0$ a una sucesión finita (x_1, \dots, x_n) , donde cada x_j pertenece a alguno de nuestros grupos y tienen las siguientes dos propiedades :

- (i) ningún x_j es el neutro del grupo a cual pertenece ; y
- (ii) dos términos consecutivos no pertenecen al mismo grupo.

Denotaremos por 1 la palabra de longitud 0 (usualmente llamada la palabra vacía). Sea G la colección de tales palabras. Ahora procederemos a construir una operación \cdot binaria sobre este conjunto.

$$1 \cdot 1 := 1$$

$$1 \cdot (x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot 1 := (x_1, \dots, x_n)$$

Ahora supongamos que tenemos dos palabras de longitudes positivas, digamos (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_m) . Queremos definir

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m)$$

Caso 1 : Si x_n y y_1 no pertenecen al mismo grupo, entonces definimos

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

Caso 2 : Si x_n y y_1 pertenecen al mismo grupo G_j , pero $x_n *_j y_1 \neq I_{G_j}$, entonces definimos

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n *_j y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Caso 3 : Si x_n y y_1 pertenecen al mismo grupo G_j , $x_n * y_1 = I_{G_j}$, entonces exigimos, siguiendo las definiciones anteriores,

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot (y_2, \dots, y_m)$$

La operación binaria que hemos definido recibe también el nombre de *yuxtaposición*. Observemos que la operación binaria es asociativa por definición, 1 es neutro y cada palabra reducida (x_1, \dots, x_n) tiene como inversa (respecto a esta operación) a la palabra reducida $(x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})$.

Definición 8.0.4. — Al grupo obtenido de esta manera es llamado el *producto libre* de los grupos $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$.

Notación. Desde ahora en adelante identificaremos cada palabra reducida (x_1, \dots, x_n) , de longitud $n > 0$, con $x_1 x_2 \cdots x_n$ (es decir, no haremos uso del símbolo “ \cdot ” ni de los paréntesis).

Observación 8.0.5. — Cuando tenemos un número finito de grupos, G_1, \dots, G_n , entonces se estila usar la notación

$$G_1 * G_2 * \cdots * G_n$$

para denotar su producto libre. Observemos que la definición del producto libre no depende de ningún orden en los grupos factores, es decir, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, entonces

$$G_1 * G_2 * \cdots * G_n = G_{\sigma(1)} * G_{\sigma(2)} * \cdots * G_{\sigma(n)}$$

De manera análoga, para el producto libre arbitrario denotamos este por $\prod_{j \in J} * G_j$.

Ejemplo 8.0.6. — Consideremos $G_1 = \{I_1, x\}$ (es decir, un grupo de orden 2, luego $x^2 = I_1$) y $G_2 = \{I_2, y, y^2\}$ (es decir, un grupo de orden 3, luego $y^3 = I_2$). Entonces una lista de algunas de las palabras reducidas de $G_1 * G_2$ son las siguientes :

Longitud 0 : 1

Longitud 1 : $x, y, y^2 = y^{-1}$

Longitud 2 : xy, xy^2, yx, y^2x

Una propiedad universal del producto libre de grupos es el siguiente. Consideremos una colección de grupos $\{(G_j, *_j) : j \in J\}$ y su producto libre de grupos $\prod_{j \in J} * G_j$. Entonces, por cada $k \in J$ tenemos naturalmente un monomorfismo $i_k : G_k \rightarrow \prod_{j \in J} * G_j$ (a cada $x \in G_k - \{I_{G_k}\}$ le asigna la palabra x de longitud 1, y a I_{G_k} le asigna 1). Sea (K, \circ) un grupo y supongamos que tenemos homomorfismos $\phi_j : G_j \rightarrow K$, para cada $j \in J$. Definamos la función $h : \prod_{j \in J} * G_j \rightarrow K$ de la siguiente manera. $h(1) = I_K$, y si $x_1 x_2 \cdots x_n$ es una palabra reducida de longitud $n > 0$, donde $x_r \in G_{j_r}$, entonces $h(x_1 x_2 \cdots x_n) = \phi_{j_1}(x_1) \circ \phi_{j_2}(x_2) \circ \cdots \circ \phi_{j_n}(x_n)$. Resulta que h es un homomorfismo que satisface que $h \circ i_j = \phi_j$, para cada $j \in J$.

Ejercicio 8.0.7. — Verificar que h es en efecto un homomorfismo de grupos y que está únicamente definido por la condición $h \circ i_j = \phi_j$, para cada $j \in J$.

Ejemplo 8.0.8. — Consideremos un espacio topológico (X, τ) arco-conexo y localmente arco-conexo. Sean A, B abiertos arconexos tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B$ sea arco-conexo y simplemente conexo. Entonces, si $p \in A \cap B$, tenemos que

$$\pi_1(X, p) = \pi_1(A, p) * \pi_1(B, p)$$

CAPÍTULO 9

PRODUCTO LIBRE AMALGAMADO

Consideremos dos grupos $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ y subgrupos $H_j < G_j$, para $j = 1, 2$. Supongamos que tenemos un isomorfismo de grupos

$$\phi : H_1 \rightarrow H_2$$

En el producto libre $G_1 * G_2$ consideremos el subgrupo normal más pequeño K que contenga todas las palabras de la forma

$$h^{-1}\phi(h), \text{ donde } h \in H_1$$

Definición 9.0.9. — El grupo cociente

$$G_1 *_\phi G_2 = G_1 * G_2 / K$$

es llamado el *producto libre amalgamado por $\phi : H_1 \rightarrow H_2$* .

Observemos que si $H_1 = \{I_{G_1}\}$, entonces $G_1 *_\phi G_2 = G_1 * G_2$.

Ejemplo 9.0.10. — Consideremos un espacio topológico (X, τ) arco-conexo y localmente arco-conexo. Sean A, B abiertos arconexos tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B$ sea arco-conexo. Entonces, si $p \in A \cap B$, tenemos que

$$\pi_1(X, p) = \pi_1(A, p) *_\phi \pi_1(B, p)$$

donde $\phi : \pi_1(A \cap B, p) < \pi_1(A, p) < \pi_1(A \cup B, p) \rightarrow \pi_1(A \cap B, p) < \pi_1(B, p) < \pi_1(A \cup B, p)$ es el isomorfismo de amalgación.

CAPÍTULO 10

HNN-EXTENSIÓN

Sean $(G, *)$ un grupo y H, K dos subgrupos de G . Supongamos que tenemos un isomorfismo $\phi : H \rightarrow K$. Consideremos un grupo cíclico infinito $\langle t \rangle$.

En el producto libre $G * \langle t \rangle$ consideremos el subgrupo normal más pequeño K que contenga todas las palabras de la forma

$$tht^{-1}\phi(h)^{-1}, \text{ donde } h \in H$$

Definición 10.0.11. — El grupo cociente

$$G*_\phi = G * \langle t \rangle / K$$

es llamado la *HNN-extensión de G por $\phi : H \rightarrow K$* .

Ejemplo 10.0.12. — Consideremos un espacio topológico (X, τ) arco-conexo y localmente arco-conexo. Sean A, B abiertos arconexos tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que tenemos un homeomorfismo $F : A \rightarrow B$ y consideramos el espacio topológico X_F obtenido al identificar cada punto $a \in A$ con cada punto $F(a) \in B$. Entonces, si $p \in X_F$, tenemos que

$$\pi_1(X_F, p) = \pi_1(X, p)*_\phi$$

donde $\phi : \pi_1(A, p) \rightarrow \pi_1(B, p)$ es el isomorfismo de HNN-extensión.

CAPÍTULO 11

GRUPOS LIBRES

La construcción anterior de productos libres podemos usarla para construir cierto grupo a partir de un conjunto dado S . Este grupo tiene la propiedad de ser generado por S y ser el *más grande* con tal propiedad.

Supongamos que $S = \{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$. Entonces por cada $j \in J$ definimos el grupo

$$F_j = \{1_j = x_j^0, x_j^{\pm 1}, x_j^{\pm 2}, \dots, x_j^{\pm n}, \dots\}$$

con la operación binaria $*_j$ definida por

$$\begin{aligned} 1_j *_j 1_j &= 1_j \\ 1_j *_j x_j^n &= x_j^n = x_j^n *_j 1_j \\ x_j^n *_j x_j^m &= x_j^{n+m} \end{aligned}$$

Ejercicio 11.0.13. — Verificar que $(F_j, *_j)$ es un grupo cíclico infinito generado por x_j , luego isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Z} . Establecer dicho isomorfismo.

Definición 11.0.14. — Consideremos un conjunto no vacío $S = \{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$ y $\{(F_j, *_j) : j \in J\}$ los grupos cíclicos arriba construidos. El producto libre

$$F(S) = \prod_{j \in J} *_j F_j$$

es llamado el *grupo libre* generado por S . La cardinalidad de S es llamado el *rango del grupo libre generado por S* .

Por la propiedad universal vista para los productos libres, vemos que si $(K, \%)$ es cualquier grupo para el cual existe un monomorfismo desde cada F_j hacia este, entonces existe un homomorfismo desde $\prod_{j \in J} *_j F_j$ hacia K . Esto dice que el grupo libre es el grupo más grande posible respecto al conjunto de generadores S .

Ejercicio 11.0.15. — Verificar que todo grupo libre de rango 1 es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Z} .

CAPÍTULO 12

GRUPOS ABELIANOS FINITAMENTE GENERADOS

12.1. Grupos Abelianos Libres

Dado un conjunto $S = \{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$, consideremos el grupo libre generado por S , es decir $F(S)$. Este grupo no es Abeliano y de hecho no hay relaciones entre los diferentes generadores x_j .

Definición 12.1.1. — La abelianización de $F(S)$, es decir

$$F(S)^{abel} = F(S)/[F(S), F(S)]$$

es llamado el *grupo libre abeliano* generado por el conjunto S . El rango de $F(S)^{abel}$ es el rango de $F(S)$, es decir, la cardinalidad de S .

Ejercicio 12.1.2. — Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Verifique que

$$F(S)^{abel} \cong \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}$$

Supongamos que tenemos un grupo Abeliano $(G, *)$ que es generado por el conjunto $\{x_j : j \in J\} \subset G$. Consideremos un conjunto $S = \{y_j : j \in J\}$ y formemos el grupo libre $F(S)$. Entonces tenemos un homomorfismo sobreyectivo natural dado por

$$\phi : F(S) \rightarrow G$$

definido por la propiedad que $\phi(y_j) = x_j$, $j \in J$. Entonces tenemos que el subgrupo de conmutadores $[F(S), F(S)]$ es subgrupo del núcleo de tal homomorfismo, es decir, tenemos inducido un homomorfismo sobreyectivo

$$\phi^{abel} : F(S)^{abel} \rightarrow G$$

El núcleo K de ϕ^{abel} es exactamente $\pi_{[F(S), F(S)]}(\text{Ker}(\phi))$, donde $\pi_{[F(S), F(S)]} : F(S) \rightarrow F(S)^{abel}$ es la proyección natural. Tenemos ahora un isomorfismo

$$G \cong F(S)^{abel} / K$$

12.2. Grupos Abelianos Finitamente Generados

En el caso particular que $(G, *)$ es grupo Abeliano finitamente generado, digamos por x_1, \dots, x_n , entonces de lo anterior tenemos que

$$G \cong \left(\bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} \right) / K$$

es decir, G es la imagen homomorfa de un grupo Abeliano libre de rango finito. Ahora, en este caso, tenemos el siguiente resultado que puede encontrarse en [3].

Proposición 12.2.1. — *Sea F un grupo abeliano libre de rango finito n y K un subgrupo no trivial de G . Entonces existen una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de F y enteros positivos d_1, \dots, d_s , para cierto $s \leq n$, de manera que d_j divide d_{j+1} y K tiene base dada por $\{x_1^{d_1}, \dots, x_s^{d_s}\}$. En particular,*

$$F/K \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{n-s} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^s \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} \right)$$

Luego, como consecuencia de la proposición 12.2.1, tenemos que

$$G \cong \left(\bigoplus_{j=1}^l \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^s \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} \right),$$

donde d_1, \dots, d_s son enteros positivos tales que d_j divide d_{j+1} . Observemos que necesariamente en este caso tenemos

$$G_{tor} = \bigoplus_{k=1}^s \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}.$$

CAPÍTULO 13

GRUPOS COMO COCIENTE DE GRUPOS LIBRES

Consideremos un conjunto $S \neq \emptyset$ y el grupo libre $F(S)$ generado por S . En la sección anterior usamos el subgrupo normal dado por los conmutadores, es decir $[F(S), F(S)]$ para obtener un grupo Abeliano $F(S)^{abel} = F(S)/[F(S), F(S)]$. De manera más general, supongamos que tenemos dado un subgrupo normal de $F(S)$, digamos N , entonces tenemos un grupo cociente $G = F(S)/N$ y un homomorfismo sobreyectivo natural $\pi_N : F(S) \rightarrow G$. Tenemos que $\pi_N(S) \subset G$ es un conjunto de generadores de G . Cada palabra $w \in N$ determina una relación entre los generadores inducidos por S en G y estas son todas. De hecho, no es necesario considerar todas las palabras de N para ver todas las relaciones en G ; basta considerar un conjunto $R \subset N$ de generadores de N . Así, todas las relaciones en G son consecuencia de las relaciones en R . Más aún, supongamos que $T \subset R$ es tal que N es el subgrupo normal de $F(S)$ más pequeño que contiene T , entonces todas las relaciones en G son consecuencias de las relaciones inducidas por T .

Ejemplo 13.0.2. — Sea $S = \{x, y\}$ y $F(S) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ el grupo libre de rango 2 generado por S . Tomemos un entero positivo n y consideremos $T = \{x^2, y^n, (xy)^2 := xyxy\}$. En este caso, el grupo cociente $G = F(S)/N$ está generado por

$$\pi_n(x) = X, \pi_n(y) = Y$$

y satisfacen las relaciones

$$X^2 = Y^n = (XY)^2 = 1$$

La relación $(XY)^2$ nos dice que todos los elementos de G pueden escribirse como $X^a Y^b$, donde $a = 0, 1$ y $b = 0, 1, \dots, n-1$. Esto nos dice que G tiene a lo más $2n$ elementos. Por otro lado, si dos elementos de esta forma coinciden, entonces debemos tener en $F(S)$ una relación $x^a y^b = 1$, lo cual es sólo posible para $a = b = 0$. En particular, $|G| = 2n$. El grupo que hemos construido es llamado el *grupo dihedral* de orden $2n$ y usualmente denotado por D_n .

Ejercicio 13.0.3. —

- (1) Sea n un entero positivo y sean las siguientes transformaciones de Möbius $U(z) = e^{\pi i/2n}z$ y $V(z) = 1/z$. Considere el subgrupo de $\text{Perm}(\mathbb{C})$ H generado por U y V . Verifique que $H \cong D_n$.
- (2) Considere un polígono regular $P \subset \mathbb{R}^2$ de $n \geq 3$ lados. Considere el grupo de isometrías de P respecto al producto interior usual, digamos $\text{Isom}(P)$. Verificar que $\text{Isom}(P)$ contiene un subgrupo de índice dos (luego normal) que es isomorfo a D_n .

Ejemplo 13.0.4. — Sea $S = \{x\}$ y $F(S) \cong \mathbb{Z}$ el grupo libre generado por S . Sea $T = \{x^n\}$, para algún $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Entonces $G = F(S)/N$ resulta ser un grupo cíclico de orden n .

En forma recíproca, partamos de un grupo $(G, *)$ y tomemos un conjunto S de generadores de G . Formemos el grupo libre $F(S)$ generado por S y consideremos la función

$$Q : F(S) \rightarrow G$$

definida por la regla

$$Q(1) = I_G$$

$$Q(x_1x_2 \cdots x_n) = x_1 * x_2 * \cdots * x_n$$

Ejercicio 13.0.5. — Verificar que Q es un homomorfismo sobreyectivo.

Sea $N = \text{Ker}(Q)$. Entonces tenemos que $F(S)/\text{Ker}(Q) \cong G$, es decir, todo grupo puede obtenerse por el procedimiento anterior. Lo más importante de todo lo dicho en esta sección es que cada grupo puede ser representado por medio de

Generadores y Relaciones

es decir, de la forma

$$G = \langle S, T \rangle$$

Ejemplo 13.0.6. —

$$D_n = \langle X, Y : X^2, Y^n, (XY)^n \rangle$$

el grupo dihedral de orden $2n$, que resulta ser el grupo de isometrías Euclidianas de un polígono regular plano de n lados,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle A : A^n \rangle = \langle U, V : U^n, UV \rangle$$

el grupo cíclico finito de orden n , que resulta ser el grupo de isometrías Euclidianas de los rayos que unen $(0, 0)$ con cada raíz n -ésima de la unidad,

$$\mathcal{A}_4 = \langle A, B : A^3, B^2, (AB)^3 \rangle$$

este grupo es llamado el grupo alternante en cuatro letras y resulta ser el grupo de isometrías Euclidianas de una pirámide regular centrada en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{S}_4 = \langle A, B : A^4, B^2, (AB)^3 \rangle$$

este grupo es el grupo simétrico en cuatro letras (isomorfo a $\text{Perm}(\{1, 2, 3, 4\})$) y resulta ser el grupo de isometrías Euclidianas de un cubo regular centrado en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{A}_5 = \langle A, B : A^5, B^2, (AB)^3 \rangle$$

este grupo es llamado el grupo alternante en cinco letras y resulta ser el grupo de isometrías Euclidianas de un icosaedro regular centrado en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13.0.7. — Calcular las tablas de multiplicación de cada uno de los grupos anteriores y determinar sus órdenes. Represente estos grupos por medio de transformaciones (extendidas) de Möbius y también por rotaciones espaciales.

CAPÍTULO 14

GRUPOS DE PERMUTACIONES FINITOS

Como hemos visto al comienzo de estas notas, podemos mirar todo grupo como subgrupo de un grupo de permutaciones $\text{Perm}(X)$ para cierto conjunto no vacío X . Esto nos está diciendo que sería bueno el poder entender un poco más tales grupos. Para simplificar el trabajo, consideraremos sólo conjuntos finitos. Como todo conjunto X finito de cardinalidad $n > 0$ es biyectivo al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, y tenemos que en este caso $\text{Perm}(X)$ y $\text{Perm}(\{1, 2, \dots, n\})$ son necesariamente isomorfos, bastará considerar $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Como habíamos dicho antes, usaremos el símbolo \mathcal{S}_n para denotar $\text{Perm}(\{1, 2, \dots, n\})$. Este grupo recibe también el nombre de *grupo simétrico* de n letras.

Antes que nada, veamos algunas notaciones que nos simplificarán el trabajo.

Definición 14.0.8. — El símbolo (a_1, a_2, \dots, a_k) , donde $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $a_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_j \neq a_r$ para $j \neq r$, denotará la permutación que envía a_1 en a_2 , a_2 en a_3, \dots, a_{k-1} en a_k , a_k en a_1 y fija todos los otros elementos. Este es llamado un *cíclo* de longitud k . Cuando $k = 2$ hablamos de *transposiciones* en vez de decir un *cíclo* de longitud dos.

La operación de dos *cíclos* corresponde a la composición de las dos permutaciones que definen, es decir de derecha hacia la izquierda, por ejemplo $(1, 2)(2, 3) = (1, 2, 3)$, $(2, 3)(1, 2) = (1, 3, 2)$.

Ejercicio 14.0.9. — Calcular la cantidad de *cíclos* de longitud $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ que hay en \mathcal{S}_n .

Ejemplo 14.0.10. — Consideremos $n = 3$. En este caso tenemos que \mathcal{S}_3 está formado por el neutro I , las transposiciones $a = (1, 2)$, $b = (1, 3)$, $c = (2, 3)$ y los *cíclos* de longitud tres $d = (1, 2, 3)$ y $e = (1, 3, 2)$. Observemos que $e = d^{-1}$, $dad^{-1} = c$ y $d^{-1}ad = b$. Es decir que \mathcal{S}_3 está generado por a y d . Observemos que valen las relaciones $a^2 = I$, $d^3 = I$ y como $ad = (2, 3)$, entonces $(ad)^2 = I$.

Ejercicio 14.0.11. — Verificar que toda otra relación \mathcal{S}_3 es consecuencia de las tres relaciones dadas en el ejemplo anterior. Verifique que existe un isomorfismo entre \mathcal{S}_3 y el grupo dihedral D_3 .

Ahora, si consideramos una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$, entonces podemos escribirla como producto de un número finito y disjunto de ciclos. Para ver esto, primero consideramos el subconjunto $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ que son los puntos fijos de la permutación σ . Entonces, tomamos el menor elemento $a_1 \in \{1, 2, \dots, n\} - J$ y formamos el ciclo

$$C_1 = (a_1, a_2 = \sigma(a_1), a_3 = \sigma^2(a_1), \dots, a_{k_1} = \sigma^{k_1-1}(a_1))$$

donde $\sigma^{k_1}(a_1) = a_1$. Ahora, consideramos el menor elemento de $\{1, 2, \dots, n\} - (J \cup \{a_1, a_2, \dots, a_{k_1}\})$, digamos b_1 . Entonces formamos el ciclo

$$C_2 = (b_1, b_2 = \sigma(b_1), b_3 = \sigma^2(b_1), \dots, b_{k_2} = \sigma^{k_2-1}(b_1))$$

donde $\sigma^{k_2}(b_1) = b_1$. Como el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ es finito, obtenemos por este procedimiento una colección finita de ciclos, digamos C_1, \dots, C_r , de respectivas longitudes k_1, \dots, k_r . La inyectividad de σ asegura que dos cualquiera de tales ciclos deben ser disjuntos. Ahora no es difícil darse cuenta que

$$\sigma = C_1 C_2 \cdots C_r$$

y además el orden de los ciclos no afecta al producto. En particular, hemos obtenido el siguiente resultado.

Proposición 14.0.12. — *El grupo simétrico \mathcal{S}_n está generado por todos su ciclos.*

Por otro lado, cada ciclo puede escribirse como producto de transposiciones. En efecto, consideremos un ciclo (a_1, \dots, a_k) , entonces tenemos que

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2)$$

es decir, tenemos el siguiente.

Proposición 14.0.13. — *El grupo simétrico \mathcal{S}_n está generado por todas sus transposiciones.*

Corolario 14.0.14. — *El grupo simétrico \mathcal{S}_n está generado por el ciclo de longitud n dado por $a = (1, 2, 3, \dots, n)$ y la transposición $b = (1, 2)$.*

Demonstración. — Primero que nada, observemos que $b_n = a^{-1}ba = (n, 1)$, $b_{n-1} = a^{-2}ba^2 = (n-1, n)$, $b_{n-2} = a^{-3}ba^3 = (n-2, n-1), \dots, b_2 = aba^{-1} = (2, 3)$. Definamos $b_1 = b$. Segundo, $c_3 = bb_2b = (1, 3)$, $c_4 = c_3b_3c_3 = (1, 4)$, $c_5 = c_4b_4c_4 = (1, 5), \dots, c_{n-1} = c_{n-2}b_{n-2}c_{n-2} = (1, n-2)$. Hasta ahora hemos logrado obtener todas las transposiciones de la forma $(1, k)$, $k = 2, 3, \dots, n$. Ahora, conjugando estas transposiciones

por a^t , donde $t = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, obtendremos todas las transposiciones posibles. El resultado entonces sigue de la proposición anterior. \square

Sea \mathcal{A}_n el subconjunto de \mathcal{S}_n formado por todos los productos de un número par de transposiciones junto a la permutación trivial I . Entonces como

$$((a_1, a_2)(a_3, a_4) \cdots (a_{2k+1}, a_{2k}))^{-1} = (a_{2k+1}, a_{2k})(a_{2k-1}, a_{2k-2}) \cdots (a_1, a_2)$$

tenemos que \mathcal{A}_n contiene los inversos de sus elementos. Por otro lado, si hacemos el producto de dos elementos de \mathcal{A}_n , entonces el resultado sigue siendo un producto de un número par de transposiciones.

Proposición 14.0.15. — \mathcal{A}_n es un subgrupo de \mathcal{S}_n llamado el grupo alternante en n letras.

Nuestra definición del grupo alternante \mathcal{A}_n no deja afuera la posibilidad de que sea todo el grupo \mathcal{S}_n . El siguiente resultado nos dice que esto no es cierto.

Proposición 14.0.16. — No es posible escribir una misma permutación como el producto de un número par de ciertas transposiciones y también como el producto de un número impar de otras transposiciones.

Demonstración. — Supongamos que tenemos una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ que puede escribirse de dos maneras diferentes como :

$$\sigma = \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{2k-1}$$

$$\sigma = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{2r}$$

donde θ_j, μ_l son transposiciones. Entonces tenemos que la identidad $I = \sigma \sigma^{-1}$ de poder escribirse como un producto impar de transposiciones. Supongamos entonces que tenemos

$$I = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$$

donde τ_j son transposiciones. Queremos ver que obligatoriamente s debe ser par, dando una contradicción a lo anterior. Sea $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que aparezca en alguna de las transposiciones τ_j y consideremos τ_{j_m} la primera transposición (de derecha a izquierda) que contenga m . Debemos tener $j_m > 1$ ya que si $j_m = 1$, entonces I no fija a m , una contradicción. Miremos las posibilidades para $\tau_{j_m-1} \tau_{j_m}$:

$$\begin{aligned} (m, x)(m, x) &= I \\ (m, y)(m, x) &= (m, x)(x, y) \\ (y, z)(m, x) &= (m, x)(y, z) \\ (x, y)(m, x) &= (m, y)(x, y) \end{aligned}$$

Esto dice que podemos reemplazar $\tau_{j_m-1} \tau_{j_m}$ por otro par de transposiciones de manera que ahora la primera transposición (de derecha a izquierda) conteniendo m sea τ_{j_m-1} , o bien la cantidad de transposiciones nuevas a decrecido en 2. Además en las

nuevas transposiciones sólo aparecen los enteros que ya aparecían en las transposiciones originales. Como no podemos llevar m a la primera transposición, debemos en algún momento hacer decrecer en un número par de transposiciones antes de hacer desaparecer m de todas las nuevas transposiciones. Si procedemos de esta manera por cada valor en las restantes transposiciones y lo eliminamos, entonces la cantidad de transposiciones decrece en un número par positivo. Luego, s debe ser par. \square

Por ejemplo, la transposición $(1, 2) \notin \mathcal{A}_n$. Pero como el producto de dos permutaciones, cada una de ellas siendo el producto de un número impar de transposiciones, resulta ser un producto de un número par de ellas, obtenemos que $[\mathcal{S} : \mathcal{A}_n] = 2$ y luego \mathcal{A}_n es un subgrupo normal de índice dos en el grupo simétrico \mathcal{S}_n . Las permutaciones en \mathcal{A}_n son llamadas *permutaciones pares* y las que no son llamadas *permutaciones impares*.

Proposición 14.0.17. — *El grupo alternante \mathcal{A}_n es un subgrupo normal de \mathcal{S}_n , de hecho, un subgrupo de índice dos.*

Demonstración. — Si tomamos dos permutaciones $\sigma \in \mathcal{A}_n, \mu \in \mathcal{S}_n$, entonces $\sigma\mu\sigma^{-1}$ es producto par de transposiciones. De esta manera, obtenemos la normalidad. Otra manera de ver esto es que \mathcal{A}_n tiene índice 2 y, como consecuencia de la proposición 5.0.24, este es un subgrupo normal. \square

Ya hemos visto que un ciclo de longitud $k \geq 2$ puede escribirse como un producto de $(k - 1)$ transposiciones. Luego, todo ciclo de longitud impar pertenece a \mathcal{A}_n . Por otro lado, el siguiente resultado dice que todo ciclo de longitud par no puede pertenecer a \mathcal{A}_n ya que este es subgrupo normal diferente a \mathcal{S}_n y este último es generado por todos sus ciclos.

Proposición 14.0.18. — *Todo ciclo de longitud $k \geq 2$ es conjugado al ciclo $(1, 2, 3, \dots, k)$.*

Demonstración. — Sea el ciclo $x = (a_1, \dots, a_k)$ y considere cualquier permutación σ que satisface $\sigma(a_j) = j$. Entonces $\sigma x \sigma^{-1} = (1, 2, \dots, k)$. \square

Por lo anterior, todo ciclo de longitud 3 pertenece a \mathcal{A}_n . El siguiente muestra que estos le generan.

Proposición 14.0.19. — *El subgrupo \mathcal{A}_n está generado por todos los ciclos de longitud 3.*

Demonstración. — Un ciclo de longitud 3, digamos $(a, b, c) = (a, c)(a, b)$, pertenece a \mathcal{A}_n . Como las permutaciones de \mathcal{A}_n se escriben como producto de un número par de transposiciones, bastará con verificar que el producto de dos transposiciones diferentes es producto de ciclos de longitud 3. Esto se ve como sigue :

$$(a, b)(a, c) = (a, c, b)$$

método de Cramer. En otras palabras, la cantidad de diferentes clases de conjugación en \mathcal{S}_n es igual al número de soluciones (μ_1, \dots, μ_n) de las dos ecuaciones anteriores.

Por ejemplo, consideremos $n = 3$, es decir, \mathcal{S}_3 . En este caso, las soluciones son dadas por $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 0)\}$. Para el primer triple $(1, 1, 1)$ tenemos $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 = 1$, es decir los 3-círclos (forman una clase de conjugación formada de dos 3-círclos). Para el segundo triple $(2, 1, 0)$ tenemos $v_1 = v_2 = 1$ y $v_3 = 0$, es decir los 2-círclos (forman una clase de conjugación formada de tres 2-círclos). Para el tercer triple $(3, 0, 0)$ tenemos $v_2 = v_3 = 0$ y $v_1 = 3$, es decir la clase formada de sólo la permutación trivial.

Observación 14.0.21. — La cantidad de clases de conjugación en el grupo \mathcal{S}_n es importante en la teoría de representaciones lineales (que veremos en un próximo capítulo). Tal número coincide con el número de representaciones irreducibles de tal grupo.

También podemos ver cual es el número de permutaciones en \mathcal{S}_n que tienen una descomposición similar (mismos valores de v_k), es decir, cuantas permutaciones pertenecen a una clase de conjugación dada. Para esto, primero hay que escoger v_1 puntos fijos, es decir,

$$\binom{n}{v_1} = \frac{n!}{v_1!(n-v_1)!}$$

posibilidades. Ahora hay que escoger de los restantes puntos v_2 pares disjuntos y sin importar su orden, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2!} \binom{n-v_1}{2} \binom{n-v_1-2}{2} \binom{n-v_1-4}{2} \dots \binom{n-v_1-2(v_2-1)}{2} &= \\ &= \frac{(n-v_1)!}{2^{v_2} v_2! (n-v_1-2v_2)!} \end{aligned}$$

Ahora hay que escoger de los restantes puntos v_3 trios disjuntos y sin importar su orden, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_3!} \binom{n-v_1-2v_2}{3} \binom{n-v_1-2v_2-3}{3} \dots \binom{n-v_1-2v_2-3(v_3-1)}{3} &= \\ &= \frac{(n-v_1-2v_2)!}{3^{v_3} v_3! (n-v_1-2v_2-3v_3)!} \end{aligned}$$

En forma similar para los restantes. Uno obtiene que el número total que buscamos es el producto de todos los anteriores, es decir

$$\frac{n!}{v_1! 2^{v_2} v_2! 3^{v_3} v_3! \dots n^{v_n} v_n!}$$

Ejercicio 14.0.22. —

- (i) Verificar que \mathcal{A}_n , $n \geq 5$ es un grupo simple, es decir, no posee subgrupos normales no triviales. Analizar los casos \mathcal{A}_3 y \mathcal{A}_4 .
- (ii) Calcular $Z(\mathbb{S}_n)$.

PARTE II

ACCIÓN DE GRUPOS Y APLICACIONES

En este capítulo estudiaremos las propiedades de los grupos por medio de acciones sobre conjuntos como grupo de permutaciones. Como aplicación de estos conceptos obtendremos los teoremas de Sylow, los cuales dan información sobre grupos finitos. Luego miraremos un ejemplo particular que corresponde a las representaciones lineales.

CAPÍTULO 15

ACCIÓN DE GRUPOS SOBRE CONJUNTOS

Definición 15.0.23. — Una *acción por la izquierda* de un grupo $(G, *)$ sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ es por definición un homomorfismo

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$$

Un homomorfismo

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \bar{\circ})$$

donde $(\text{Perm}(X), \bar{\circ})$ es el grupo reflejado de $(\text{Perm}(X), \circ)$, es llamada una *acción por la derecha* de un grupo $(G, *)$ sobre el conjunto X . Si el homomorfismo en cuestión es además inyectivo, entonces hablamos de una *acción fiel*.

Consideremos el isomorfismo natural

$$\tau : (\text{Perm}(X), \circ) \rightarrow (\text{Perm}(X), \bar{\circ}) : \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

y una representación por la izquierda $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$. Entonces tenemos que $\tau \circ \phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \bar{\circ})$ nos dá una acción por la derecha, la cual es fiel sí y sólo si ϕ es fiel. Recíprocamente, si tenemos una acción por la derecha $\psi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \bar{\circ})$, entonces $\tau^{-1} \circ \psi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ nos dá una acción por la izquierda, la cual es fiel sí y sólo si ψ es fiel.

Lo anterior nos permite tener una biyección natural entre las acciones por la derecha y acciones por la izquierda de un grupo dado $(G, *)$ sobre un conjunto fijo X .

$$\{\text{Acciones por la izquierda}\} \rightarrow \{\text{Acciones por la derecha}\}$$

$$\phi \mapsto \psi = \tau \circ \phi$$

Por lo tanto, desde ahora en adelante nos preocuparemos de acciones por la izquierda; los resultados equivalentes para acciones por la derecha se obtienen usando la relación anterior.

Observación 15.0.24. — A veces una acción por la izquierda $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ se escribe como una función

$$\eta : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto \eta(g, x) := \phi(g)(x)$$

la cual satisface las siguientes propiedades :

- (i) $\eta(I_G, x) = x$, para todo $x \in X$;
- (ii) $\eta(g * h, x) = \eta(g, \eta(h, x))$;
- (iii) $\eta(g, \cdot) : X \rightarrow X : x \mapsto \eta(g, x)$ define una permutación de X .

Ejercicio 15.0.25. — Considere una función $\eta : G \times X \rightarrow X$ satisfaciendo

- (i) $\eta(I_G, x) = x$, para todo $x \in X$;
- (ii) $\eta(g * h, x) = \eta(g, \eta(h, x))$;
- (iii) $\eta(g, \cdot) : X \rightarrow X : x \mapsto \eta(g, x)$ define una permutación de X .

Verifique que existe un homomorfismo $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ de manera que $\eta(g, x) := \phi(g)(x)$. Más aún, verifique que condición (i) es consecuencia de las las otras dos (Ind. Llame $T = \eta(I_G, \cdot) \in \text{Perm}(X)$. Si $x \in X$, entonces (ii) dice que $T(T(x)) = T(x)$ y (iii) dice que T es invertible.)

Ejemplo 15.0.26. — Consideremos un espacio topológico (X, τ) , su σ -álgebra de Borel \mathcal{A} y una medida de probabilidad $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Supongamos que tenemos una acción fiel $\phi : (G, *) \rightarrow \text{Perm}(X)$, donde $(G, *)$ es un grupo finito o numerable, tal que $\phi(g) : X \rightarrow X$ es un homomorfismo para cada $g \in G$. Consideremos la relación de equivalencia

$$x \cong y \text{ si y sólo si existe } g \in G \text{ tal que } \phi(g)(x) = y$$

y denotemos por X/G al conjunto de las clases de equivalencia y por $\pi : X \rightarrow X/G$ a la proyección natural. Podemos dotar a X/G de la topología cociente ; entonces π se torna continua y abierta (ya que la acción es por homeomorfismos). Denotemos por $\mathcal{A}_{X/G}$ el σ -álgebra de Borel del espacio X/G . Entonces la propiedad que tiene π nos asegura que

$$\mathcal{A}_{X/G} = \{\pi(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

Podemos entonces construir la función $P^* : \mathcal{A}_{X/G} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$P^*(\pi(A)) = P(\pi^{-1}(A)) = P\left(\sum_{g \in G} \phi(g)(A)\right)$$

Por ejemplo, supongamos que escogemos $A \in \mathcal{A}$ de manera que $A \cap \phi(g)(A) = \emptyset$ para todo $g \in G$ y $P(A) > 0$. Entonces tendremos que

$$P^*(\pi(A)) = \sum_{g \in G} P(\phi(g)(A))$$

En esta situación tendremos que si G es infinito, entonces para cada sucesión $\{g_n\}$ en G vale que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\phi(g_n)(A)) = 0$$

y, en particular, no podemos pedir a $\phi(G)$ estar contenido en el grupo de homeomorfismos de X que preservan la medida P .

Ejemplo 15.0.27. — Recordemos de las primeras secciones del capítulo anterior el homomorfismo de grupos

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(G), \circ) : g \mapsto \phi(g)$$

donde

$$\phi(g)(x) = g * x * g^{-1}$$

En este caso tenemos una acción por la izquierda del grupo $(G, *)$ sobre el conjunto G .

Ejemplo 15.0.28. — Consideremos una función diferenciable

$$X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde Ω es una región del espacio \mathbb{R}^n . Miremos el sistema dinámico

$$x' = X(x)$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, tenemos que para cada $p \in \Omega$ existe una única solución $x(\cdot, p) : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ del sistema anterior con la condición $x(0, p) = p$. Más aún como $x(t) = x(t + s, p)$ es también solución del sistema para la condición $x(0) = x(s, p)$, tenemos la relación

$$x(t + s, p) = x(s, x(t, p))$$

Esta relación nos permite construir la acción del grupo aditivo \mathbb{R} sobre Ω como

$$\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Perm}(\Omega), \circ) : t \mapsto x(t, \cdot)$$

donde

$$x(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \Omega : p \mapsto x(t, p).$$

Definición 15.0.29. — Supongamos que tenemos una acción $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$.

(i) La *órbita* de un punto $x \in X$ por la acción anterior es el conjunto de puntos que recorre x por efecto de $\phi(G)$, es decir,

$$\text{Orb}(x) = \{\phi(g)(x) : g \in G\} \subset X$$

(ii) El *estabilizador* de un punto $x \in X$ por la acción anterior es el conjunto de elementos de G que tienen a x como punto fijo, es decir,

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G : \phi(g)(x) = x\} \subset G$$

Proposición 15.0.30. — Para cada $x \in X$ tenemos que el estabilizador $\text{Stab}(x)$ es un subgrupo de $(G, *)$.

Demonstración. — Como $\phi(I_G) = I$, la permutación identidad, tenemos que $I_G \in \text{Stab}(x)$, luego, $\text{Stab}(x) \neq \emptyset$. Si $g \in \text{Stab}(x)$, entonces $\phi(g)(x) = x$, luego $\phi(g)^{-1}(x) = x$. Así, $\phi(g^{-1})(x) = \phi(g)^{-1}(x) = x$, es decir, $\phi(g^{-1}) \in \text{Stab}(x)$. Sean $g, h \in \text{Stab}(x)$, es decir $\phi(g)(x) = x = \phi(h)(x)$. Entonces, $\phi(g * h)(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(g)(x) = x$, es decir $g * h \in \text{Stab}(x)$. \square

Ejercicio 15.0.31. — Verificar que dada una acción

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$$

la relación

$$x \equiv y \text{ si y sólo si existe } g \in G \text{ tal que } \phi(g)(x) = y$$

define una relación de equivalencia en X . Las clases de equivalencia son las órbitas. Al conjunto de las clases de equivalencia la denotaremos por $X/\phi(G)$ o simplemente por X/G en caso de no haber confusión de la acción.

Es claro que para cada $x \in X$, la representación $\phi(G)$ actúa como permutaciones del conjunto $\text{Orb}(x)$, por definición de órbita. Luego tenemos una función inducida $F : G \rightarrow \text{Orb}(x) : g \mapsto F(g) := \phi(g)(x)$. Esta función es sobreyectiva. Observemos además que $F(g) = F(h)$ es equivalente a tener $t = g^{-1} * h \in \text{Stab}(x)$. Recíprocamente, para cada $t \in \text{Stab}(x)$ y cada $g \in G$ vale que $F(g * t) = F(g)$. En otras palabras, tenemos el siguiente :

Proposición 15.0.32. — Para cada $x \in X$ tenemos una biyección natural entre el conjunto de clases laterales $G/\text{Stab}(x)$ y la órbita $\text{Orb}(x)$. En particular,

$$\#\text{Orb}(x) = [G : \text{Stab}(x)]$$

Ejemplo 15.0.33. — Una acción $\phi(G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ es llamada una *acción transitiva* si existe un punto $x_0 \in X$ tal que su órbita es todo X , es decir, $\text{Orb}(x_0) = X$. Como todo punto $x \in X$ pertenece a $\text{Orb}(x_0)$, tenemos que $\text{Orb}(x) = X$. En este caso la proposición 15.0.32 nos dice que $[G : \text{Stab}(x)]$ es independiente de $x \in X$. De hecho, si tomamos $g \in G$ tal que $\phi(g)(x_0) = x$, entonces

$$\text{Stab}(x) = g * \text{Stab}(x_0) * g^{-1}$$

Reemplazando X por la órbitas de los puntos de X , la última parte del ejemplo anterior nos dá el siguiente.

Proposición 15.0.34. — Sea $\phi(G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ una acción. Si dos puntos $x, y \in X$ pertenecen a la misma órbita, entonces sus estabilizadores son conjugados en G .

Ejemplo 15.0.35. — Consideremos X como el conjunto de todos los subgrupos de G y la acción

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ) : g \mapsto \phi(g)$$

definida por

$$\phi(g) : X \rightarrow X : H \mapsto g * H * g^{-1}$$

En este ejemplo, H es subgrupo normal de G sí y sólo si $\text{Orb}(H) = \{H\}$.

Ejercicio 15.0.36. — Sea $(G, *)$ un grupo finito y H un subgrupo de G . Considere la acción

$$\phi : (H, *) \rightarrow (\text{Perm}(G), \circ) : h \mapsto \phi(h)$$

donde

$$\phi(h) : G \rightarrow G : g \mapsto h * g$$

Verifique que para todo $g \in G$ vale que $\text{Stab}(g) = \{I_G\}$ y que $\#\text{Orb}(g) = |H|$. Utilice el hecho que G es la unión disjunta de sus órbitas para reobtener el teorema de Lagrange.

Ejemplo 15.0.37. — Consideremos un grupo de transformaciones de Möbius, con la regla de la composición, digamos G . Entonces tenemos una acción natural $\phi : (G, \circ) \rightarrow (\text{Perm}(\widehat{\mathbb{C}}), \circ)$ dada por biholomorfismos :

$$A : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : z \mapsto \phi(A)(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1$. El estudio de este tipo de acciones es parte del estudio de grupos Kleinianos que verán en el seminario de geometría compleja.

Consideremos un conjunto finito $X \neq \emptyset$, un grupo finito $(G, *)$, una acción $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ y el conjunto $U = \{(g, x) \in G \times X : g \in \text{Stab}(x)\}$. Por cada $g \in G$ denotemos por $\text{Fix}(g) = \{x \in X : \phi(g)(x) = x\}$ al conjunto de puntos fijos en X por g en la acción dada. Entonces, podemos ver que

$$\#U = \sum_{g \in G} \#\text{Fix}(g)$$

Por otro lado, por cada $x \in X$, podemos ver que existen tantos pares $(x, g) \in U$ como elementos en $\text{Stab}(x)$; luego,

$$\#U = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

y como $|G|/|\text{Stab}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = \#\text{Orb}(x)$, tenemos que

$$\#U = |G| \sum_{x \in X} 1/\#\text{Orb}(x)$$

Escojamos una colección maximal, digamos $x_1, \dots, x_r \in X$, de elementos no equivalentes por G , es decir, cuyas órbitas son disjuntas y la unión de ellas es todo X . Entonces,

como la suma sobre cada órbita $Orb(x)$ del valor $1/\#Orb(x)$ dá el valor 1, la igualdad anterior puede escribirse como

$$\#U = |G|r$$

obteniendo de esta manera la siguiente relación entre los puntos fijos de los elementos de G , $|G|$ y $\#X/G$.

Proposición 15.0.38 (Igualdad de Burnside). — Sea $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ una acción de un grupo finito $(G, *)$ sobre un conjunto finito. Denotemos por r la cardinalidad del conjunto cociente $X/\phi(G)$, es decir, el número de classes diferentes (órbitas diferentes). Entonces

$$\sum_{g \in G} \#Fix(g) = r|G|$$

y en particular,

$$r = \text{número de órbitas} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \#Fix(g)$$

Ejemplo 15.0.39. — Veamos una aplicación de la igualdad anterior. Supongamos que tenemos un tetraedro $T \subset \mathbb{R}^3$ centrado en el origen. Este tetraedro tiene 4 caras, las cuales queremos pintar de cuatro colores diferentes, digamos de azul, verde, lila y rojo. Es claro que hay $4! = 24$ posibles maneras de hacer esto : (i) la elección de la cara que pintaremos con azul nos da 4 posibilidades, (ii) la elección dejada para la que pintaremos de verde es 3, (iii) la elección para la que pintaremos de lila es 2, (iv) queda luego sólo una posible cara que pintar de rojo. Si consideramos el grupo de isometrías Euclidianas (rotaciones) que dejan invariante T , vemos que cada elección va a parar a otra elección que en la práctica no es diferente de la anterior, sólo la estaremos mirando desde otra posición. Como el grupo de tales isometrías es \mathcal{A}_4 , el grupo alternante de 4 letras, cuyo orden es 12, vemos que en realidad hay sólo dos maneras totalmente diferentes de pintarlo, $2 = [\mathcal{S}_2 : \mathcal{A}_4]$. Ahora, miremos esto utilizando la igualdad de Burnside. En este caso consideremos

$$X = \{(C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}, C_{i_4}) : i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, 3, 4\}, i_j \neq i_k, j \neq k\}$$

donde cada cuádruple está formada por las cuatro caras de T , es decir $\#X = 24$ y el grupo $G = \mathcal{A}_4$. La acción de \mathcal{A}_4 es dada por permutaciones de las 4 coordenadas (en cada cuádruple). Lo que necesitamos encontrar es entonces r , es decir, la cantidad de órbitas diferentes. Para cada $g \in G - \{I_G\}$ se tiene $Fix(g) = \emptyset$ y $\#Fix(I_G) = 24$. Así, en este caso la cantidad de órbitas posibles es $r = 24/12 = 2$ como era lo esperado.

Definición 15.0.40. — Todo grupo de orden una potencia de un primo p es llamado un p -grupo.

Ejemplo 15.0.41. — Volvamos a la acción por conjugación

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(G), \circ) : g \mapsto \phi(g)$$

donde

$$\phi(g)(x) = g * x * g^{-1}$$

Supongamos que G tiene orden finito, entonces tenemos las siguientes propiedades

- (i) dos órbitas coinciden o son disjuntas,
- (ii) cada elemento $x \in Z(G)$ tiene como órbita $\text{Orb}(x) = \{x\}$,
- (iii) la unión de las órbitas es todo G .

Como consecuencia de todo esto tenemos la *ecuación de las clases*

$$|G| = |Z(G)| + \#\text{Orb}(x_1) + \#\text{Orb}(x_2) + \cdots + \#\text{Orb}(x_r)$$

donde x_1, \dots, x_r es una colección maximal de elementos no conjugados en $G - Z(G)$.

Supongamos que $|G| = p^n$, es decir, un p -grupo. Ya que

- (i) $\#\text{Orb}(x_j) > 1$, pues $x_j \notin Z(G)$, y
- (ii) $\#\text{Orb}(x_j)$ divide $|G| = p^n$ por la proposición 15.0.32,

tenemos que

$$\#\text{Orb}(x_j) = p^{n_j} \text{ para algún } n_j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Como consecuencia p debe dividir $|Z(G)|$ y, en particular, tenemos el siguiente.

Proposición 15.0.42. — Sea p un número primo y $(G, *)$ un p -grupo. Entonces $Z(G)$ tiene al menos p elementos.

Anteriormente habíamos visto que todo grupo de orden un número primo es un grupo cíclico, luego Abeliano. Usando el resultado anterior podemos obtener el siguiente.

Corolario 15.0.43. — Si $(G, *)$ es un grupo de orden p^2 , donde p es un número primo, entonces $(G, *)$ es Abeliano.

Demonstración. — Por el teorema de Lagrange, $|Z(G)|$ divide p^2 . La proposición anterior nos dice entonces que $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. En el caso que $|Z(G)| = p^2$ tendremos $G = Z(G)$ y luego G es Abeliano. Supongamos por el contrario que $|Z(G)| = p$, es decir $(G, *)$ no es Abeliano. Entonces la proposición 6.0.51 nos da una contradicción. \square

Ejemplo 15.0.44. — Generalizemos el ejemplo anterior como sigue. Sea $(G, *)$ un grupo finito y una acción $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ sobre un conjunto finito. Sea $r = \#X/G$, es decir, podemos escoger $x_1, \dots, x_r \in X$ puntos conórbitas diferentes y cuya unión es todo X , es decir, tenemos

$$\#X = \sum_{j=1}^r \#\text{Orb}(x_j)$$

Denotemos por

$$X_G = \{x \in X : \phi(g)(x) = x \text{ para todo } g \in G\}$$

Entonces, podemos suponer que $x_1, \dots, x_s \in X_G$ y $x_{s+1}, \dots, x_r \notin X_G$. De esta manera, $\#Orb(x_j) = 1$ para $j = 1, \dots, s$ y $\#Orb(x_j) > 1$ para $j = s + 1, \dots, r$. Así, hemos obtenido una fórmula que generaliza la ecuación de clases para la acción particular de conjugación cuando $X = G$.

Proposición 15.0.45 (Generalización de la ecuación de clases)

Sea $(G, *)$ un grupo finito y una acción $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ sobre un conjunto finito X . Sea x_1, \dots, x_r puntos conórbitas diferentes y cuya unión es todo X . Supongamos que $x_1, \dots, x_s \in X_G$ y $x_{s+1}, \dots, x_r \notin X_G$. Entonces

$$\#X = \#X_G + \sum_{j=s+1}^r \#Orb(x_j)$$

Proposición 15.0.46. — Sea p un número primo y $(G, *)$ un p -grupo. Entonces

$$\#X \equiv \#X_G \text{ módulo } p$$

Demonstración. — Tenemos la igualdad

$$\#X = \#X_G + \sum_{j=s+1}^r \#Orb(x_j)$$

y sabemos que $\#Orb(x_j) = [G : \text{Stab}(x_j)]$. Pero para $j \geq s + 1$ también sabemos que $\text{Stab}(x_j) \neq G$ y, por el teorema de Lagrange, $|\text{Stab}(x_j)|$ es una potencia de p no maximal. Luego, $\sum_{j=s+1}^r \#Orb(x_j)$ es divisible por p como queremos. \square

Ejemplo 15.0.47. — Consideremos un grupo finito $(G, *)$ y p un número primo que divida $|G|$. Denotemos por G^p el producto cartesiano de p copias de G y consideremos el conjunto

$$X = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \in G^p : g_1 * g_2 * \dots * g_p = I_G\}$$

Observemos que $\#X = |G|^{p-1}$ ya que cualquier elección de $g_1, \dots, g_{p-1} \in G$ nos permite elegir $g_p = g_{p-1}^{-1} * g_{p-2}^{-1} * \dots * g_2^{-1} * g_1^{-1}$. Consideremos el subgrupo cíclico del grupo simétrico \mathcal{S}_p generado por el ciclo $\sigma = (1, 2, 3, \dots, p)$ y la acción natural $\phi : \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Perm}(X)$ dada por la permutación cíclica de las coordenadas.

Usando la proposición 15.0.46

$$\#X \equiv \#X_{\langle \sigma \rangle} \text{ módulo } p$$

y el hecho que p divide $\#X$, tenemos que $\#X_{\langle \sigma \rangle}$ también es divisible por p . Como $(I_G, I_G, \dots, I_G) \in X_{\langle \sigma \rangle}$, tenemos necesariamente que $\#X_{\langle \sigma \rangle}$ es un múltiplo positivo de p , en particular, existen al menos p elementos de $X_{\langle \sigma \rangle}$. Pero $(g_1, \dots, g_p) \in X_{\langle \sigma \rangle}$ sí y sólo

si $g_1 = g_2 = \dots = g_p = g$ y $g^p = I_G$. Este ejemplo nos muestra que existe $g \in G - \{I_G\}$ de orden p .

Proposición 15.0.48 (Teorema de Cauchy). — Sea $(G, *)$ un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$. Entonces existen elementos de G con orden p .

Este resultado nos da una definición equivalente para un p -grupo como sigue.

Corolario 15.0.49. — Sea p un número primo. Entonces un grupo finito $(G, *)$ es un p -grupo sí y sólo si todo elemento de G diferente del neutro tiene orden una potencia de p .

Demonstración. — Es claro que si G es un p -grupo, es decir $|G| = p^n$ para cierto $n > 0$, entonces, por el teorema de Lagrange, todo elemento diferente del neutro tiene orden una potencia de p . Recíprocamente, supongamos que todo elemento de G , diferente del neutro tiene orden una potencia de p . Si G no es un p -grupo, entonces debe existir un número primo $q \neq p$ que divide $|G|$. Por el teorema de Cauchy, debe entonces existir un elemento de orden q , una contradicción. \square

Ejemplo 15.0.50. — Consideremos un grupo finito $(G, *)$, p un número primo que divide $|G|$ y H un p -subgrupo de G . Consideremos la acción

$$\phi : (H, *) \rightarrow (\text{Perm}(G/H), \circ)$$

donde

$$\phi(h)(gH) = (h * g)H$$

En este caso tenemos de la proposición 15.0.46 la equivalencia

$$\#G/H \equiv \#(G/H)_H \text{ módulo } p$$

En este caso,

$$\begin{aligned} (G/H)_H &= \{gH : (h * g)H = gH, h \in H\} = \\ &= \{gH : (g^{-1} * h * g) \in H, h \in H\} \end{aligned}$$

es decir, $(G/H)_H$ coincide con las clases laterales de los elementos del normalizador $N_G(H)$, el cual es $N_G(H)/H$. En particular, como $\#G/H = [G : H]$, obtenemos

$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \text{ módulo } p$$

Ejemplo 15.0.51. — Sea $(G, *)$ un grupo y H un subgrupo de índice n . Formemos el conjunto $X = G/H$ de las clases de equivalencia laterales derechas de G por H . Como $\#X = [G : H] = n$, tenemos un isomorfismo natural entre $(\text{Perm}(X), \circ)$ y \mathcal{S}_n . Tenemos la acción

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ) \cong \mathcal{S}_n$$

dada por

$$\phi(g)(xH) = (g * x)H$$

Escribamos $X = \{x_1H, x_2H, \dots, x_nH\}$. En este caso, podemos mirar $\text{Ker}(\phi)$ que nos dá los elementos de G que hacen de tal acción no fiel.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi) &= \bigcap_{j=1}^n \text{Stab}(x_jH) = \bigcap_{j=1}^n \{g \in G : (g * x_j)H = x_jH, j = 1, 2, \dots, n\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^n \{g \in G : x_j^{-1} * g * x_j \in H\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^n x_jHx_j^{-1} \subset H \end{aligned}$$

Este ejemplo tiene dos simples consecuencias.

Proposición 15.0.52. — Si $(G, *)$ es un grupo, finito ó infinito, que contiene un subgrupo de índice finito $n > 1$, entonces contiene también un subgrupo normal de índice finito.

Demonstración. — Basta escoger $K = \text{Ker}(\phi)$ del ejemplo ya que $[G : K] = [G : H][H : K]$, $[G : H]$ es finito y $[H : K] \leq n!$. \square

Proposición 15.0.53. — Sea $(G, *)$ un grupo simple, es decir, no contiene subgrupos normales diferente de los triviales. Supongamos que existe H subgrupo de G de índice $n > 1$. Entonces existe un monomorfismo $\phi : (G, *) \rightarrow \mathcal{S}_n$.

Demonstración. — Del ejemplo tenemos que $K = \text{Ker}(\phi)$. Pero como $(G, *)$ es simple, tenemos dos posibilidades : (i) $K = \{I_G\}$, en cuyo caso estamos en lo deseado, ó (ii) $K = G$, en cuyo caso obliga a tener $H = G$, una contradicción. \square

Ejemplo 15.0.54. — Consideremos un grupo $(G, *)$ y una acción fiel transitiva $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$ sobre algún conjunto $X \neq \emptyset$ de cardinalidad finita $n > 1$. Como $n = \#X = \#\text{Orb}(x) = [G : \text{Stab}(x)]$, entonces $H = \text{Stab}(x)$ es un subgrupo de índice $n > 1$. Por lo visto anteriormente, el grupo $(G, *)$ debe contener un subgrupo normal de índice finito. Desgraciadamente, H no es normal. En efecto, si existe $h \in H - \{I_G\}$ tal que para todo $g \in G$ $g * h * g^{-1} \in H$, entonces $\phi(g * h * g^{-1})(x) = x$, es decir, $h \in \text{Stab}(\phi(g^{-1})(x))$, para cada $g \in G$. En particular,

$$h \in \bigcap_{x \in X} \text{Stab}(x) = \text{Ker}(\phi) = \{I_G\}$$

pués la acción es fiel, dando una contradicción. Más aún, esto también asegura que $\text{Stab}(x)$ es un grupo simple.

Recíprocamente, supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ el cual contiene un subgrupo H de índice finito n que no es normal en G y el cual es además simple (como fué

el caso de $Stab(x)$ en el caso anterior). Procedamos a mirar la acción vista en el ejemplo anterior

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ) \cong \mathcal{S}_n$$

dada por

$$\phi(g)(xH) = (g * x)H$$

Ya habíamos visto que $K = \text{Ker}(\phi) < H$, y como H es simple, tenemos que (i) $K = \{I_G\}$, en cuyo caso la acción es fiel, ó (ii) $K = H$, en cuyo caso H es subgrupo normal de G , lo cual no es imposible por nuestra elección de H . Luego, ϕ es acción fiel. Por otro lado, como $\phi(g)(H) = gH$, tenemos que la acción es transitiva.

Este ejercicio nos dá el siguiente resultado.

Proposición 15.0.55. — Sea $(G, *)$ un grupo y un entero $n > 1$. Entonces existe una acción transitiva $\phi : (G, *) \rightarrow \mathcal{S}_n$ sí y sólo si existe un subgrupo H de índice n que no es normal y simple.

CAPÍTULO 16

LOS TEOREMAS DE SYLOW

En esta sección veremos tres resultados muy importantes en la teoría de grupos finito, los llamados *teoremas de Sylow*. Estos resultados son consecuencia de mirar ciertas acciones y utilizar la proposición 15.0.46 el cual nos permite contar módulo un primo.

Teorema 16.0.56 (Teoremas de Sylow). — Sea $(G, *)$ un grupo finito, p un número primo y $|G| = p^a q$, donde $(p, q) = 1$, es decir, p y q son relativamente primos. Entonces :

- (i) Para cada $k \in \{1, 2, \dots, a\}$ existe un subgrupo de orden p^k . Un subgrupo de orden maximal p^a será llamado un p -subgrupo de Sylow de G ;
- (ii) Todo subgrupo de orden p^k , donde $k \in \{1, 2, \dots, a - 1\}$, es subgrupo normal de un subgrupo de orden p^{k+1} ;
- (iii) Dos p -subgrupos de Sylow de G son conjugados;
- (iv) El número N_p de p -subgrupos de Sylow satisface

$$N_p \equiv 1 \text{ módulo } p, \quad N_p \text{ divide } |G|$$

Además, si H es cualquier p -subgrupo de Sylow de G , entonces

$$N_p = [G : N_G(H)]$$

Demonstración. —

Parte (i) y (ii). Por el teorema de Cauchy, tenemos listo el caso $k = 1$. Ahora, veremos que la existencia de un p -subgrupo de orden p^k , donde $k \in \{1, 2, \dots, a - 1\}$, asegura la existencia de un p -subgrupo de orden p^k , obteniendo de esta forma parte (i) del teorema.

Para esto, consideremos un subgrupo H de orden p^k , $k < a$. Luego $[G : H]$ es divisible por p . Consecuencia de la equivalencia del ejemplo 15.0.50 es que $[N_G(H) : H]$ también es divisible por p . Ahora, como H es subgrupo normal de $N_G(H)$, tenemos el grupo cociente $N_G(H)/H$ de orden divisible por p . El teorema de Cauchy asegura la existencia de un elemento $zH \in N_G(H)/H$ de orden p , es decir $z^p H = H$. Consideremos el homomorfismo sobreyectivo natural $\pi : N_G(H) \rightarrow N_G(H)/H$ y sea $K = \pi^{-1}(\langle zH \rangle)$. Es claro que $H = \text{Ker}(\pi)$ es subgrupo normal de K (al serlo de $N_G(H)$), obteniendo también como consecuencia parte (ii), y tiene orden p^{k+1} como queríamos.

Parte (iii). Consideremos dos p -subgrupos de Sylow, digamos H y K . Consideremos la acción

$$\phi : (K, *) \rightarrow (\text{Perm}(G/H), \circ)$$

dada por

$$\phi(k)(gH) = (k * g)H$$

Como consecuencia de la proposición 15.0.46 tenemos la equivalencia

$$\#G/H = [G : H] = \#(G/H)_K \text{ módulo } p$$

Como $[G : H]$ ya no es divisible por p , el conjunto

$$(G/H)_K = \{gH : (k * g)H = gH, k \in K\}$$

no puede ser vacío. Escojamos $gH \in (G/H)_K$, luego para cada $k \in K$ vales que $(k * g)H = gH$, es decir $g^{-1} * k * g \in H$. Como H y K tienen el mismo orden, $g^{-1}Kg = H$.

Parte (iv). Tomemos un p -subgrupo de Sylow H y denotemos por X al conjunto de todos los p -subgrupos de Sylow. Miremos la acción

$$\phi : (H, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$$

dada por

$$\phi(h)(K) = hKh^{-1}$$

La proposición 15.0.46 nos dice que

$$N_p = \#X \equiv \#X_H \text{ módulo } p$$

Pero en este caso X_H esta formado por todos los p -subgrupos de Sylow K tales que H está contenido en $N_G(K)$, luego, H es p -subgrupo de Sylow de $N_G(K)$.

Sea $K \in X_H$. Por lo anterior H es p -subgrupo de Sylow de $N_G(K)$. Como K también es p -subgrupo de Sylow de $N_G(K)$, tenemos por (iii) que ellos son conjugados por un elemento de $N_G(K)$. Pero todo elemento de $N_G(K)$ conjuga K en si mismo, obteniendo que $K = H$. Como consecuencia

$$X_H = \{H\}$$

es decir

$$N_p \equiv 1 \text{ módulo } p$$

Ahora, usemos la acción $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$, también dada por conjugación, es decir $\phi(g)(K) = gKg^{-1}$. Por (iii) sólo existe una órbita. Además, para cada $K \in X$ vale que $\text{Stab}(K) = N_G(K)$. En particular, tomando uno de los p -subgrupos de Sylow de G , digamos H , obtenemos

$$N_p = \#X = \#\text{Orb}(H) = [G : N_G(H)]$$

y como $[G : N_G(H)]$ divide $|G|$, entonces N_p divide $|G|$. \square

CAPÍTULO 17

APLICACIONES DE LOS TEOREMAS DE SYLOW

17.1. Aplicación 1

Sea p un número primo dado. Hemos visto que todo grupo $(G, *)$ de orden p es necesariamente un grupo cíclico, es decir, isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. También hemos visto que todo grupo $(G, *)$ de orden p^2 es Abeliano. Analizemos esta situación con mayor detalle. Si existe un elemento de orden p^2 , entonces este elemento es un generador de $(G, *)$ y tenemos que $(G, *)$ es un grupo cíclico, es decir, isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Supongamos ahora que no hay elementos de orden p^2 . Luego, por el teorema de Lagrange, todo elemento, diferente del neutro, tiene orden p . Podemos escoger $x, y \in G - \{I_G\}$, tales que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{I_G\}$. Denotemos por $H = \langle x \rangle$ y por $K = \langle y \rangle$. Como G es Abeliano, $HK = KH$, es decir HK es subgrupo de G . Además como $\#(H \cap K) = 1$, tenemos que $\#HK = |H||K| = p^2$ y luego $HK = G$. Consideremos la función

$$\phi : H \times K \rightarrow G = HK : (x^a, y^b) \mapsto x^a y^b,$$

donde $H \times K$ es producto directo de los dos grupos cíclicos, la cual es claramente un homomorfismo de grupos (gracias a que G es Abeliano) sobreyectivo. Por otro lado, como $H \cap K = \{I_G\}$, tenemos que es también inyectiva, es decir, $G \cong H \times K$ y, como consecuencia, G es producto directo interno de sus subgrupos H y K . En este caso, $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Podemos resumir estos resultados de la siguiente manera :

Proposición 17.1.1. — *Sea p un número primo.*

- (i) *Si $(G, *)$ es un grupo de orden p , entonces $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*
- (ii) *Si $(G, *)$ es un grupo de orden p^2 , entonces $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ó bien $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Ahora, supongamos que tenemos un grupo $(G, *)$ de orden pq , donde $p < q$ son número primos. Si existe un elemento de orden pq , entonces $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Supongamos ahora que no existe tal elemento. Por el teorema de Lagrange, todo elemento de G , diferente del neutro, tiene orden p ó q . Por el teorema de Cauchy, existe un elemento $x \in G$ de orden p y existe un elemento $y \in G$ de orden q . Sean $H = \langle x \rangle$ y por $K = \langle y \rangle$. Es claro

que $H \cap K = \{I_G\}$ ya que todo elemento de $H - \{I_G\}$ es de orden p y todo elemento de $K - \{I_G\}$ es de orden q . De esta manera, $\#HK = |H||K| = pq$ y luego

$$G = HK = \{x^a y^b : a \in \{0, 1, \dots, p-1\}, b \in \{0, 1, \dots, q-1\}\}$$

Tenemos que H es un p -subgrupo de Sylow y K es un q -subgrupo de Sylow. En este caso, por el teorema de Sylow,

$$N_q = 1 + rq, \text{ cierto } r \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

y además

$$N_q/pq$$

luego,

$$N_q \in \{1, p, q, pq\}$$

Observemos que $N_q = 1 + rq$ no puede ser q ni puede ser pq ya que en tal caso estaremos diciendo que 1 es divisible por q . Por otro lado, si $N_q = p$, entonces $p = N_q = 1 + rq$ para algún $r > 0$, una contradicción al hecho que $p < q$. De esta manera, tenemos que $N_q = 1$ y, como consecuencia del teorema de Sylow, K es un subgrupo normal de G . Esto nos dice que existe un valor $\alpha \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$ de manera que

$$x * y * x^{-1} = y^\alpha$$

De esta manera, tenemos que

$$G = \langle x, y : x^p, y^q, x * y * x^{-1} y^{-\alpha} \rangle$$

Si $\alpha = 1$, entonces tenemos que G es Abeliano ya que $x * y = y * x$. En este caso, podemos proceder de la misma manera como lo hicimos en el caso p^2 para obtener que $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ (lo último como consecuencia de la proposición 7.1.5). Esta es la situación obligada si tenemos que q no es congruente a 1 módulo p . En efecto, si estamos bajo tal condición, entonces

$$N_p = 1 + sp, \text{ cierto } s \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

y

$$N_p/pq$$

Pero N_p no puede ser p ni pq ya que en tal caso 1 sería divisible por p . Luego, $N_p \in \{1, q\}$. Pero $q = N_p = 1 + sp$ dice que q es congruente a 1 módulo p lo que contradice nuestro supuesto, luego $N_p = 1$ y, como consecuencia, H también es subgrupo normal de G . Luego, debe existir $\beta \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que

$$y * x * y^{-1} = x^\beta$$

y luego, si $\beta > 1$, tenemos que

$$y * x = x^\beta * y = x^{\beta-1} * x * y = x^{\beta-1} * y^\alpha * x$$

de lo cual

$$y = x^{\beta-1} * y^\alpha$$

es decir, $x^{\beta-1} \in H \cap K = \{I_G\}$, con lo cual obtenemos una contradicción. En resumen :

Proposición 17.1.2. — Sean $p < q$ números primos y $(G, *)$ un grupo de orden pq . Entonces

(i) G es Abeliano y

$$G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$$

(ii) G no es Abeliano y existe $\alpha \in \{2, 3, \dots, q-1\}$ tal que

$$G = \langle x, y : x^p, y^q, x * y * x^{-1}y^{-\alpha} \rangle$$

(iii) Si q no es congruente a 1 módulo p , entonces estamos en el caso (i).

Ejemplo 17.1.3. — Sea $(G, *)$ un grupo de orden 10. En este caso $p = 2$, $q = 5$ y q es congruente a 1 módulo p . Si $(G, *)$ es Abeliano, entonces tenemos

$$G \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

En el caso que G no sea Abeliano, entonces las posibilidades para α son $\alpha = 2, 3, 4$.

El caso $\alpha = 4$ nos da el grupo dihedral

$$G = \langle x, y : x^2, y^5, (x * y)^2 \rangle \cong D_5$$

En el caso $\alpha = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \langle x, y : x^2, y^5, x * y = y^2 * x \rangle = \\ &= \langle x, y : x^2, y^5, y^{-1} * x = x * y^{-2} \rangle \end{aligned}$$

si tomamos $z = y^3$, entonces

$$G = \langle x, z : x^2, z^5, z^3 * x = x * z \rangle$$

que corresponde al caso $\alpha = 3$. Es decir, en el caso de orden 10 sólo tenemos 3 grupos no isomorfos.

Ejercicio 17.1.4. — Determinar los grupos de orden 8 no isomorfos.

17.2. Aplicación 2

Consideremos un grupo Abeliano finito $(G, *)$ y un entero positivo n que divide al orden de G . Si escribimos

$$|G| = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$$

la descomposición en números primos diferentes, entonces

$$n = p_{j_1}^{s_1} p_{j_2}^{s_2} \cdots p_{j_b}^{s_b}$$

donde

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_b \leq m$$

y

$$s_i \in \{1, 2, \dots, r_{j_i}\}$$

Por el teorema de Sylow, existen subgrupos H_1, \dots, H_b , donde

$$|H_i| = p_{j_i}^{s_i}, \quad i = 1, \dots, b$$

Consideremos $\mathcal{H} = H_1 H_2 \cdots H_b = \{x_1 * x_2 * \cdots * x_b : x_j \in H_j\}$. Al ser G un grupo Abeliano, uno puede verificar que \mathcal{H} es realmente un subgrupo de G y de orden n , luego el subgrupo deseado. De esta manera, tenemos el siguiente recíproco del teorema de Lagrange para grupos Abelianos.

Proposición 17.2.1. — Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano finito y n un entero positivo que divide al orden de G . Entonces existe un subgrupo de G de orden n .

Ejercicio 17.2.2. — Verificar en la construcción dada anteriormente que existe un isomorfismo entre el producto directo $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_b$ y el grupo \mathcal{H} . Deducir que todo grupo Abeliano finito es siempre isomorfo a un grupo de la forma

$$(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^{a_1} \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})^{a_r}$$

Comparar esto con la descomposición hecha en el capítulo anterior, sección **Grupos Abelianos libres**.

17.3. Aplicación 3

Definición 17.3.1. — Diremos que un grupo es *simple* si no tiene subgrupos no triviales que sean normales.

Ejemplo 17.3.2. — Ejemplos de grupos simples son los siguientes.

- (i) todo grupo cíclico de orden un número primo es un grupo simple, pero un grupo cíclico de orden un número que no sea primo no es simple.
- (ii) El grupo dihedral

$$D_n = \langle x, y : x^2, y^n, (x * y)^2 \rangle$$

tiene al subgrupo normal $\langle y \rangle$, luego no es simple.

- (iii) Por la clasificación de los grupos Abelianos finitos, vemos que todo grupo Abeliano de orden que no sea un número primo no puede ser simple.
- (iv) Si tenemos un grupo de orden p^n , donde p es un número primo y $n \geq 2$, entonces por el teorema de Sylow este grupo no es simple ya que posee un subgrupo de orden p^{n-1} que es normal.
- (v) Si tenemos un grupo de orden pq , donde $p < q$ son números primos, entonces ya habíamos visto que necesariamente $N_q = 1$ y luego todo q -subgrupo de Sylow es normal, luego el grupo no puede ser simple.

- (vi) Si tenemos un grupo de orden $p^n q$, donde $p < q$ son números primos tales que q no es congruente a 1 módulo p y $n \geq 2$, entonces el grupo no es simple. En efecto, tenemos que $N_p = 1 + rp$ para algún entero $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y además debe dividir $p^n q$. Esto obliga a tener que los factores primos de N_q están contenidos en $\{p, q\}$. Como 1 no es divisible por p , entonces $N_p \in \{1, q\}$. Pero $N_p = q$ nos dice que q es congruente a 1 módulo p , lo cual hemos descartado en nuestra hipótesis. Luego, $N_p = 1$ y, como consecuencia, un p -subgrupo de Sylow es subgrupo normal.
- (vii) Sea $(G, *)$ un grupo de orden $2q^n$, donde $q > 2$ es un número primo y $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Entonces G no es simple. En efecto, consideremos $N_q = 1 + rq$, $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$, que debe dividir $2q^n$. Esto obliga a tener que los factores primos de N_q están contenidos en $\{2, q\}$. Como 1 no es divisible por q , debemos tener $N_q \in \{1, 2\}$. Pero $N_q = 2$ no es posible para ningún valor de r , luego $N_q = 1$.
- (viii) Consideremos un grupo de orden $6q$, donde $q > 5$ es un número primo. Entonces el grupo no puede ser simple. En efecto, en este caso, $N_q = 1 + qr$, cierto $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que divide $6q$. Como 1 no es divisible por q , tenemos que $N_q \in \{1, 2, 3, 6\}$. Es claro que no podemos lograr los valores 2, 3, 6 con ningún r , luego $N_q = 1$ y todo q -subgrupo de Sylow es normal.
- (ix) Ningún grupo de orden 30 es simple. En efecto, en este caso como $30 = 2 \times 3 \times 5$, miremos $N_5 = 1 + 5r$, cierto $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que divide 30. Como 1 no es divisible por 5, tenemos que $N_5 \in \{1, 6\}$. Si $N_5 = 1$ tenemos que todo 5-subgrupo de Sylow es normal. Supongamos por el contrario que $N_5 = 6$. Entonces tenemos $6 \times 4 = 24$ elementos diferentes de orden 5 en nuestro grupo (diferentes del neutro). Por otro lado, $N_3 = 1 + 3t$, cierto $t \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, divide 30, luego $N_3 \in \{1, 10\}$. Si $N_3 = 1$, entonces todo 3-subgrupo de Sylow es normal. Si colocamos $n_3 = 10$, tendremos $2 \times 10 = 20$ elementos diferentes de orden 3. En total ya tendríamos $1 + 24 + 20 > 30$ elementos diferentes en el grupo, una contradicción.
- (x) Ningún grupo de orden 36 es simple. En efecto, como $36 = 2^2 3^2$, entonces $N_3 = 1 + 3r$, algún $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$, divide 36. Como 1 no es divisible por 3, $N_3 \in \{1, 2, 4\}$. Pero $N_3 = 2$ no puede lograrse con ninguna de las posibles r . Así, $N_3 \in \{1, 4\}$. Si $N_3 = 1$, entonces todo 3-subgrupo de Sylow es normal. Supongamos que $N_3 = 4$. Consideremos un 3-subgrupos de Sylow, digamos H . Tenemos que $|H| = 9$. Consideremos el conjunto $X = \{g * H * g^{-1} : g \in G\}$ que tiene cardinalidad $N_3 = 4$. Miremos la acción

$$\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$$

- dada por conjugación. Como $|G| = 36 > 24 = |\text{Perm}(X)|$, tenemos que $K = \text{Ker}(\phi)$ es un subgrupo normal de orden mayor que 1. Pero también tenemos que K es necesariamente un subgrupo de $N_G(H)$, y como $[G : N_G(H)] = N_3 = 4$, tenemos que K es subgrupo propio de G . Entonces K es subgrupo normal no trivial.
- (xi) Ningún grupo de orden 48 es simple. Como $48 = 2^4 3$, podemos mirar $N_3 = 1 + 3r$, algún $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$, dividiendo 48. De esta manera obtenemos $N_3 \in \{1, 3\}$. Si $N_3 = 1$, entonces todo 3-subgrupo de Sylow es normal. Supongamos que $N_3 = 3$ y tomemos dos 3-subgrupos de Sylow diferentes, digamos H_1 y H_2 . Luego,

$|H_j| = 16$. Como

$$48 \geq \#H_1H_2 = \frac{|H_1 \times H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$$

obtenemos que

$$|H_1 \cap H_2| \geq \frac{16^2}{48} > 5$$

Por el teorema de Lagrange, $|H_1 \cap H_2|$ divide $|H_1| = 16$ y, como consecuencia, $|H_1 \cap H_2| = 8$ (ya que $H_1 \neq H_2$). De esta manera, $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de índice 2 en H_j , $j = 1, 2$, y como consecuencia, subgrupo normal. Esto nos dice que H_1 y H_2 son subgrupos de $N_G(H_1 \cap H_2)$. Es decir, $|N_G(H_1 \cap H_2)|$ debe dividir 48, y ser divisible por 16 (al contener H_1 y H_2) y por el orden del grupo $\langle H_1, H_2 \rangle$, generado por H_1 y H_2 , que tiene la forma $16k$, con cierto $k \geq 2$ (ya que $H_1 \neq H_2$). De esto vemos que $N_G(H_1 \cap H_2) = G$ y, en particular, $H_1 \cap H_2$ es subgrupo normal no trivial de G .

(xii) Sea $(G, *)$ un grupo de orden 160. Entonces G no es simple. En efecto, como $160 = 2^5 \cdot 5$, miremos $N_5 = 1 + 5r$, cierto $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$, que divide 160. Tenemos que $N_5 \in \{1, 5\}$. Si $N_5 = 1$, entonces todo 5-subgrupo de Sylow es normal. Supongamos que $N_5 = 5$ y escojamos un 5-subgrupo de Sylow H , luego $|H| = 2^5 = 32$. Además, tenemos por el teorema de Sylow que $[G : N_G(H)] = N_5 = 5 > 1$, con lo cual vemos que $N_G(H)$ es subgrupo propio de G . Consideremos el conjunto X formado por todos los 5-subgrupos de Sylow, luego $\#X = N_5 = 5$, y la acción por conjugación $\phi : (G, *) \rightarrow (\text{Perm}(X), \circ)$. Sea K el subgrupo normal de G dado por $\text{Ker}(\phi)$. Como todo $g \in K$ debe fijar H , tenemos que $g \in N_G(H)$, es decir, $K < N_G(H)$ y luego $K \neq G$. Por otro lado, como $160 = |G| > 120 = |\text{Perm}(X)|$, tenemos que ϕ no es monomorfismo, es decir, $K \neq \{I_G\}$. Luego, K es subgrupo normal no trivial de G .

Ejercicio 17.3.3. — Encontrar todos los grupos simples de orden menor que 60. Verificar que \mathcal{A}_5 es grupo simple de orden 60.

17.4. Aplicación 4

Definición 17.4.1. — Diremos que un grupo G es *orientable* si existe un homomorfismo sobreyectivo $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En tal caso el par (G, ϕ) es llamado un grupo *orientado*. El núcleo $\text{Ker}(\phi) := G^+$ es llamado el subgrupo de elementos que preservan orientación. Es claro que G^+ es un subgrupo de índice dos y luego un subgrupo normal de G . Los elementos de $G - G^+$ son llamados elementos que revierten orientación.

Una consecuencia directa de los teoremas de Sylow es el siguiente :

Proposición 17.4.2. — Sea (G, ϕ) un grupo orientado finito tal que 2 divide $|G|$. Si 2^n es la máxima potencia de 2 que divide a G , entonces G tiene a los más 2^{n-1} elementos de orden 2 que revierten orientación y que no son conjugados en G .

Demonstración. — Denotemos por H un 2-subgrupo de Sylow. Sabemos que cada elemento de orden 2 en G tiene un conjugado en H . Luego debemos contar cuantos elementos de H pueden revertir orientación. Ya que el producto de dos elementos de H preserva orientación, tenemos que $H^+ := H \cap G^+$ es de índice 2 en H , es decir, $|H^+| = 2^{n-1}$ y como tenemos la unión disjunta $H = H^+ \cup T$, donde T denota el subconjunto de los elementos de H que revierten orientación, tenemos que $\#T = 2^{n-1}$. \square

Observación 17.4.3. — El resultado anterior ha sido utilizado por G. Gromadzki (On ovals on Riemann surfaces, *Revista Matemática Iberoamericana* **16** (2000), 515-527) para obtener información sobre el número máximo de ovalos de reflexiones en superficies de Riemann cerradas.

PARTE III

ANILLOS

Hasta ahora hemos estudiado estructuras donde sólo está involucrada una operación binaria. Ahora miraremos estructuras donde aparecen dos estructuras.

CAPÍTULO 18

DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Definición 18.0.4. — Un *anillo* es por definición un triple $(R, +, \cdot)$ donde R es un conjunto no vacío y $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ son dos operaciones binarias sobre R , llamadas suma y multiplicación respectivamente, tales que :

- (1) $(R, +)$ es un grupo abeliano ;
- (2) vale la propiedad asociativa para la operación de multiplicación, es decir, para $r, s, t \in R$ se tiene

$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$$

- (3) para $r, s, t \in R$ vale la propiedad distributiva :

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

$$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$$

Observación 18.0.5. — Al neutro de la operación de suma lo denotaremos por 0 , al inverso de $r \in R$ respecto a la suma lo denotaremos por $-r$ y rs denotará $r \cdot s$. Si $r \in R$ y $n > 0$ es un entero, entonces denotaremos por r^n al proceso de multiplicar r consigo mismo n veces.

Ejercicio 18.0.6. — Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Verificar las siguientes propiedades :

- (i) $r0 = 0r = 0$, para todo $r \in R$; concluir que si $\#R > 1$, entonces 0 no puede ser neutro multiplicativo.
- (ii) $r(-s) = (-r)s = -(rs)$, para todo $r, s \in R$; concluir que $(-r)(-s) = rs$.

Ejemplo 18.0.7. — Los primeros ejemplos de anillos que tenemos son \mathbb{Z} , el anillo de los números enteros ; \mathbb{Q} , el anillo de los números racionales ; \mathbb{R} , el anillo de los números reales ; \mathbb{C} , el anillo de los números complejos.

Ejemplo 18.0.8. — Otro ejemplo es considerar un entero positivo $m > 0$ y considerar $m\mathbb{Z} = \{mn : n \in \mathbb{Z}\}$, el conjunto de los enteros múltiplos de m . Usando las operaciones usuales de suma y multiplicación de números enteros, se tiene un anillo.

De este último ejemplo observamos, tomando $m > 1$, que hay anillos que no poseen un neutro para la multiplicación.

Definición 18.0.9. — Diremos que un anillo tiene *unidad* si existe un neutro para la multiplicación, el cual denotaremos por 1.

Ejercicio 18.0.10. — Verificar que la unidad es única.

Por otro lado, si miramos el anillo \mathbb{Z} , entonces podemos observar que un anillo con unidad puede que no tenga inversos multiplicativos de sus elementos diferentes de 0.

Definición 18.0.11. — Diremos que un anillo con unidad con la propiedad que todo sus elementos diferentes de cero tienen inverso multiplicativo es un *anillo de división*.

El anillo \mathbb{Z} es un dominio entero, el cual no es de división. Pero \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} son dominios enteros que además son de división.

Ejercicio 18.0.12. — Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo con unidad y sea $r \in R$ un elemento que posee un inverso multiplicativo en R . Verificar que tal inverso multiplicativo es único.

Observación 18.0.13. — Si $r \in R$, entonces denotaremos por $r^{-1} \in R$ a su inverso multiplicativo, en caso de existir. Así, si $r \in R$ posee un inverso r^{-1} y $n < 0$ es un entero, entonces denotaremos por r^n al elemento $(r^{-1})^{-n}$.

Ejemplo 18.0.14 (Anillo de un grupo). — Sea $(G, *)$ un grupo y $(R, +, \cdot)$ un anillo. Formamos el conjunto $R[G]$ cuyos elementos son combinaciones lineales finitas de elementos de G con coeficientes en R , es decir, objetos de la forma

$$r_1g_1 + \cdots + r_ng_n$$

donde $r_j \in R$ y $g_j \in G$. Definimos la suma como,

$$(r_1g_1 + \cdots + r_ng_n) + (s_1g_1 + \cdots + s_ng_n) = (r_1 + s_1)g_1 + \cdots + (r_n + s_n)g_n$$

y el producto como

$$\sum_{j=1}^n r_jg_j \sum_{i=1}^m s_ih_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m r_js_ig_j * h_i$$

De esta manera obtenemos un anillo $(R[G], +, \cdot)$ llamado el *anillo del grupo G respecto al anillo R* .

Ejercicio 18.0.15. — Si $G = \langle x : x^3 \rangle$ y $R = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, describir los elementos de $R[G]$ y las tablas de suma y multiplicación.

Ejemplo 18.0.16 (Anillo de polinomios). — Consideremos un anillo $(R, +, \cdot)$ y una variable desconocida $x \notin R$. Formemos el conjunto $R[x]$ formado por todas las series

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j$$

donde asumimos que sólo un número finito de los coeficientes r_j pueden ser diferente de cero. Llamamos a cada uno de esos objetos un *polinomio* con coeficientes en R y variable desconocida x . Al mayor valor $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que $r_n \neq 0$ le llamamos el *grado del polinomio*. Usualmente no escribimos los términos donde $r_j = 0$; por ejemplo si $r_1 = 2$, $r_3 = 1$ y todos los demás $r_j = 0$, entonces escribimos este polinomio como $2x + x^3$. También acostumbramos a denotar $r_0 x^0$ como r_0 . Definimos la suma de polinomios como

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j \right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (r_j + s_j) x^j \right)$$

y definimos el producto de polinomios como

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} r_j s_i \right) x^k \right)$$

Obtenemos de esta manera un anillo, llamado el *anillo de polinomios con coeficientes en el anillo R* .

Ejercicio 18.0.17. — Verificar que el anillo $R[x]$ tiene unidad sí y sólo si R lo tiene.

Ejemplo 18.0.18. — Siguiendo con el ejemplo anterior, podemos partir de un anillo R y formar el nuevo anillo $R[x]$. Pero ahora podemos formar el anillo $R[x][y]$, es decir, los polinomios en la variable y y coeficientes en $R[x]$. En forma inductiva, podemos formar el anillo $R[x_1][x_2] \cdots [x_n]$ formado por los polinomios en la variable x_n y coeficientes en el anillo $R[x_1][x_2] \cdots [x_{n-1}]$. Los elementos de $R[x_1][x_2] \cdots [x_n]$ son llamados polinomios en varias variables y coeficientes en R . Usualmente escribimos este anillo como $R[x_1, \dots, x_n]$.

Ejemplo 18.0.19. — Consideremos un anillo $(R, +, \cdot)$ y un entero $n \geq 1$. Consideremos el conjunto $M(n, R)$ formado por todas las matrices de tamaño $n \times n$ y coeficientes en R . La suma y producto usual de matrices hacen de este un anillo. La matriz 0 , es decir, todos sus coeficientes igual a $0 \in R$, es el $0 \in M(n, R)$. En este caso, si R tiene una unidad $1 \in R$, entonces la matriz identidad es unidad en $M(n, R)$. Supongamos $n \geq 2$,

entonces se puede ver que la operación de multiplicación no es conmutativa; por ejemplo, si $n = 2$, consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces tenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este último ejemplo nos muestra que existen anillos en los cuales la operación de multiplicación no es conmutativa.

Definición 18.0.20. — Diremos que un anillo R es un *anillo conmutativo* si para todo par $x, y \in R$ vale que $xy = yx$.

El ejemplo anterior también nos muestra que es posible tener dos elementos diferentes de 0 que al multiplicarlos obtenemos como resultado 0.

Definición 18.0.21. — Sea R un anillo. Dos elementos $x, y \in R - \{0\}$ tales que $xy = 0$ son llamados *divisores de cero del anillo*.

Ejercicio 18.0.22. — Ver que un anillo de división no puede contener divisores de cero.

Definición 18.0.23. — Un anillo con unidad, sin divisores de cero y conmutativo es llamado un *dominio entero*.

Ejercicio 18.0.24. — Todo anillo de división conmutativo es un dominio entero.

Definición 18.0.25. — Un anillo de división conmutativo es llamado un *cuerpo*.

Así, \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} son ejemplos de cuerpos.

Ejemplo 18.0.26. — Consideremos el grupo abeliano \mathbb{R}^4 con la suma usual dada componente a componente, es decir,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

Si denotamos por

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1),$$

entonces podemos escribir

$$(a, b, c, d) = a1 + bi + cj + dk$$

Usaremos la identificación $a1 = a$, luego

$$(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$$

En esta notación la suma queda expresada como :

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k) + (y_1 + y_2i + y_3j + y_4k) \\ & \parallel \\ & (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i + (x_3 + y_3)j + (x_4 + y_4)k \end{aligned}$$

Procedemos a definir una multiplicación como sigue :

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k) \cdot (y_1 + y_2i + y_3j + y_4k) \\ & \parallel \\ & (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4) + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)i \\ & + \\ & (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)j + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)k \end{aligned}$$

Obtenemos de esta manera un anillo con unidad, siendo esta 1. Denotamos este anillo por \mathcal{Q} y le llamamos el anillo de los *cuaternios*. En este anillo tenemos las propiedades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j,$$

en particular, este anillo no es conmutativo. Por otro lado, si tomamos un elemento diferente de 0, digamos $a + bi + cj + dk \in \mathcal{Q}$, entonces este tiene inverso multiplicativo dado por

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dk)$$

En este ejemplo tenemos un anillo que es casi un cuerpo, pero falla la conmutatividad de la multiplicación.

Definición 18.0.27. — Un anillo de división no conmutativo es llamado un *cuerpo no conmutativo* ó *semicuerpo*.

Ejemplo 18.0.28. — Consideremos una colección de anillos $(R_1, +, \cdot), \dots, (R_n, +, \cdot)$ y formemos el producto cartesiano $R_1 \times \dots \times R_n$. Consideremos la suma y multiplicación definidas componente a componente, es decir,

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_n) + (s_1, \dots, s_n) &= (r_1 + s_1, \dots, r_n + s_n) \\ (r_1, \dots, r_n) \cdot (s_1, \dots, s_n) &= (r_1s_1, \dots, r_ns_n) \end{aligned}$$

donde $r_j, s_j \in R_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Así obtenemos un anillo llamado el *producto directo* de los anillos. Observemos que este anillo tiene unidad sí y sólo si cada anillo

componente lo tiene. Por otro lado, si todos los anillos R_j son dominios enteros, y $n \geq 2$, entonces el producto directo ya no es dominio entero ya que $(1, 0, \dots, 0) \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$.

Ejercicio 18.0.29. — Consideremos un entero positivo $d > 0$ con la propiedad que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$. Consideremos los conjuntos

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Consideramos la suma usual de números complejos y el producto usual de números complejos. Verificar que los anteriores son dominios enteros, que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es un cuerpo y $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ no lo es. Verificar que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es el cuerpo más pequeño dentro de \mathbb{R} que contiene al dominio entero $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Ejercicio 18.0.30. — Por cada entero positivo $m > 0$ consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Definamos la multiplicación $a \cdot b$, donde $a, b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, como el resto módulo m del entero $ab \in \mathbb{Z}$. Verificar que de esta manera obtenemos un anillo con unidad y conmutativo. Verificar que este anillo tiene divisores de cero sí y sólo si m no es un número primo. En el caso que m es un número primo, verificar que este es de hecho un cuerpo. Más adelante daremos un argumento de este hecho.

La situación del ejemplo anterior es caso particular del siguiente hecho.

Teorema 18.0.31. — *Todo dominio entero finito es un cuerpo.*

Demonstración. — Sea $R = \{0, 1, r_1, \dots, r_n\}$. Basta verificar que todo elemento diferente de 0 tiene un inverso multiplicativo. Para eso, sea $r \in R, r \neq 0$. Como la colección

$$r, rr_1, \dots, rr_n$$

son dos a dos diferentes y distintos de 0, alguno de ellos debe ser igual a 1. \square

En algunos de los ejemplos anteriores hemos visto que hay anillos que están contenidos en otros anillos (con las operaciones inducidas). Estos son llamados *subanillos*.

Ejercicio 18.0.32. — Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y $S \subset R$ un subconjunto no vacío. Verificar que S define un subanillo de R sí y sólo si

- (i) para todo $s \in S, -s \in S$;
- (ii) si $s, r \in S$, entonces $s - r \in S$;
- (iii) si $r, s \in S$, entonces $sr \in S$.

Ejercicio 18.0.33. — Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y $r \in R$. Consideremos el subconjunto

$$I_r = \{rx : x \in R\}$$

Verificar que I_r es un subanillo de R . Verificar además que el grupo abeliano $(I_r, +)$ está generado por $\{r^n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$

Ejercicio 18.0.34. — Verificar que la intersección arbitraria de subanillos de un anillo es un subanillo. Sea $r \in R$. Sea $\langle r \rangle$ la intersección de todos los subanillos de R que contienen a r . Entonces $\langle r \rangle$ es el subanillo más pequeño de R que contiene a r .

Ejemplo 18.0.35. — Sea R un anillo con la propiedad que $x^2 = x$ es válido para todo $x \in R$. Si consideramos $r, s \in R$ obtenemos que

$$r + s = (r + s)^2 = r^2 + s^2 + rs + sr = r + s + rs + sr$$

$$r - s = (r - s)^2 = r^2 + s^2 - rs - sr = r + s - rs - sr$$

de donde obtenemos

$$rs + sr = 0 \quad \text{y} \quad rs + sr = 2s$$

es decir, $s + s = 0$, de donde $s = -s$ y luego $rs = sr$, es decir, R es un anillo conmutativo.

Ejemplo 18.0.36. — Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y consideremos el conjunto $\text{Hom}(G)$ formado por todos los homomorfismos de grupo $h : G \rightarrow G$ (endomorfismos). Usando la suma

$$(f + g)(x) := f(x) * g(x)$$

y la regla de composición de funciones como multiplicación, tenemos el anillo de endomorfismos de G . En este caso, el neutro aditivo es dado por la función $0(x) = e$, donde $e \in G$ denota el neutro del grupo G . El inverso aditivo de f es el homomorfismo $-f(x) := f(x)^{-1}$. Este anillo tiene unidad dada por el automorfismo identidad. En general este anillo no es conmutativo, pero por ejemplo $\text{Hom}(\mathbb{Z}, +)$ sí lo es ya que cada homomorfismo de grupo para \mathbb{Z} es de la forma $f(x) = ax$, para cierto $a \in \mathbb{Z}$.

CAPÍTULO 19

HOMOMORFISMOS DE ANILLOS

Al igual que en el caso de grupos, existen funciones que nos permiten relacionar anillos. Estas funciones deben preservar las dos operaciones binarias en juego. De manera más precisa :

Definición 19.0.37. —

- (1) Dados dos anillos $(R, +, \cdot)$ y $(S, +, \cdot)$, diremos que una función $h : R \rightarrow S$ es un *homomorfismo de anillos* si para todo par $r_1, r_2 \in R$ valen las siguientes :
 - (i) $h(r_1 + r_2) = h(r_1) + h(r_2)$
 - (ii) $h(r_1 r_2) = h(r_1) h(r_2)$
- (2) Si el homomorfismo de anillos $h : R \rightarrow S$ es biyectiva, entonces decimos que es un *isomorfismo de anillos*, en cuyo caso decimos que los anillos son *anillos isomorfos*.

Ejercicio 19.0.38. —

- (i) Si $h : R \rightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, entonces $h(0) = 0$, $h(-r) = -h(r)$.
- (ii) Si $h : R \rightarrow S$ es un isomorfismo de anillos, entonces $h^{-1} : S \rightarrow R$ también lo es.
- (iii) La propiedad de ser isomorfos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los anillos.
- (iv) Si $h : R \rightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, entonces

$$\text{Ker}(h) = \{r \in R : h(r) = 0\}$$

es un subanillo de R , llamado el núcleo de h y

$$\text{Im}(h) = \{s \in S : \text{existe } r \in R \text{ tal que } h(r) = s\}$$

es un subanillo de S , llamado la imagen de h .

- (v) Sea $h : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Verificar que la imagen de subanillos de R son subanillos de S y, recíprocamente, la preimagen de subanillos de S son subanillos de R .

- (vi) Si $h : R \rightarrow S$ es homomorfismo de anillos y R tiene unidad 1, entonces $h(1) = x$ debe satisfacer la ecuación $x^2 = x$ en S . Concluir que
- las funciones $h : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} : n \mapsto 2n$, y $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto 2n$, no son homomorfismo de anillos; y
 - determinar todos los homomorfismos de anillos $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- (vii) Calcular $\text{Hom}((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +))$ y verificar que este anillo no es isomorfo al anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ejemplo 19.0.39. — Sea R un anillo y variables x, y para formar los anillos de polinomios $R[x, y]$ y $R[y, x]$. Los polinomios en $R[x, y]$ son de la forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^j x^i \right) y^j$$

y los de $R[y, x]$ son de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_i^j y^j \right) x^i$$

Podemos considerar la función $\phi : R[x, y] \rightarrow R[y, x]$, definida como

$$\phi \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^j x^i \right) y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_i^j y^j \right) x^i$$

la cual define un isomorfismo de anillos. De esta manera, podemos hablar indistintamente de uno u otro y usaremos cualquiera de las siguientes notaciones para representar un polinomio en las variables x, y y coeficientes en R :

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_i^j x^i y^j = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i^j y^j x^i$$

Lo anterior se generaliza a más variables.

Ejercicio 19.0.40. — Verificar los detalles del ejemplo anterior.

Ejemplo 19.0.41. — Consideremos un anillo conmutativo R y su anillo de polinomios en una variable $R[x]$. Supongamos que S es un subanillo de R . Entonces tenemos que el anillo de polinomios $S[x]$ es un subanillo de $R[x]$. Para cada $r \in R$, definamos la función

$$E_r : S[x] \rightarrow R : \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j$$

Recordemos que los coeficientes a_j son igual a 0 con la posible excepción de un número finito de índices, luego la función anterior tiene sentido. Por la definición de suma y multiplicación de polinomios podemos verificar que E_r es de hecho un homomorfismo de anillos, llamado el *homomorfismo de evaluación en r* . Podemos además ver que si S

tiene unidad 1, entonces tenemos el polinomio $x \in S[x]$, para el cual $E_r(x) = r$. Si identificamos S con los polinomios de grado cero, entonces $E_r : S \rightarrow R : s \mapsto s$ es un isomorfismo. El núcleo del homomorfismo E_r está formado por todos aquellos polinomios $p \in S[x]$ tales que $E_r(p) = 0$. Diremos en tal caso que r es un *cerro del polinomio* p .

Si consideramos por ejemplo el polinomio $1 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$, entonces este no tiene ceros en \mathbb{R} , pero si tiene ceros en \mathbb{C} . En forma similar, si tomamos $S = \mathbb{Q}$, entonces el polinomio $2 - x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ no tiene ceros en \mathbb{Q} , pero si los tiene en \mathbb{R} . Así, podemos ver que es probable que un polinomio $p \in S[x]$ no tenga ceros en S , pero que exista un anillo R , conteniendo a S como subanillo, donde si tiene ceros. En un capítulo posterior nos preocuparemos de este problema para el caso en que nuestros anillos son cuerpos ya que esto simplificará mucho las operaciones.

Ejercicio 19.0.42. — Verificar que

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow M(2, \mathbb{R}) : x + iy \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo.

CAPÍTULO 20

IDEALES Y ANILLOS COCIENTES

En el capítulo de grupos vimos que hay ciertos subgrupos muy especiales, estos son los subgrupos normales. Estos subgrupos tienen la propiedad de que el cociente resulta ser un grupo, el grupo cociente. A nivel de anillos podemos hacer lo mismo. Supongamos que tenemos un anillo $(R, +, \cdot)$ y un subanillo S de R . Entonces, al ser $(R, +)$ un grupo abeliano y S subgrupo de $(R, +)$, tenemos que este es subgrupo normal de manera trivial. Así, podemos formar el grupo cociente $(R/S, +)$ que es también un grupo abeliano. Tenemos la proyección natural

$$\pi : R \rightarrow R/S : r \mapsto r + S$$

que es un homomorfismo sobreyectivo de grupos. Hasta ahora no hemos involucrado la operación de multiplicación. Nuestra pregunta natural es :

¿Es posible dotar a R/S de una multiplicación que le transforme en un anillo de manera que π resulte un homomorfismo de anillos ?

Observemos que la condición $\pi(r_1 r_2) = \pi(r_1)\pi(r_2)$ es equivalente a tener la definición de multiplicación siguiente :

$$r_1 r_2 + S = (r_1 + S)(r_2 + S) = r_1 r_2 + r_1 S + S r_2$$

Tomando $r_2 = 0$ obtenemos que $r_1 S \subset S$ y tomando $r_1 = 0$ obtenemos que $S r_2 \subset S$. Así, condiciones necesarias para que tenga sentido la multiplicación anterior es que

$$rS \subset S, \quad Sr \subset S$$

valga para todo $r \in S$. En forma recíproca, si valen las dos condiciones necesarias, entonces tenemos que $\pi(r_1 r_2) = \pi(r_1)\pi(r_2)$ es válida para todos $r_1, r_2 \in R$.

Por otro lado, una vez que tenemos la validez de lo anterior, entonces es fácil ver que la propiedad distributiva es válida.

Definición 20.0.43. — Diremos que un subanillo S de un anillo R es un *ideal izquierdo* si para todo $r \in R$ vale que $rS \subset S$ y es un *ideal derecho* si para todo $r \in R$ vale que $Sr \subset S$. Un *ideal* es un subanillo que es ideal izquierdo y derecho.

Luego, lo anterior nos está diciendo lo siguiente : El tipo de anillos en el cual estaremos interesados es el siguiente.

Proposición 20.0.44. — R/S es un anillo (llamado anillo cociente), que hace de la proyección $\pi : R \rightarrow R/S$ un homomorfismo de anillos, sí y sólo si S es un ideal de R .

De lo anterior vemos que el equivalente, en la teoría de anillos, de los subgrupos normales son los ideales. También nos dimos cuenta que podemos ver cada subgrupo normal de un grupo como el núcleo de algún homomorfismo y que todo núcleo de un homomorfismo de grupos es subgrupo normal. Para los anillos tenemos la situación similar. Lo anterior nos permite ver cada ideal como el núcleo de algún homomorfismo de anillos. Por otro lado, si $h : R \rightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, entonces $\text{Ker}(h)$ es un ideal de R . En efecto, si $r_1, r_2 \in \text{Ker}(h)$, entonces $h(r_1 r_2) = h(r_1)h(r_2) = 0$, luego $r_1 r_2 \in \text{Ker}(h)$, obteniendo que h es subanillo. Por otro lado, si $r \in R$ y $s \in \text{Ker}(h)$, entonces $h(rs) = h(r)h(s) = 0$, $h(sr) = h(s)h(r) = 0$ diciendo que $rs, sr \in \text{Ker}(h)$, es decir, $\text{Ker}(h)$ es ideal.

Supongamos que tenemos un homomorfismo de anillos

$$h : R \rightarrow S.$$

Consideremos el ideal $K = \text{Ker}(h)$ y la proyección $\pi : R \rightarrow R/K$. Entonces podemos definir la nueva función

$$t : R/K \rightarrow S : r + K \mapsto h(r)$$

la cual está bien definida y resulta ser un homomorfismo de anillos inyectivo ; luego los anillos $h(R)$ y R/K son isomorfos.

Ejercicio 20.0.45. — Completar los detalles de lo anterior.

Proposición 20.0.46. — Sea R un anillo con unidad 1 y sea I un ideal de R . Si $1 \in I$, entonces $I = R$. En particular, los únicos ideales de un cuerpo R son $\{0\}$ y R .

Demonstración. — Si $1 \in I$, entonces para todo $r \in R$ debemos tener $r = r \cdot 1 \in I$. Supongamos ahora que R es un cuerpo y que $I \neq \{0\}$. Sea $s \in I$, $s \neq 0$. Como R es cuerpo, existe $s^{-1} \in R$ y luego $1 = s^{-1}s \in I$. \square

Ejercicio 20.0.47. —

- (i) Determinar todos los ideales de \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (ii) Verificar que si R es un anillo con unidad y S es un ideal de R , $S \neq R$, entonces el anillo cociente R/S tiene unidad.

Ejercicio 20.0.48. — Verificar que la intersección arbitraria de ideales es un ideal.

Ejemplo 20.0.49. — Sea R un anillo conmutativo y consideremos el homomorfismo de evaluación $E_0 : R[x] \rightarrow R$. Su núcleo es el ideal formado por todos los polinomios en $R[x]$ cuyo coeficiente constante es igual a 0. Luego $R/\text{Ker}(E_0)$ es un anillo conmutativo isomorfo a R . Cada clase de equivalencia en $R/\text{Ker}(E_0)$ es representado por un polinomio con término constante fijo.

Definición 20.0.50. — Sea $M \subset R$ un subconjunto de un anillo R . Definimos el *ideal generado por M* al ideal más pequeño que contiene a M , donotado por $\langle M \rangle$.

Una consecuencia del ejercicio anterior es el siguiente

Proposición 20.0.51. — Sea $M \subset R$, donde R es un anillo. Entonces

$$\langle M \rangle = \bigcap_{\substack{I \text{ Ideal de } R \\ M \subset I}} I$$

Ejercicio 20.0.52. — Si un anillo R tiene unidad 1 y $r \in R$ es invertible, entonces $\langle r \rangle = R$.

Definición 20.0.53. — Un ideal que se pueda generar con un elemento es llamado un *ideal principal*. Así, en un cuerpo tenemos que todo ideal es principal. Por supuesto, si R es cualquier anillo con unidad, entonces R es ideal principal.

Ejercicio 20.0.54. — Sean $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tales que el ideal $I = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ sea principal. Verificar que si d es el máximo común divisor de $\{r_1, \dots, r_n\}$, entonces $I = \langle d \rangle$. Ind. Recordar que existen enteros a_1, \dots, a_n tales que $a_1 r_1 + \dots + a_n r_n = d$.

Ejemplo 20.0.55. — Consideremos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$, el cual es un dominio entero. Sea $I = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x] : a_0 = 0\}$. Entonces vemos que la propiedad de tener término constante igual a cero se preserva bajo suma y multiplicación, de lo cual obtenemos que I es un ideal de \mathbb{Z} . Consideremos el ideal principal $\langle x \rangle$ el cual está contenido en I . Como todo elemento de I es suma de productos de polinomios monomiales con el polinomio x , observamos que $I = \langle x \rangle$. Por otro lado, si consideramos el ideal J generado por los polinomios 2 y x , entonces este no puede ser principal. Esto por que si lo fuese, digamos generado por el polinomio q , entonces tener $qp = 2$ para algún polinomio p obliga a tener q de grado cero, es decir que $q \in \mathbb{Z}$. Además, als únicas posibilidades para q , módulo signo, son $q = 1$ ó $q = 2$. En el caso $q = 1$ diríamos que $J = \mathbb{Z}[x]$, pero el ideal J sólo contiene polinomios con coeficiente par. Si $q = 2$, entonces debe existir un polinomio f tal que $2f = x$, pero $2f$ tiene coeficientes pares. Luego, en cualquier

caso obtenemos una contradicción y, en particular, obtenemos que J no es principal. En resumen, en el dominio entero $\mathbb{Z}[x]$ hay ideales que no son principales.

Ejercicio 20.0.56. — Sea R un anillo conmutativo y $r \in R$.

(i) Verificar que

$$I_r = \{x : rx = 0\}$$

es un ideal de R .

(ii) Verificar que si S es un ideal de R , entonces

$$\sqrt{S} = \{x \in R : x^n \in S \text{ para algún } n > 0\}$$

es un ideal de R ; llamado el *radical* de S .

Ejercicio 20.0.57. — Sea R un anillo y dos ideales U y V de R . Defina

$$U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$$

$$UV = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i v_i : u_i \in U, v_i \in V, n \in \{1, 2, 3, \dots\} \right\}$$

Verificar que $U + V$ y UV son ideales de R , tales que $U, V \subset U + V$ y $UV \subset U \cap V$.

CAPÍTULO 21

IDEALES PRIMOS Y MAXIMALES

Ahora que sabemos que para construir anillos cocientes necesitamos cocientar anillos por ideales, podemos preguntarnos que tipo de ideal es necesario para que el cociente sea un dominio entero ó aún mejor un cuerpo. Consideremos un anillo R y un ideal I de R . Miremos el anillo cociente R/I . Si $I = R$, entonces R/I es el anillo $\{0\}$, el cual no tiene unidad. Supongamos entonces que I es ideal propio de R . Es claro que si R es conmutativo y tiene unidad, entonces R/I también es conmutativo y tiene unidad. Supongamos entonces que R es de tal tipo. Para obtener que R/I sea un dominio entero debemos asegurarnos que no tiene divisores de cero. La existencia de divisores de cero en R/I implica la existencia de dos elementos $x + I, y + I$, donde $x, y \notin I$, tales que $(x + I)(y + I) = I$, es decir, $xy \in I$. Luego, la no existencia de divisores de cero en R/I es equivalente a la propiedad siguiente :

si $x, y \in R$ son tales que $xy \in I$, entonces $x \in I$ ó $y \in I$.

Definición 21.0.58. — Un ideal propio de R con tal propiedad que si $x, y \in R$ son tales que $xy \in I$, entonces $x \in I$ ó $y \in I$, es llamado un *ideal primo*.

Ahora, para que además R/I sea un cuerpo, debemos tener que todo elemento $x + I$, donde $x \notin I$, posee un inverso, es decir, debe existir $y \notin I$ tal que $(x + I)(y + I) = 1 + I$, lo cual es equivalente a tener $xy \in 1 + I$. Luego, tenemos que R/I es un cuerpo sí y sólo si

I es ideal primo y además para cada $x \in R - I$, existe $y \in R - I$ tal que $xy - 1 \in I$.

Definición 21.0.59. — Un ideal primo I con tal que para cada $x \in R - I$, existe $y \in R - I$ tal que $xy - 1 \in I$, es llamado un *ideal maximal*.

La razón de este nombre es la siguiente. Primero, si tenemos un ideal maximal I contenido estrictamente en otro ideal J de R , entonces existe $j \in J - I$. luego debe existir

$h \in R - I$ tal que $hj - 1 \in I$. Esto dice que existe $i \in I$ tal que $hj - 1 = i$, con lo cual obtenemos $1 = hj - i \in J$, es decir $J = R$. En otras palabras, un ideal maximal no puede estar contenido propiamente en otro ideal propio de R . En forma recíproca, si tenemos un ideal propio I de R con la propiedad que no existe ideal propio de R conteniéndolo, entonces tenemos

- (i) Si $x \in R - I$ es tal que $x \notin I$, entonces consideremos el ideal generado por I y x . Como $x \notin I$, este ideal contiene estrictamente a I , luego debe ser R , es decir, $1 \in \langle x, I \rangle$. Como $1 \notin I$, tenemos que $1 = xy + i$, para cierto $i \in I$ y cierto $y \in R - I$.
- (ii) Si $x, y \in R$ son tales que $xy \in I$. Supongamos que $x, y \notin I$. Por (i) tenemos que existen $u, v \notin I$ tales que $xu - 1, yv - 1 \in I$. En este caso, $xyuv - xu - yv + 1 = (xu - 1)(yv - 1) \in I$ y como $xy \in I$, tenemos que $xu - (yv - 1) = xu - yv + 1 \in I$ y, en particular, $xu \in I$. Est último junto a tener $xu - 1 \in I$ nos obliga a tener $1 \in I$, una contradicción. Luego I debe ser primo.

De esta manera obtenemos la definición equivalente de un ideal maximal :

Teorema 21.0.60. — *Un ideal maximal es un ideal propio de R que no está contenido estrictamente en otro ideal propio de R .*

Resumiendo todo lo anterior, tenemos :

Proposición 21.0.61. — *Sea R un anillo conmutativo con unidad e I un ideal propio de R . Entonces :*

- (1) R/I es un dominio entero sí y sólo si I es un ideal primo.
- (2) R/I es un cuerpo sí y sólo si I es un ideal maximal.
- (3) Todo ideal maximal es primo.

Ejemplo 21.0.62. — En un cuerpo \mathbb{K} tenemos sólo dos ideales : $\{0\}$ y \mathbb{K} . En este caso $\{0\}$ es el único ideal propio y además es maximal y $\mathbb{K}/\{0\}$ es isomorfo a \mathbb{K} . Supongamos ahora que R es un anillo conmutativo con unidad de manera que sus únicos ideales son $\{0\}$ y R . Entonces $\{0\}$ es ideal maximal y como $R/\{0\}$ es isomorfo a R , tenemos que R debe ser un cuerpo.

Proposición 21.0.63. — *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Entonces R es un cuerpo sí y sólo si sus únicos ideales son $\{0\}$ y R .*

Ejemplo 21.0.64. — Consideremos el dominio entero \mathbb{Z} . Sus subgrupos aditivos son de la forma $m\mathbb{Z}$, donde $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Estos son cerrados bajo la operación de multiplicación, luego son sus subanillos. Si multiplicamos cualquier entero por un múltiplo de m volvemos a tener un múltiplo de m , es decir, todos sus subanillos son ideales. Esto se

parece mucho al hecho que en un grupo abeliano todos sus subgrupos son normales. Estos ideales son principales, generado por m . Como sabemos que $\{0\}$ es siempre un ideal primo, consideremos $m > 1$ (el caso $m = 1$ nos dá todo el anillo \mathbb{Z}). En este caso, si tenemos dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $ab \in m\mathbb{Z}$, entonces debe ocurrir que los factores primos de m se distribuyen en a y b . Así, m es un número primo sí y sólo si $m\mathbb{Z}$ es un ideal primo. Como todo ideal $m\mathbb{Z}$, donde $m = pq$, siempre está contenido en el ideal $p\mathbb{Z}$, también observamos que los ideales primos son maximales. Como consecuencia, para todo número primo p tenemos que el anillo cociente $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo.

Definición 21.0.65. — Los cuerpos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donde p es primo, y \mathbb{Q} reciben el nombre de *cuerpos primos*.

Definición 21.0.66. — Supongamos que tenemos un anillo R con unidad. Si existe un entero $n > 0$ tal que $n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} = 0$, diremos que el menor de tales enteros es la *característica* de R . En caso de no existir tal valor, decimos que la característica de R es 0.

Por ejemplo, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[\sqrt{\pm d}]$, donde $d > 0$ no es el cuadrado de un entero, tienen característica 0, mientras que los anillos $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tienen característica m . Consideremos el homomorfismo

$$\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow R : n \mapsto n \cdot 1$$

cuyo núcleo es $m\mathbb{Z}$, si m es la característica de R . En particular, si $m = 0$, entonces Φ es un homomorfismo inyectivo. Esto nos dá la siguiente información :

Proposición 21.0.67. — Sea R un anillo con característica m .

- (1) Si $m = 0$, entonces R contiene un subanillo isomorfo a \mathbb{Z} .
- (2) Si $m > 0$, entonces R contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- (3) Si R es un cuerpo de característica 0, entonces este contiene un subcuerpo isomorfo a \mathbb{Q} .
- (4) Si R es un cuerpo de característica m , entonces m debe ser primo y R contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Demonstración. — Lo único que falta por verificar es que la característica de un cuerpo R es cero ó un número primo. En efecto, supongamos que la característica es diferente de cero e igual a un valor $m > 0$. Usando el homomorfismo Φ obtenemos que R contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, el cual contiene divisores de cero para m no primo ; luego, m está obligado ser un número primo. \square

Ejemplo 21.0.68. — Otro ejemplo importante de ideal maximal es el siguiente. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $p \in X$ algún punto que fijaremos. Denotemos por $\widehat{\mathcal{G}}_p$ al conjunto de todas las funciones a valores reales definidas en algún entorno abierto de p . Definimos en $\widehat{\mathcal{G}}_p$ la siguiente relación de equivalencia. Si

$$f : U_f \rightarrow \mathbb{R}, g : U_g \rightarrow \mathbb{R} \in \widehat{\mathcal{G}}_p,$$

entonces decimos que ellas son equivalentes si es posible encontrar un abierto $V \subset U_f \cap U_g$, $p \in V$, de manera que $f = g$ en V . Denotemos por $[f]$ la clase de equivalencia de $f : U_f \rightarrow \mathbb{R} \in \widehat{\mathcal{G}}_p$ y por \mathcal{G}_p al conjunto de clases de equivalencia. Cada clase $[f]$ es llamada un germen de función real continua en p y \mathcal{G}_p el anillo de funciones reales continuas en p . Para ver que \mathcal{G}_p es en efecto un anillo, de hecho un dominio de entero, definimos las operaciones :

$$[f] + [g] = [f + g]; [f][g] = [fg],$$

donde las operaciones $f + g, fg$ están definidas en un abierto común de definición. El elemento unidad es dada por el germen de la función constante 1 y la denotamos por $[1]$. La definición de la relación de equivalencia nos asegura que si $[f] = [g]$, entonces $f(p) = 0$ sí y sólo si $g(p) = 0$. La continuidad nos asegura que si $[f]$ es tal que $f(p) \neq 0$, entonces existe $[1/f]$, en particular, $[f]$ es invertible. Más aún, los elementos invertibles de \mathcal{G}_p son exactamente las clases $[f]$ tales que $f(p) \neq 0$.

El conjunto

$$m_p = \{[f] \in \mathcal{G}_p : f(p) = 0\},$$

es un ideal maximal de \mathcal{G}_p . Esto es dado por :

- (i) si $[f], [g] \in m_p$, es decir $f(p) = g(p) = 0$, entonces $(f + g)(p) = 0$ de donde $[f + g] \in m_p$;
- (ii) si $[f] \in m_p$, entonces $-f(p) = 0$, es decir, $-[f] = [-f] \in m_p$;
- (iii) si $[f] \in m_p$ y $[g] \in \mathcal{G}_p$, entonces $f(p)g(p) = 0$, luego, $[f][g] \in m_p$.

Como cada $[f]$ con $f(p) \neq 0$ es invertible, esto nos dice que m_p es de hecho el único ideal maximal de \mathcal{G}_p .

Ejercicio 21.0.69. — Vea que si reemplazamos (X, τ) por un abierto de \mathbb{R}^n y en vez de considerar funciones continuas consideramos funciones de clase C^k , entonces obtenemos el mismo resultado. Analice también el caso cuando reemplazamos X por un abierto del plano complejo y reemplazamos la continuidad por analiticidad.

CAPÍTULO 22

CUERPO COCIENTE DE UN DOMINIO ENTERO

Hemos visto que todo cuerpo es en particular un dominio entero y que todo dominio entero finito es necesariamente un cuerpo. El anillo \mathbb{Z} es un ejemplo de un dominio entero infinito que no es un cuerpo. Nos podemos preguntar si es posible encontrar un cuerpo, lo más pequeño posible, que contenga al dominio como subanillo. Veamos por ejemplo el dominio anterior \mathbb{Z} . Podemos ver que si el cuerpo \mathbb{Q} le contiene como un subanillo. Por otro lado, si tenemos un cuerpo K conteniendo a \mathbb{Z} y $n \in \mathbb{Z}$, entonces debe existir $n^{-1} \in K$ y, en particular, los elementos $nm^{-1} = \frac{n}{m} \in K$. De esta manera vemos que \mathbb{Q} es el cuerpo más pequeño conteniendo a \mathbb{Z} . La construcción de \mathbb{Q} puede realizarse de la siguiente manera. Consideremos el conjunto

$$Q = \{(r, s) \in \mathbb{Z}^2 : s \neq 0\}$$

y la función

$$L : Q \rightarrow \mathbb{Q} : (r, s) \mapsto \frac{r}{s}$$

Vemos que L es sobreyectiva pero no es inyectiva ya que es fácil ver que $L(r, s) = L(u, v)$ sí y sólo si $rv = su$. Consideremos la relación de equivalencia

$$(r, s) \cong (u, v) \iff rv = su$$

y denotemos por $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ al conjunto de las clases de equivalencia. Así, podemos considerar la función inducida

$$L : \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Q} : [(r, s)] \mapsto \frac{r}{s},$$

la cual es ahora una biyección. Podemos usar L para escribir las operaciones de suma y multiplicación de números racionales, obteniendo en $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ las correspondientes operaciones :

$$[(r, s)] + [(u, v)] = [(rv + su, sv)]$$

$$[(r, s)] \cdot [(u, v)] = [(ru, sv)]$$

De esta manera obtenemos en $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ una estructura de cuerpo el cual es isomorfo a \mathbb{Q} por el isomorfismo L . La función

$$J : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} : n \mapsto [(n, 1)]$$

resulta ser un homomorfismo inyectivo de anillos.

Lo anterior nos permite generalizar la construcción para cualquier dominio entero R . Consideramos el conjunto

$$Q = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : s \neq 0\}$$

y la relación de equivalencia

$$(r, s) \cong (u, v) \iff rv = su$$

Denotemos por \mathbb{Q}_R al conjunto de las clases de equivalencia y definimos las correspondientes operaciones :

$$[(r, s)] + [(u, v)] = [(rv + su, sv)]$$

$$[(r, s)] \cdot [(u, v)] = [(ru, sv)]$$

Ejercicio 22.0.70. — Verificar que las operaciones anteriores hacen de \mathbb{Q}_R un cuerpo y que la función

$$J : R \rightarrow \mathbb{Q}_R : r \mapsto [(r, 1)]$$

resulta ser un homomorfismo inyectivo de anillos.

Por otro lado, supongamos que tenemos un cuerpo \mathbb{K} y un homomorfismo inyectivo $\Phi : R \rightarrow \mathbb{K}$. Entonces podemos definir la función

$$\Psi : \mathbb{Q}_R \rightarrow \mathbb{K} : [(r, s)] \mapsto \Phi(r)\Phi(s)^{-1}$$

Para ver que esta función está bien definida, observemos que si $(r, s) \cong (u, v)$, entonces $rv = su$. Luego $\Phi(rv) = \Phi(su)$, es decir, $\Phi(r)\Phi(v) = \Phi(s)\Phi(u)$ ó equivalentemente $\Phi(r)\Phi(s)^{-1} = \Phi(u)\Phi(v)^{-1}$.

La función Ψ es inyectiva ya que si $\Psi([(r, s)]) = \Psi([(u, v)])$, entonces $\Phi(r)\Phi(s)^{-1} = \Phi(u)\Phi(v)^{-1}$ ó equivalentemente $\Phi(rv) = \Phi(us)$. Como Φ es inyectiva, esto nos dice que $rv = us$, es decir, $[(r, s)] = [(u, v)]$.

Veamos que Ψ es de hecho un homomorfismo de anillos. Como todo cuerpo es conmutativo y Φ es homomorfismo, tenemos

$$\begin{aligned} \Psi([(r, s)] + [(u, v)]) &= \Psi([(rv + su, sv)]) = \Phi(rv + su)\Phi(sv)^{-1} = \\ &= (\Phi(r)\Phi(v) + \Phi(s)\Phi(u))\Phi(v)^{-1}\Phi(s)^{-1} = \Phi(r)\Phi(s)^{-1} + \Phi(u)\Phi(v)^{-1} = \\ &= \Psi([(r, s)]) + \Psi([(u, v)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi([(r, s)] \cdot [(u, v)]) &= \Psi([(ru, sv)]) = \Phi(ru)\Phi(sv)^{-1} = \\ &= \Phi(r)\Phi(s)^{-1}\Phi(u)\Phi(v)^{-1} = \Psi([(r, s)])\Phi([(u, v)]) \end{aligned}$$

Podemos resumir todo lo anterior en el siguiente :

Teorema 22.0.71. — Sea R un dominio entero. Entonces existe un cuerpo \mathbb{Q}_R y un homomorfismo inyectivo $J : R \rightarrow \mathbb{Q}_R$ de manera que si \mathbb{K} es cualquier cuerpo y $\Phi : R \rightarrow \mathbb{K}$ es un homomorfismo inyectivo, entonces existe un homomorfismo inyectivo $\Psi : \mathbb{Q}_R \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\Psi \circ J = \Phi$.

Lo anterior nos está diciendo que el cuerpo \mathbb{Q}_R es el cuerpo más pequeño conteniendo una copia isomorfa de R .

Definición 22.0.72. — Sea R un dominio entero. El cuerpo \mathbb{Q}_R es llamado el *cuerpo de fracciones* del dominio R . Es costumbre denotar cada clase $[(r, s)]$ como la fracción $\frac{r}{s}$.

Ejercicio 22.0.73. — Sea $d > 0$ un entero que no es cuadrado de otro entero y consideremos el dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Verificar que su cuerpo de fracciones es isomorfo a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

CAPÍTULO 23

DOMINIOS EUCLIDIANOS, PRINCIPALES Y FACTORIZACIÓN ÚNICA

23.1. Dominios Euclidianos

Definición 23.1.1. — Diremos que un dominio entero D es un *Dominio Euclidiano* si existe una función

$$v : D - \{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$$

llamada una *valuación* en D que satisface las siguientes dos propiedades :

(v1) Para cada par $a, b \in D, b \neq 0$, existen $s, r \in D$ tales que

$$a = sb + r$$

donde $r = 0$ ó bien $v(r) < v(b)$. El valor r es llamado el *resto* de dividir a por b ;

(v2) Para cada par $a, b \in D - \{0\}$, se tiene que $v(a) \leq v(ab)$.

Ejemplo 23.1.2. —

- (i) El dominio $D = \mathbb{Z}$ con la valuación usual $v(n) = |n|$ es un dominio Euclidiano. En efecto, si tomamos dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$, donde $b \neq 0$, entonces se puede ver que existen enteros r, s tales que $a \in [sb, s(b+1))$. Si $a = sb$, entonces $r = 0$. Si $a \neq sb$, entonces $r = a - sb$ y es claro en este caso que $|r| < |b|$. También es claro que si $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, entonces $|a| \leq |ab|$.
- (ii) Si F es un cuerpo, entonces usando la valuación trivial $v(r) = 0$, obtenemos que F es dominio Euclidiano. En este caso, siempre ocurre que el resto $r = 0$.
- (iii) Sea $D = F[x]$, donde F es un cuerpo y la valuación $v(p(x))$ siendo el grado del polinomio $p(x)$. Es claro que la función grado satisface ser una valuación usando la división usual de polinomios. Verificar los detalles.
- (iv) El dominio entero $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio Euclidiano. Esto lo veremos más tarde.

Ejercicio 23.1.3. —

- (1) Verificar que el dominio entero $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, llamado el anillo de los *enteros Gaussianos*, resulta ser un dominio Euclidiano con la valuación $v(a + bi) = a^2 + b^2$.
- (2) Sea $d \in \{2, 3, 5, 6, \dots\}$ un entero que no es cuadrado de otro entero y consideremos el dominio entero $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Utilice $v(a + b\sqrt{d}) = a - db^2$ y verifique si este es dominio Euclidiano.
- (3) Sea $d \in \{2, 3, 5, 6, \dots\}$ un entero que no es cuadrado de otro entero y consideremos el dominio entero $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$. Utilice $v(a + b\sqrt{-d}) = a + db^2$ y verifique si este es dominio Euclidiano.

Ahora procedemos a enunciar el algoritmo de división que tenemos en todo dominio entero. De manera más precisa :

Proposición 23.1.4 (Algoritmo de División). — Sea D un dominio Euclidiano respecto a la valuación $v : D - \{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. Entonces para todo par $p, q \in D - \{0\}$ existen $a, b \in D$ tales que $MCD(p, q) = ap + bq$. En particular, si p y q son relativamente primos, entonces existen $a, b \in D$ tales que $ap + bq = 1$.

Demonstración. — Sean $p, q \in D - \{0\}$ y $d = MCD(p, q)$. Por la propiedad de división existen $r_1, t_1 \in D$ tales que $p = qt_1 + r_1$, donde $r_1 = 0$ ó $v(r_1) < v(q)$.

Si tenemos que $r_1 = 0$, entonces $MCD(p, q) = q$ y estamos listos tomando $a = 0$, $b = 1$.

Si tenemos que $r_1 \neq 0$, entonces podemos proceder como antes usando q en lugar de p y r_1 en lugar de q para obtener valores $r_2, t_2 \in D$ tales que $q = r_1t_2 + r_2$, donde $r_2 = 0$ ó $v(r_2) < v(r_1)$.

Si $r_2 = 0$, entonces tenemos que $MCD(p, q) = r_1$ y estaremos listos tomando $a = 1$ y $b = -t_1t_2$.

Si tenemos que $r_2 \neq 0$, entonces seguimos con este proceso inductivo. Como $v(q) > v(r_1) > v(r_2) > \dots \geq 0$ y la valuación v toma valores enteros, este proceso terminará después de un número finito de pasos. \square

23.2. Dominios de Ideales Principales

Definición 23.2.1. — Un dominio entero para el cual todo ideal es principal es llamado un *dominio de ideales principales*.

Ejemplo 23.2.2. —

- (i) Todo cuerpo F es un dominio de ideales principales. Este hecho se debe a que los únicos ideales de un cuerpo son $\{0\}$ y $F = \langle 1 \rangle$.
- (ii) Sea D un dominio de ideales principales. Entonces si $a_1, \dots, a_n \in D - \{0\}$, existe un máximo común divisor $MCD(a_1, \dots, a_n) \in D$ para ellos. Más aún, el ideal generado por a_1, \dots, a_n es igual al ideal generado por $MCD(a_1, \dots, a_n)$. En particular,

esto nos asegura que dos máximos común divisores de tales elementos son uno el múltiplo del otro por un elemento invertible en D . En efecto, sea I el ideal generado por los elementos a_1, \dots, a_n . Como estamos en un ideal principal, existe $d \in D$ tal que $I = \langle d \rangle$. En particular, todo divisor común a los elementos a_1, \dots, a_n debe dividir d ya que $d = r_1x_1 + \dots + r_nx_n$ al pertenecer al ideal I generado por los elementos a_j . Por otro lado, como cada $a_j \in I = \langle d \rangle$, tenemos que $x_j = s_jd$, con lo cual vemos que d divide a cada a_j , obteniendo en resumen que d es un máximo común divisor de a_1, \dots, a_n . Si tenemos $d_1 \in D$ otro máximo común divisor de estos elementos, entonces I es subanillo del ideal $\langle d_1 \rangle$. Esto asegura que d_1 divide d , es decir $d = ad_1$. Como d_1 es máximo común divisor y d divide a los elementos a_1, \dots, a_n , debemos tener que d divide d_1 , es decir $d_1 = bd$. Esto nos dice que $d_1 = bd = bad_1$, de donde $d_1(1 - ba) = 0$. Pero $d_1 \neq 0$ y estamos en un dominio entero, es decir, no hay divisores de cero, luego $ab = 1$, es decir, a es invertible en D .

- (iii) El dominio entero $\mathbb{Z}[x]$ no es dominio de ideales principales. En efecto, consideremos el ideal I generado por 2 y x . Es claro que I consiste de polinomios cuyo coeficiente constante es par. Por otro lado, si $\mathbb{Z}[x]$ fuese un dominio de ideales principales, parte (ii) anterior nos dice que I sería generado por el $MCD(2, x) = 1$, es decir, $I = \mathbb{Z}[x]$, una contradicción.

23.3. Dominios de Factorización Única

Definición 23.3.1. — Sea D un dominio entero y $a \in D - \{0\}$. Diremos que a es un *elemento irreducible* si no es invertible y no puede escribirse como producto de dos elementos ambos no invertibles.

Ejemplo 23.3.2. — Consideremos un dominio Euclidiano D con valuación $v : D - \{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. Se puede verificar que los elementos invertibles de D es exactamente el conjunto

$$\begin{aligned} \{a \in D : a \text{ invertible}\} &= \\ \{a \in D : v(a) = v(1)\} &= \\ \{a \in D - \{0\} : v(b) = v(ab) \text{ para todos } b \in D - \{0\}\} & \end{aligned}$$

En efecto, si $a \in D$ es invertible, entonces $v(b) \leq v(ab) \leq v(a^{-1}ab) = v(b)$, es decir, $v(b) = v(ab)$. En particular, para $b = 1$ lo anterior asegura que $v(a) = v(1)$. Recíprocamente, si a es tal que $v(b) = v(ab)$ para algún $b \in D - \{0\}$, entonces al dividir b por ab obtenemos que

$$b = s(ab) + r$$

donde $r = 0$ ó $v(r) < v(ab) = v(b)$. Ahora, $r = b - s(ab) = (1 - sa)b$ de donde $v(b) \leq v(r) < v(b)$, una contradicción si $r \neq 0$. Así, $r = 0$ y $b = s(ab)$, es decir,

$(1 - sa)b = 0$. Como D es dominio entero y $b \neq 0$, debemos tener $sa = 1$, es decir, a invertible.

Definición 23.3.3. — Un dominio entero D es llamado un *dominio de factorización única* si todo elemento $a \in D - \{0\}$ que no es invertible puede escribirse de manera única como producto de elementos irreducibles, es decir, si $a \in D - \{0\}$ no es invertible, entonces existen irreducibles $p_1, \dots, p_n \in D$ tales que $a = p_1 \cdots p_n$. Más aún, si existe otra descomposición en irreducibles, digamos $a = q_1 \cdots q_m$, entonces $n = m$ y $q_j = t_j p_j$, donde $t_j \in D$ es invertible.

Ejemplo 23.3.4. — Si D es dominio de factorización única, entonces es posible calcular el máximo común múltiplo en D . En efecto, tomemos a, b en $D - \{0\}$. Escribimos las descomposiciones en factores irreducibles de ambos elementos. Podemos escribir

$$a = p_1 \cdots p_n p_{n+1} \cdots p_l$$

$$b = p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_s$$

donde ningún q_j es producto de un elemento p_i por un invertible. Así, tenemos que $MCD(a, b) = p_1 \cdots p_n$.

Proposición 23.3.5 (Gauss). — Si D es un dominio de factorización única, entonces $D[x]$ también lo es.

Este resultado lo verificaremos en una sección posterior.

23.4. Relaciones entre Dominios

Ahora procedemos a mostrar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 23.4.1. — Todo dominio Euclidiano es un dominio de ideales principales y todo dominio de ideales principales es un dominio de factorización única.

Ejemplo 23.4.2. — Como consecuencia del resultado anterior es que si F es un cuerpo, entonces al ser $F[x]$ un dominio Euclidiano (usando como valuación el grado de polinomios) se tiene que todo polinomio puede escribirse como producto (único módulo constantes) de polinomios irreducibles. También, todo ideal es principal y el ideal generado por polinomios (no ceros) $p_1(x), \dots, p_n(x)$ es generado por un polinomio $q(x)$ que es máximo común divisor de ellos. En particular, si son relativamente primos, ellos generan todo $F[x]$.

Para verificar la proposición anterior, primero veremos que todo dominio Euclidiano es principal y luego que todo dominio de ideales principales es necesariamente un dominio de factorización única.

Proposición 23.4.3. — *Todo dominio Euclidiano es de ideales principales*

Demonstración. — Consideremos un ideal $I \neq \{0\}$ de D . Queremos ver que este es principal. Consideremos el conjunto

$$v(I) = \{v(x) : x \in I - \{0\}\} \subset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Consideremos $a \in I$ tal que $v(a) = \text{Mínimo}(v(I))$, el cual existe al ser $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ discreto y bien ordenado. Podemos considerar el ideal principal generado por a , es decir, $\langle a \rangle$, el cual es esta contenido en I . Supongamos que podemos escoger $x \in I - \langle a \rangle$. Sabemos que existen valores $r, t \in D$ tales que $x = ta + r$, donde $r = 0$ ó $v(r) < v(a)$. Pero como $x \notin \langle a \rangle$, $r \neq 0$. Así, tenemos que $r \in D - \{0\}$ es tal que $v(r) < v(a)$. Pero, $r = x - ta \in I$, lo cual contradice la minimalidad de $v(a)$. Luego, $I = \langle a \rangle$. \square

Proposición 23.4.4. — *Todo dominio de ideales principales es dominio de factorización única*

Antes de proceder a dar una demostración de este hecho, recordemos que en un ideal principal tenemos los siguientes :

- (1) Existencia de $MCD(x_1, \dots, x_n)$;
- (2) $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle MCD(x_1, \dots, x_n) \rangle$, en particular, existen $a_1, \dots, a_n \in D$ tales que

$$MCD(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n;$$

- (3) Dos máximos común divisores de los mismos elementos son el múltiplo de un invertible por el otro.

Primero necesitamos verificar que todo elemento no invertible $x \in D - \{0\}$, donde D es un dominio de ideales principales, puede descomponerse como un producto finito de elementos irreducibles. Esto es consecuencia del siguiente.

Lema 23.4.5. — *Sea D un dominio de ideales principales y $x \in D - \{0\}$, un elemento no invertible. Entonces x es producto finito de elementos irreducibles de D .*

Demonstración. — Sea $x \in D - \{0\}$ no invertible. Si este es irreducible, entonces estamos listos. Supongamos por el contrario que no lo es, es decir, $x = ab$, donde $a, b \in D$ no son invertibles. Es claro que

$$\langle x \rangle \subsetneq \langle a \rangle \quad \text{y} \quad \langle x \rangle \subsetneq \langle b \rangle$$

Supongamos que a o b no es irreducible, digamos a no es irreducible. Entonces podemos escribir $a = a_1 a_2$, donde a_j no es invertible. Ahora tenemos

$$\langle x \rangle \subsetneq \langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \quad \text{y} \quad \langle x \rangle \subsetneq \langle a \rangle \subsetneq \langle a_2 \rangle$$

Si el lema que estamos verificando es falso, procediendo de esta manera obtendremos una sucesión infinita de ideales

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$$

lo cual será contradicción al siguiente lema. □

Lema 23.4.6. — *Sea D un dominio de ideales principales. Entonces no es posible encontrar una sucesión infinita de ideales*

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$$

Demonstración. — Supongamos que tenemos una colección de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots$$

Entonces

$$I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

resulta ser un ideal. Por otro lado, como D es principal, tenemos la existencia de un elemento $a \in D$ tal que $\langle a \rangle = I$. Así, como $a \in I$, debe ocurrir que $a \in I_n$ para algún n , en cuyo caso tendremos que $I = I_n$ □

Ahora necesitamos verificar que la descomposición es única módulo factores irreducibles y permutación de factores. Esto es consecuencia del siguiente.

Lema 23.4.7. — *La descomposición en factores irreducibles en un dominio de ideales principales es única módulo multiplicación por invertibles y permutación de factores.*

Demonstración. — Supongamos que tenemos la igualdad

$$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$$

donde $p_j, q_i \in D$ son elementos irreducibles. Supongamos que $n \geq m$. Por el lema de Euclides más abajo, tenemos que p_1 divide algún q_j , digamos q_1 . Entonces $q_1 = r_1 p_1$, donde $r_1 \in D$ es algún invertible. Factorizando en D el elemento p_1 en la igualdad anterior (ya que no hay divisores de cero), obtenemos la igualdad

$$p_2 \cdots p_n = r_1 q_2 \cdots q_m$$

Ahora procedemos con p_2 de la misma manera que con p_1 para ver que, módulo permutación de índices $q_2 = r_2 p_2$, donde $r_2 \in D$ es invertible y, en particular, tener la igualdad

$$p_3 \cdots p_n = r_1 r_2 q_3 \cdots q_m$$

Procediendo de esta manera, módulo permutación de índices, obtendremos que

$$q_j = r_j p_j, j = 1, \dots, n$$

donde $r_j \in D$ es invertible, y la igualdad

$$1 = r_1 r_2 \cdots r_n q_{n+1} \cdots q_m$$

Si $m > n$, entonces esta última igualdad diría que q_m es invertible, una contradicción. Luego $m = n$ y obtenemos lo deseado. \square

Lema 23.4.8 (Euclides). — Sea D un dominio de ideales principales, $p \in D$ un elemento irreducible y $a, b \in D$ tales que p divide ab . Entonces p divide a o divide b . En otras palabras, todo ideal generado por un elemento irreducible es un ideal primo.

Demonstración. — Podemos asumir que $a, b \in D - \{0\}$. Podemos calcular un máximo común divisor $d = MCD(a, b)$ en el dominio de ideales principales D . Supongamos que p no divide a , en cuyo caso $MCD(p, a) = 1$. Sabemos que es posible encontrar valores $r, s \in D$ tales que $1 = rp + sa$. Luego, al multiplicar por b obtenemos $b = brp + sab$ y como p divide ambos sumandos del lado derecho, p debe dividir b . \square

CAPÍTULO 24

ANILLO DE POLINOMIOS Y FACTORIZACIÓN ÚNICA

En esta sección nos preocuparemos de manera particular de los anillos de polinomios de dominios enteros y estudiaremos algunas propiedades que tienen estos.

Ejercicio 24.0.9. — Sea D un dominio entero y considere el anillo de polinomios en una variable $D[x]$. Sean $P(x) \in D[x]$ y $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in D[x]$ tal que $a_n \in D$ es un invertible. Verifique que es posible encontrar polinomios $T(x), R(x) \in D[x]$ tales que

$$P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ ó bien $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$.

Ejemplo 24.0.10. — Consideremos un cuerpo k y el anillo de polinomios en una variable $k[x]$. Sabemos que $k[x]$ es un dominio Euclidiano usando como valuación el grado de polinomios. En particular, $k[x]$ es también un dominio de ideales principales y un dominio de factorización única. Ahora, si $R(x), S(x) \in k[x]$ son relativamente primos, tenemos que

$$1 = R(x)A(x) + S(x)B(x)$$

para ciertos polinomios $A(x), B(x) \in k[x]$. Así, si $T(x) \in k[x]$, entonces

$$T(x) = R(x)C(x) + S(x)D(x)$$

para ciertos polinomios $C(x), D(x) \in k[x]$. En este caso $C(x) = T(x)A(x)$ y $D(x) = T(x)B(x)$. El algoritmo de la división nos permite calcular efectivamente los polinomios $A(x), B(x)$ y luego $C(x), D(x)$. Una consecuencia de esta pequeña observación es la *descomposición en fracciones parciales*: Sean $P(x), Q(x) \in k[x]$ y supongamos que $Q(x) = Q_1(x)^{d_1} \cdots Q_n(x)^{d_n}$ es descomposición en polinomios irreducibles. Entonces es posible calcular de manera explícita polinomios $P_1(x), \dots, P_n(x) \in k[x]$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{P_j(x)}{Q_j(x)^{d_j}}$$

Ejercicio 24.0.11. — Verifique la descomposición en fracciones parciales del ejemplo anterior. Utilice la observación hecha en el mismo ejemplo con

$$R(x) = \frac{Q(x)}{Q_n(x)^{d_n}} = Q_1(x)^{d_1} \cdots Q_{n-1}(x)^{d_{n-1}}$$

$$S(x) = Q_n(x)^{d_n} \quad \text{y} \quad T(x) = P(x)$$

El ejemplo anterior nos dice que los dominios $k[x]$, donde k es un cuerpo, son dominios Euclidianos y, en particular, dominios de ideales principales y de factorización única. Hemos visto que $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio Euclidiano ni dominio de ideales principales, pero aún queda la pregunta si este es un dominio de factorización única.

Teorema 24.0.12 (Gauss). — Si D es un dominio de factorización única, entonces $D[x]$ también lo es.

Este resultado al ser usado de manera iterativa permite obtener el siguiente.

Corolario 24.0.13. — Si D es un dominio de factorización única, entonces $D[x_1, \dots, x_n]$ también lo es.

Demostración del teorema de Gauss. — Sea D un dominio entero y k su cuerpo de fracciones. Entonces tenemos de manera natural la incrustación $D[x] \subset k[x]$. Sea $P(x) \in D[x]$; podemos escribir

$$P(x) = dP_1(x)$$

donde $P_1(x) \in D[x]$ tiene la propiedad que la colección de sus coeficientes son relativamente primos y $d \in D$ es el máximo común divisor de los coeficientes de $P(x)$. Como D es dominio de factorización única, tenemos una descomposición "única"

$$d = p_1 p_2 \cdots p_r$$

donde $p_j \in D$ son elementos irreducibles. También tenemos una descomposición "única" en polinomios irreducibles de $k[x]$, digamos

$$P_1(x) = Q_1(x)Q_2(x) \cdots Q_n(x)$$

$Q_1(x), \dots, Q_n(x) \in k[x]$, polinomios irreducibles.

Ahora, cada polinomio $Q_j(x)$ puede escribirse como

$$Q_j(x) = \frac{a_j}{b_j} T_j(x)$$

donde $T_j(x) \in D[x]$ y de manera que los coeficientes de $T_j(x)$ son relativamente primos. Es claro que $T_j(x) \in k[x]$ es irreducible (es un múltiplo de $Q_j(x)$ por un invertible de $k[x]$). Luego, $T_j(x) \in D[x]$ debe también ser irreducible en $D[x]$. Tenemos la igualdad

$$P_1(x) = \frac{a_1 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_n} T_1(x) \cdots T_n(x)$$

ó de manera equivalente

$$H(x) = b_1 \cdots b_n P_1(x) = a_1 \cdots a_n T_1(x) \cdots T_n(x) = L(x)$$

Luego, un máximo común divisor de los coeficientes del polinomio $H(x) \in D[x]$, es $b_1 \cdots b_n \in D$, y un máximo común divisor del polinomio $L(x) \in D[x]$, es $a_1 \cdots a_n \in D$. De esta manera tenemos la igualdad

$$a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_n s$$

para cierto elemento invertible $s \in D$ ya que D es dominio de factorización única. Así,

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_n} = s \in D$$

y, en particular,

$$P_1(x) = s T_1(x) \cdots T_n(x)$$

con lo cual finalmente tenemos la descomposición en factores irreducibles en $D[x]$

$$P(x) = p_1 p_2 \cdots p_r s T_1(x) \cdots T_n(x)$$

Esto nos ha permitido verificar al menos la existencia de una factorización en irreducibles en $D[x]$. Ahora debemos verificar su unicidad módulo invertibles y permutación de factores. \square

Ejercicio 24.0.14. — Verificar la unicidad del teorema anterior. Indicación : considere una igualdad

$$p_1 \cdots p_n P_1(x) \cdots P_m(x) = q_1 \cdots q_r Q_1(x) \cdots Q_s(x)$$

donde $p_j, q_j \in D$ son irreducibles y $P_j(x), Q_j(x) \in D[x]$ son polinomios irreducibles. Vea que se puede suponer que cada polinomio $P_j(x), Q_j(x)$ tiene sus coeficientes relativamente primos. De esta manera, vea que existe $a \in D$ invertible tal $p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_r a$ y que $r = n$, al ser D dominio de factorización única. Ahora, analice la igualdad $P_1 \cdots p_m = a Q_1 \cdots Q_s$ en $k[x]$, utilice que $k[x]$ es dominio de factorización única y el mismo tipo de ideas como en la demostración para completar el argumento.

CAPÍTULO 25

ANILLOS NOETHERIANOS

En esta sección veremos que todo ideal del anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$, donde k es un cuerpo es finitamente generado. Este resultado es de mucha importancia en el estudio de soluciones de sistemas infinitos polinomiales y, en particular, en geometría algebraica.

Definición 25.0.15. — Un anillo A conmutativo con unidad es llamado *Noetheriano* si todo ideal de A es finitamente generado.

Ejemplo 25.0.16. — Cuerpos y \mathbb{Z} son ejemplos de anillos Noetherianos.

Teorema 25.0.17 (Teorema Fundamental de Hilbert). — Si A es un anillo Noetheriano, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ también es Noetheriano.

Corolario 25.0.18. — Si k es un cuerpo, entonces $k[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano.

Demostración del teorema fundamental de Hilbert. — Sólo es necesario verificar que $A[x]$ es anillo Noetheriano. Supongamos que tenemos un ideal I en $A[x]$. Deseamos encontrar un número finito de generadores de I .

Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$, con $a_n \neq 0$, es decir $p(x)$ es de grado n , llamaremos al coeficiente a_n el coeficiente principal de $p(x)$. Definimos el coeficiente principal del polinomio cero como el $0 \in A$.

Sea $J \subset A$ el conjunto formado de los coeficientes principales de todos los polinomios en I .

Hecho 1. J es un ideal de A .

La razón de esto es :

- (1) El coeficiente principal de la suma de dos polinomios es la suma de los coeficientes principales ;

- (2) El coeficiente principal del polinomio $-p(x)$ es el opuesto aditivo del coeficiente principal de $p(x)$;
- (3) El coeficiente principal del producto de dos polinomios es el producto de los coeficientes principales ;
- (4) Si $p(x) \in I$ y $r \in A$, entonces el coeficiente principal de $rp(x)$ es r veces el coeficiente principal de $p(x)$.

Ahora que tenemos que J es un ideal de A , como A es Noetheriano, tenemos la existencia de un número finito de polinomios

$$p_1(x), \dots, p_m(x) \in I$$

tal que J está generado por los coeficientes principales de ellos. Sea N el máximo de los grados de los polinomios $p_1(x), \dots, p_m(x)$.

Para cada entero $k < N$ definimos como J_k al subconjunto de A formado de los coeficientes principales de todos aquellos polinomios en I de grado a lo más k .

Hecho 2. J_k es un ideal de A .

La razón de esto es muy similar a como vimos que J es un ideal. Se puede ver que J_k es cerrado bajo la suma y la resta. Veamos que J_k es cerrado bajo la multiplicación y que es ideal. Para esto, sea $a \in J_k$ y $r \in A$. Veremos que $ra \in J_k$ y tendremos ambos hechos válidos. Sea $p(x) \in I$ cuyo coeficiente principal es a y considere el polinomio de grado cero $q(x) = r \in A[x]$. Como I es un ideal de $A[x]$, tenemos que $p(x)q(x) = rp(x) \in I$. Ya que el coeficiente principal de $rp(x)$ es ra , estamos listos.

Ahora, al ser J_k un ideal en A , la condición de A ser Noetheriano nos asegura que podemos encontrar un número finito de polinomios

$$q_{k,1}(x), \dots, q_{k,n_k}(x) \in I$$

de manera que sus coeficientes principales generan J_k .

Denotemos por \hat{I} al ideal de $A[x]$ generado por todos los polinomios anteriores :

$$p_1(x), \dots, p_m(x), q_{0,1}(x), \dots, q_{0,n_0}(x), \dots, q_{N,1}(x), \dots, q_{N,n_N}(x).$$

Por construcción, el ideal $\hat{I} \subset I$ es finitamente generado.

Hecho 3. $I = \hat{I}$.

Como sabemos que $\hat{I} \subset I$, necesitamos ver que $I - \hat{I} = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe $t(x) \in I - \hat{I}$. Podemos escoger $t(x)$ de grado menor con tal propiedad. Sea $s \in A$ el coeficiente principal de $t(x)$.

- (1) Supongamos que el grado de $t(x)$ es al menos N . Como $s \in J$, existen polinomios (monomios) $r_1(x), \dots, r_m(x) \in A[x]$ tal que $u(x) = \sum_{j=1}^m r_j(x)p_j(x) \in \hat{I}$ tiene coeficiente principal s y cuyo grado sea igual al de $t(x)$. Ahora, como $q(x) = t(x) - u(x) \in I$ tiene grado menor que $t(x)$, debe ocurrir (por la minimalidad de la elección de $t(x)$) que $q(x) \in \hat{I}$. Esto nos dice que $t(x) = q(x) + u(x) \in \hat{I}$, una contradicción.

(2) Si el grado de $t(x)$ es $k < N$, entonces $s \in J_k$ para cierto k . Ahora podemos encontrar polinomios (monomios) $r_{k,j}(x) \in A[x]$ de manera que $v(x) = \sum_{j=1}^{n_k} r_{k,j}(x)q_{k,j}(x) \in \widehat{I}$ tenga coeficiente principal igual s y cuyo grado coincida con el grado de $t(x)$. Ahora procedemos como en el caso (1) para obtener nuevamente una contradicción.

□

Ejemplo 25.0.19. — Sea k un cuerpo y supongamos que tenemos un sistema infinito

$$(*) \quad p_j(x_1, \dots, x_n) = 0; \quad j \in \mathcal{A},$$

donde $p_j(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Denotemos por $V \subset k^n$ al conjunto de soluciones de tal sistema infinito. Sea $I(V) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ formado de aquellos polinomios $q(x_1, \dots, x_n)$ tales que $q(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in V$.

Se tiene que $I(V)$ es un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Luego, al ser $k[x_1, \dots, x_n]$ un anillo Noetheriano, existen un número finito de polinomios

$$q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_d(x_1, \dots, x_n) \in I(V)$$

tales que generan $I(V)$.

Denotemos por $W \subset k^n$ al conjunto de soluciones del sistema finito de polinomios

$$\begin{cases} q_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ q_d(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ya que

$$q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_d(x_1, \dots, x_n) \in I(V),$$

tenemos que $V \subset W$.

Por otro lado, como cada $p_j(x_1, \dots, x_n)$ puede escribirse de la forma

$$p_j = \sum_{i=1}^d r_j q_i,$$

tenemos $W \subset V$. En consecuencia,

$$W = V.$$

Ejercicio 25.0.20. —

1.- Considere en $\mathbb{C}[x]$ el ideal I generado por todos los polinomios

$$p_k(x) = k + x^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ya que $\mathbb{C}[x]$ es dominio de ideales principales, I es generado por un polinomio. Encuentre tal generador.

2.- Considere en $\mathbb{Z}[x]$ el ideal I generado por los polinomios

$$p_{n,m}(x) = 2nx + 3m, n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Verificar que I está generado por 3 y $2x$.

PARTE IV

REPRESENTACIONES LINEALES DE GRUPOS

Para estudiar algunos grupos es útil usar algunas acciones especiales, con ciertas propiedades lineales. No pretendemos escribir un capítulo demasiado preciso sobre representaciones lineales, sólo presentaremos algunos temas básicos que se relacionan con lo expuesto en los capítulos anteriores.

CAPÍTULO 26

REPRESENTACIONES LINEALES

Definición 26.0.21. — Una *representación lineal* de un grupo $(G, *)$ en un espacio vectorial V (sobre algún cuerpo \mathcal{K} , que para nuestro interés puede ser \mathbb{Q} , \mathbb{R} ó \mathbb{C}) es por definición una acción

$$\phi : G \rightarrow GL(V)$$

La dimensión del espacio vectorial V es llamada el *grado de la representación*. Cuando el homomorfismo $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es además inyectivo, es decir una acción fiel, entonces hablamos de una *representación fiel*.

Ejemplo 26.0.22. — Sea $(G, *)$ un grupo simple. Entonces cualquier representación lineal de G es fiel o es la representación trivial ($\phi(g) = I$, para todo $g \in G$). En efecto, dada una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$ tenemos que $\text{Ker}(\phi)$ es un subgrupo normal de G . Como G es simple, tenemos que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, en cuyo caso ϕ es fiel, o $\text{Ker}(\phi) = G$, en cuyo caso $\phi(g) = I$ para $g \in G$.

Ejemplo 26.0.23. — Dado un grupo $(G, *)$ y un cuerpo \mathcal{K} , siempre tenemos la representación de grado uno

$$1 : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : g \mapsto 1$$

De manera más general, si V es un espacio vectorial sobre \mathcal{K} , entonces siempre tenemos la representación trivial

$$I : G \rightarrow GL(V) : g \mapsto I$$

Ejemplo 26.0.24. — Sea $G = \langle x : x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entonces tenemos también la representación de grado uno

$$(-1) : G \rightarrow GL(\mathbb{Q})$$

definida por

$$(-1)(I_G) = 1 \quad (-1)(x) = -1$$

Ejemplo 26.0.25. — Consideremos un grupo $(G, *)$ y una representación de grado 1, digamos $\phi : G \rightarrow GL(V)$, es decir V es un espacio vectorial de dimensión uno sobre el cuerpo \mathcal{K} . Escojamos un vector no cero $v \neq 0$ en V ; entonces $\{v\}$ es base de V . Para cada $g \in G$ tenemos que $\phi(g)(v) = \lambda_g v$ para algún valor $\lambda \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K} - \{0\}$. Como ϕ es un homomorfismo de grupos, tenemos que $\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$, es decir $\lambda_{g_1 * g_2} = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2}$, para todos $g_1, g_2 \in G$. Por ejemplo, $\lambda_{I_G} = 1$. Tenemos además un isomorfismo natural, dado por la base anterior, $L : GL(V) \rightarrow \mathcal{K}^* : \lambda v \mapsto \lambda$. Luego, podemos mirar la representación $L \circ \phi : G \rightarrow \mathcal{K}^* : g \mapsto \lambda_g$.

Observemos que si escogemos otro vector no cero de V , digamos \hat{v} , entonces tenemos que $\hat{v} = av$ para cierto $a \in \mathcal{K}^*$. Luego, no es difícil ver que $\phi(g)(\hat{v}) = \lambda_g \hat{v}$. En otras palabras, el valor $\lambda_g \in \mathcal{K}^*$ está únicamente determinado por $g \in G$ y ϕ , es decir, no depende del vector $v \in V - \{0\}$ escogido.

Suponiendo que $g \in G$ es de orden $o(g)$ finito, se tiene que $\lambda_g^{o(g)} = 1$, es decir, λ_g es una raíz $o(g)$ -ésima de la unidad.

Ejercicio 26.0.26. — Sea $(G, *)$ un grupo cíclico finito. Determinar las representaciones de grado 1 en (i) \mathbb{Q} , (ii) \mathbb{R} y en (iii) \mathbb{C} .

Observación 26.0.27. — Dados un grupo $(G, *)$, una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial V sobre un cuerpo \mathcal{K} , y un subanillo R de \mathcal{K} , podemos dotar de manera natural a V de una estructura de RG -módulo. La idea es la siguiente, primero consideramos un anillo $R[G]$ del grupo G respecto al anillo R . Ahora definimos la operación binaria

$$\sum_{j=1}^n r_j g_j \cdot v = \sum_{j=1}^n r_j \phi(g_j)(v)$$

la cual realiza a V como un $R[G]$ -módulo.

CAPÍTULO 27

ALGUNOS EJEMPLOS DE REPRESENTACIONES

27.1. Representación regular dada por la acción de un grupo

Consideremos una acción de un grupo finito $(G, *)$ sobre un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, digamos $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(X)$. Consideremos un espacio vectorial V de dimensión n y una base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces, podemos construir una representación lineal inducida por la acción anterior de la siguiente manera :

$$\Phi : G \rightarrow GL(V) : g \rightarrow \Phi(g)$$

definida por

$$\Phi(g)\left(\sum_{j=1}^n a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j v_{g(j)}$$

donde $g(j) \in \{1, 2, \dots, n\}$ es tal que $\phi(g)(x_j) = x_{g(j)}$. Lo que estamos haciendo es permutar los elementos de la base de la misma manera como se permutan los elementos de X .

Ejercicio 27.1.1. — En el ejemplo anterior considere $X = G$ y la acción $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ definida por $\phi(g) : G \rightarrow G : h \mapsto g * h$. La representación obtenida es llamada la *representación regular* del grupo G .

27.2. Representación suma directa

Sea $(G, *)$ un grupo y V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathcal{K} . Consideremos dos representaciones lineales

$$\phi : G \rightarrow GL(V) \text{ y } \psi : G \rightarrow GL(W)$$

Entonces podemos formar el espacio producto $V \times W$ y construir la *representación producto ó suma directa*

$$(\phi, \psi) := \phi \oplus \psi : G \rightarrow GL(V \times W)$$

definida como

$$(\phi, \psi)(g) : V \times W \rightarrow V \times W : (v, w) \mapsto (\phi(g)(v), \psi(g)(w))$$

27.3. representación producto tensorial

También podemos hacer el producto tensorial de estos espacios vectoriales $V \otimes V$ y construir la *representación producto tensorial*

$$\phi \otimes \psi : G \rightarrow GL(V \otimes W)$$

definida como

$$\phi \otimes \psi(g) : V \otimes W \rightarrow V \otimes W : v \otimes w \mapsto \phi(g)(v) \otimes \psi(g)(w)$$

27.4. Representación wedge

Podemos considerar es el espacio vectorial wedge $V \wedge V$ y la *representación cuña*

$$\phi \wedge \psi : G \rightarrow GL(V \wedge V) : g \mapsto \phi \wedge \psi$$

donde

$$\phi \wedge \psi(g) : V \rightarrow V : v \mapsto \phi(g)(v) \wedge \psi(g)(v)$$

27.5. Representación Hom

Otro espacio vectorial que podemos formar es $\text{Hom}(V, W)$, el espacio vectorial de todas las funciones lineales de V en W . Dada una función lineal $L : V \rightarrow W$ y $g \in G$, podemos considerar la nueva función lineal

$$\text{Hom}(\phi, \psi)(g)(L) = \psi(g) \circ L \circ \phi(g^{-1}) : V \rightarrow W$$

de donde obtenemos una nueva representación lineal

$$\text{Hom}(\phi, \psi) : G \rightarrow GL(\text{Hom}(V, W)) : g \mapsto \text{Hom}(\phi, \psi)(g)$$

llamada la *representación homomorfismo*.

Ejemplo 27.5.1. — Sea $(G, *)$ un grupo y V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} . Consideremos una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$. Entonces podemos construir su representación dual $\phi^* : G \rightarrow GL(V^*)$ definida como sigue : Si $L : V \rightarrow \mathcal{K}$ es una función lineal, entonces para cada $g \in G$ tenemos que $L \circ \phi(g)^{-1} = L \circ \phi(g^{-1}) : V \rightarrow \mathcal{K}$ es de nuevo una función lineal. Definimos $\phi^*(g) : V^* \rightarrow V^* : L \mapsto L \circ \phi(g^{-1})$. Esta representación es la representación homomorfismo para $W = \mathcal{K}$.

27.6. Representación cociente

Supongamos que tenemos una representación lineal de un grupo $(G, *)$, digamos $\phi : G \rightarrow GL(V)$. Si H es un subgrupo de G , entonces tenemos gratis una representación lineal de H dada por restricción de ϕ a H , llamada la *representación restricción* a H . Si además H es subgrupo normal, entonces tenemos el grupo cociente G/H . Desgraciadamente no podemos hacer descender la representación lineal ϕ para obtener una representación lineal del cociente. Pero si tenemos que $\phi(h) = I$ para todo $h \in H$, entonces si lo podemos hacer como

$$\phi_{G/H} : G/H \rightarrow GL(V) : gH \mapsto \phi(g)$$

llamada la *representación cociente*.

CAPÍTULO 28

REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES Y REDUCIBLES

Definición 28.0.1. — Consideremos una representación $\phi : G \rightarrow GL(V)$, donde V es un subespacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} . Si existe un subespacio propio $W \neq \{0\}$ de V que resulta invariante por cada una de las transformaciones $\phi(g)$, $g \in G$, entonces uno dice que la representación es una *representación reducible*; en caso contrario, decimos que esta es una *representación irreducible*. En el caso de existir $W \neq \{0\}$ invariante por $\phi(G)$, tenemos una representación natural $\phi|_W : G \rightarrow GL(W)$ definida por $\phi|_W(g) = \phi(g)$, la cual es llamada la *subrepresentación inducida* de ϕ .

Ejercicio 28.0.2. — Si tenemos una representación $\phi : G \rightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} , entonces tenemos gratis representaciones reales y complejas (cada $\phi(g)$ es una matriz con coeficientes en \mathbb{Q} , luego con coeficientes en \mathbb{R} y en \mathbb{C}). Puede ocurrir que ϕ sea una representación irreducible (sobre \mathbb{Q}) pero que no lo sea sobre \mathbb{R} ó en \mathbb{C} . Dar un ejemplo de esta situación.

El siguiente resultado para representaciones lineales de grupos finitos es de gran ayuda en el estudio de estos.

Proposición 28.0.3. — Sea G un grupo finito y consideremos una representación $\phi : G \rightarrow GL(V)$ de grado finito. Entonces podemos escoger en V un producto interior Euclidiano (Hermitiano positivo definido en el caso complejo) $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, de manera que $\phi(G)$ es subgrupo del grupo de isometrías $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Demonstración. — Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cualquier producto Euclidiano (Hermitiano positivo en el caso complejo) para V . Entonces basta considerar el producto promediado

$$\langle x, y \rangle_G = \sum_{g \in G} \langle \phi(g)(x), \phi(g)(y) \rangle$$

□

Observación 28.0.4. — En la hipótesis de la proposición anterior la condición de ser grado finito fué para asegurar la existencia de un producto interior para partir nuestro argumento. La finitud de G fué para estar seguros de que la suma usada fuese finita.

Ejercicio 28.0.5. — Verificar que en caso que la representación es irreducible, entonces el producto interior construido en la demostración del teorema es único módulo producto por un escalar.

Corolario 28.0.6. — Sea G un grupo finito y consideremos una representación $\phi : G \rightarrow GL(V)$ de grado finito. Si W es un subespacio vectorial de V que es invariante por cada transformación $\phi(g)$, con $g \in G$, entonces existe un subespacio complementario a W que también es invariante.

Demonstración. — Usando la proposición anterior, podemos asumir que $\phi(g)$ preserva un producto interior Euclidiano (Hermitiano positivo en el caso complejo) \langle, \rangle para cada $g \in G$. Basta entonces escoger

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \text{ para todo } w \in W\}$$

□

CAPÍTULO 29

HOMOMORFISMOS DE REPRESENTACIONES

Podemos relacionar diferentes representaciones lineales del mismo grupo G sobre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de la siguiente manera.

Definición 29.0.7. — Sean $\phi : G \rightarrow GL(V)$ y $\psi : G \rightarrow GL(W)$ dos representaciones lineales de G , donde V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo \mathcal{K} . Un homomorfismo entre estas representaciones es una función lineal $L : V \rightarrow W$ tal que $L(\phi(g)(v)) = \psi(g)(L(v))$, para todo $v \in V$ y todo $g \in G$. Cuando $L : V \rightarrow W$ es un isomorfismo lineal, entonces diremos que las representaciones son equivalentes, en cuyo caso tenemos $\psi(g) = L \circ \phi(g) \circ L^{-1}$ para todo $g \in G$. Denotamos por $\text{Hom}_G(\phi, \psi)$ al conjunto de todos los homomorfismos de representaciones entre $\phi : G \rightarrow GL(V)$ y $\psi : G \rightarrow GL(W)$.

Observación 29.0.8. — No confundir las notaciones $\text{Hom}(\phi, \psi)$ y $\text{Hom}_G(\phi, \psi)$. La primera es una representación mientras la segunda es un conjunto, de hecho un espacio vectorial.

Ejercicio 29.0.9. — Verificar que $\text{Hom}_G(\phi, \psi)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\text{Hom}(V, W)$, formado por todas las funciones lineales de V en W .

Observación 29.0.10. — Consideremos una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} .

- (1) Habíamos visto que para cada anillo R en \mathcal{K} , podíamos construir el anillo $R[G]$ y hacer que V tuviese una estructura de $R[G]$ -módulo. Un homomorfismo de V como $R[G]$ -módulo es una función lineal $L : V \rightarrow V$ que respeta la multiplicación por elementos de $R[G]$, es decir $L(\sum_{j=1}^n r_j g_j \cdot v) = \sum_{j=1}^n r_j g_j \cdot L(v)$. Esto es equivalente a que valga la igualdad $L(g \cdot v) = g \cdot L(v)$, es decir, $L \circ \phi(g) = \phi(g) \circ L$. Esto último dice que $L \in \text{Hom}_G(\phi, \phi)$. Es claro que vale el recíproco. De esta manera

$\text{Hom}_G(\phi, \phi)$ corresponde exactamente a los homomorfismos de V como $R[G]$ -módulo. En forma similar, $\text{Hom}_G(\phi, \psi)$ corresponde exactamente a los homomorfismos de V en W como $R[G]$ -módulos.

- (2) Para $g \in G$, el isomorfismo de espacio vectorial $\phi(g) : V \rightarrow V$ no tiene por que pertenecer a $\text{Hom}_G(\phi, \phi)$. La condición para que $\phi(g) \in \text{Hom}_G(\phi, \phi)$ es que para todo $h \in G$ valga la igualdad $\phi(g)(h \cdot v) = h \cdot \phi(g)(v)$, es decir $\phi(g * h) = \phi(h * g)$. Por ejemplo, si la representación es fiel, entonces lo anterior es equivalente a tener $g \in Z(G)$. En todo caso, si $(G, *)$ es finito consideramos la función lineal promediada

$$L = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) : V \rightarrow V$$

la cual satisface $L \in \text{Hom}_G(\phi, \phi)$.

Ejercicio 29.0.11. — Verificar que la función lineal

$$L := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) : V \rightarrow V$$

satisface las siguientes propiedades :

- (i) $\text{Im}(L) = \{v \in V : \phi(g)(v) = v \text{ para todo } g \in G\}$
- (ii) $L \circ L = L$
- (iii) Concluir que L es una proyección.

Ejemplo 29.0.12. — Consideremos un grupo $(G, *)$ y dos representaciones $\phi : G \rightarrow GL(V)$, $\psi : G \rightarrow GL(W)$, donde V y W son espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathcal{K} . Supongamos que tenemos un homomorfismo de representaciones $L : V \rightarrow W$. Asociado a la función lineal L tenemos los dos subespacios siguientes :

$$\text{Ker}(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$$

$$\text{Im}(L) = \{w \in W : L(v) = w, \text{ para algún } v \in V\}$$

De la igualdad $L(\phi(g)(v)) = \psi(g)(L(v))$, para todo $v \in V$ y todo $g \in G$, es claro que $\text{Ker}(L)$ es un subespacio invariante de $\phi(G)$ y $\text{Im}(L)$ es un subespacio invariante por $\psi(G)$. En particular, si la representación $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es irreducible, entonces $\text{Ker}(L) \in \{\{0\}, V\}$, es decir la función lineal L es inyectiva o es trivial $L \equiv 0$. De manera similar, si la representación $\psi : G \rightarrow GL(W)$ es irreducible, entonces tenemos que $\text{Im}(L) \in \{\{0\}, W\}$, es decir la función lineal L es sobreyectiva o es trivial $L \equiv 0$. Esto nos permite concluir el siguiente resultado.

Proposición 29.0.13 (Lema de Schur). — Sea $(G, *)$ un grupo y dos representaciones irreducibles $\phi : G \rightarrow GL(V)$, $\psi : G \rightarrow GL(W)$, donde V, W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Si $L : V \rightarrow W$ es un homomorfismo entre esas representaciones, entonces $L \equiv 0$ o L es un isomorfismo.

Corolario 29.0.14. — Sea $(G, *)$ un grupo y dos representaciones irreducibles $\phi : G \rightarrow GL(V)$, $\psi : G \rightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} . Si $L : V \rightarrow V$ es un homomorfismo entre esas representaciones, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que para cada $v \in V$ vale que $L(v) = \lambda v$.

Demonstración. — Como todo polinomio de coeficientes complejos de grado mayor o igual a uno tiene ceros complejos, tenemos que L tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. La función lineal $N = L - \lambda I : V \rightarrow V$ sigue siendo un homomorfismo de las representaciones anteriores. Por el lema de Schur, tenemos que $N \equiv 0$ o N es isomorfismo. Pero al ser λ valor propio de L , entonces N tiene núcleo no trivial, luego $N \equiv 0$. \square

Ejemplo 29.0.15. — Consideremos un grupo $(G, *)$ y representaciones $\rho_j : G \rightarrow GL(V_j)$, donde V_j son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, $j = 1, 2, \dots, N$. Entonces tenemos de manera natural el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N$. Existe un monomorfismo natural

$$J : GL(V_1) \times GL(V_2) \times \dots \times GL(V_N) \rightarrow GL(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N)$$

dado por

$$J(L_1, L_2, \dots, L_N)(v_1, v_2, \dots, v_N) = (L_1(v_1), L_2(v_2), \dots, L_N(v_N))$$

Esto nos permite construir la *representación producto*

$$(\rho_1, \dots, \rho_N) : G \rightarrow GL(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N)$$

definido por

$$(\rho_1, \dots, \rho_N)(g) = J(\rho_1(g), \dots, \rho_N(g))$$

Observemos que cada subespacio $\widehat{V}_j = \{(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in V_1 \times \dots \times V_N\}$ es invariante por (ρ_1, \dots, ρ_N) . Luego esta representación es reducible. Matricialmente hablando, lo que estamos haciendo es formar una gran matriz a partir de matrices pequeñas colocándolas en manera diagonal.

El siguiente resultado nos dice que para entender las representaciones lineales de un grupo finito basta con entender las representaciones irreducibles.

Proposición 29.0.16. — Sean $(G, *)$ un grupo finito y V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, toda representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es equivalente a una única representación producto, módulo isomorfismo de representaciones, donde cada representación involucrada es irreducible.

Demonstración. — Como V tiene dimensión finita y G es de orden finito, podemos introducir un producto interior Euclidiano (Hermitiano positivo definido en el caso complejo) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de manera que $\rho(G) \subset O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Si la representación es irreducible, entonces no hay nada que verificar. Supongamos que existen subespacios invariantes no triviales. Tomemos uno de la menor dimensión posible, digamos V_1 . Entonces sabemos que $W = V_1^\perp$ (espacio ortogonal a V_1 respecto a nuestro producto interior) también es invariante por

$\rho(G)$ por el corolario anterior. Tenemos que la representación inducida por ρ , digamos $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ es irreducible por la minimalidad de la dimensión. Ahora miramos la representación $\rho : G \rightarrow GL(W)$ y procedemos de la misma manera como lo hemos hecho para V . Este proceso termina después de un número finito de pasos debido a que V tiene dimensión finita y nos entrega una descomposición ortogonal $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_N$ y representaciones irreducibles $\rho_j = \rho : G \rightarrow GL(V_j)$. Ahora es claro por la construcción que $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es equivalente al producto de las representaciones $\rho_j : G \rightarrow GL(V_j)$. Ahora necesitamos ver la unicidad módulo isomorfismos de representaciones. Para esto, supongamos que tenemos otra representación equivalente a la representación $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : G \rightarrow GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_N)$, digamos la representación $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) : G \rightarrow GL(W_1) \times \cdots \times GL(W_M)$, donde cada representación $\eta_j : G \rightarrow GL(W_j)$ es irreducible. Sea $L : V_1 \times \cdots \times V_N \rightarrow W_1 \times \cdots \times W_M$ el isomorfismo de tales representaciones. Entonces, $L(V_j)$ es un subespacio invariante por la representación η , luego debe coincidir por la irreducibilidad a una de los subespacios W_r . Así, L establece una biyección entre los espacios V_1, \dots, V_N y los espacios W_1, \dots, W_M , en particular, $N = M$. \square

Observación 29.0.17. — En el resultado anterior, tenemos que en la representación producto $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : G \rightarrow GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_N)$ en representaciones factores irreducibles, puede ocurrir que dos de ellas, digamos $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$ y $\rho_j : G \rightarrow GL(V_j)$, sean isomorfas. En ese caso, podemos reordenar los factores de manera que los factores $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1), \dots, \rho_k : G \rightarrow GL(V_k)$ son los factores no equivalentes y escribir como

$$\rho = (\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_k^{n_k}) : G \rightarrow GL(V_1^{n_1}) \times \cdots \times GL(V_k^{n_k}),$$

donde n_j denota la cantidad de factores equivalentes a la representación ρ_j .

Ejemplo 29.0.18. — Consideremos el espacio vectorial real (podemos usar otros cuerpos) $V = \mathbb{R}^n$. Tenemos de manera natural una representación de grado n del grupo simétrico \mathcal{S}_n actuando por permutaciones en las coordenadas de los vectores de V . De manera más precisa, consideremos los generadores $a = (1, 2, 3, \dots, n), b = (1, 2)$. Entonces definimos

$$\rho_n(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La representación $\rho_n : \mathcal{S}_n \rightarrow O_n < GL(\mathbb{R}^n) \cong GL(n, \mathbb{R})$ resulta ser reducible, donde O_n denota el subgrupo de las rotaciones. En efecto, si consideramos el subespacio vectorial de dimensión uno W generado por el vector $(1, 1, \dots, 1, 1)$, entonces obtenemos que $\rho_n(g)(W) = W$, para cada $g \in \mathcal{S}_n$. Como $\rho_n(\mathcal{S}_n) < O_n$, tenemos que cada $\rho(g)$, $g \in \mathcal{S}_n$ es una simetría para el producto Euclidiano estandar (dado por el producto punto). En particular, W^\perp , el subespacio ortogonal a W , también resulta invariante, donde

$$W^\perp = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

Consideremos el isomorfismo

$$\eta : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow W$$

definido por

$$\eta(e_j) = E_j - E_n$$

donde $e_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ (respectivamente, $E_j \in \mathbb{R}^n$) es el vector canónico con todas sus coordenadas igual a cero excepto la coordenada j -ésima que es igual a 1. Usando este isomorfismo, podemos mirar la representación inducida $\rho_n(\mathcal{S}_n)$ sobre W como una representación en \mathbb{R}^{n-1} , digamos

$$\rho_{n-1} : \mathcal{S}_n \rightarrow GL(\mathbb{R}^{n-1}),$$

definida por $\rho_{n-1}(g) = \eta^{-1}\rho(g)\eta$. Se puede ver que

$$\rho_{n-1}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{n-1}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta representación de grado $(n-1)$ es llamada la *representación estandar* del grupo \mathcal{S}_n . Se sabe que esta representación es irreducible. La idea es que si tomamos un vector $v \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, entonces $v, \rho_{n-1}(a)(v), \rho_{n-1}(a^2)(v), \dots, \rho_{n-1}(a^{n-2})(v)$ resulta ser una base de \mathbb{R}^{n-1} . Por ejemplo, si $n = 3$ y $v = (u, v) \neq (0, 0)$, entonces la condición para

que v y $\rho_2(a)(v) = (-v, u - v)$ sean linealmente dependientes es equivalente a que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el sistema lineal

$$\begin{cases} \lambda u + v = 0 \\ -u + (1 + \lambda)v = 0 \end{cases}$$

tenga como solución a (u, v) . Esto obliga a que el determinante de la matriz asociada al sistema sea cero. Pero el determinante de tal matriz es $\lambda^2 + \lambda + 1$, el cual no tiene solución real, una contradicción.

De lo anterior tenemos la descomposición en factores irreducibles $\rho_n = (\rho_{n-1}, (-1))$, donde (-1) es la representación uno-dimensional que envía a las permutaciones pares en -1 y a las impares en 1 .

Ejercicio 29.0.19. — Verificar la irreducibilidad de la representación $\rho_{n-1}(\mathcal{S}_n)$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 29.0.20. — El ejemplo anterior, para el caso $n = 3$, nos da una representación irreducible de \mathcal{S}_3 en el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , más aún, en el espacio vectorial \mathcal{Q}^2 . Miremos otras representaciones de este grupo. Podemos hacer actuar el grupo en sí mismo como sigue

$$\phi : \mathcal{S}_3 \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{S}_3) : \sigma \mapsto \phi(\sigma)$$

donde

$$\phi(\sigma) : \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_3 : \tau \mapsto \sigma\tau$$

Por ejemplo, $\phi((1, 2, 3))$ actúa de la siguiente manera :

$$x_1 = I \mapsto (1, 2, 3) = x_2$$

$$x_2 = (1, 2, 3) \mapsto (1, 3, 2) = x_3$$

$$x_3 = (1, 3, 2) \mapsto I = x_1$$

$$x_4 = (1, 2) \mapsto (1, 3) = x_5$$

$$x_5 = (1, 3) \mapsto (2, 3) = x_6$$

$$x_6 = (2, 3) \mapsto (1, 2) = x_4$$

Luego podemos mirar en las coordenadas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}^6$$

que $\phi((1, 2, 3))$ puede ser representada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En forma similar, $\phi((1, 2))$ es dada por

$$\begin{aligned} x_1 = I &\mapsto (1, 2) = x_4 \\ x_2 = (1, 2, 3) &\mapsto (2, 3) = x_6 \\ x_3 = (1, 3, 2) &\mapsto (1, 3) = x_5 \\ x_4 = (1, 2) &\mapsto I = x_1 \\ x_5 = (1, 3) &\mapsto (1, 3, 2) = x_3 \\ x_6 = (2, 3) &\mapsto (1, 2, 3) = x_2 \end{aligned}$$

puede ser representada por la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función dada por

$$\psi : \mathcal{S}_3 \rightarrow GL(\mathbb{Q}^6)$$

definida por $\psi((1, 2, 3)) = A$ y $\psi((1, 2)) = B$, define una representación racional de grado 6. Consideremos el subespacio $W < \mathbb{Q}^6$ de dimensión 3 correspondiente a tomar $w_1 = x_1 + x_4 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $w_2 = x_2 + x_5 = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $w_3 = x_3 + x_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$. Entonces W es invariante, es decir, la representación es reducible. Más aún, la representación en W es dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, obtenemos la representación reducible ρ_3 del ejemplo anterior.

Ejemplo 29.0.21. — Consideremos el grupo más simple que tenemos, es decir, el grupo cíclico de orden dos

$$G = \langle x : x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Consideremos cualquier representación

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

donde V es algún espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} . Entonces si consideramos los espacios propios

$$V^+ = \{v \in V : \rho(x)(v) = v\}$$

$$V^- = \{v \in V : \rho(x)(v) = -v\}$$

entonces tenemos la descomposición

$$V = V^+ \oplus V^-$$

Escogiendo una base para V^+ y una base de V^- , obtenemos al juntarlas una base de V . En esta base, la representación es entonces equivalente a la representación

$$\eta : G \rightarrow GL(V^+ \times V^-) \leq GL(V^+) \times GL(V^-)$$

donde

$$\eta(x) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

De aquí observamos que las únicas representaciones irreducibles de G son las siguientes dos de grado 1 :

$$\rho_+ : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto 1$$

$$\rho_- : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto -1$$

Ejemplo 29.0.22. — Consideremos ahora el grupo Abelian más simple que no sea cíclico, es decir,

$$G = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Consideremos cualquier representación

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

donde V es algún espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} . Entonces si consideramos los espacios propios

$$V^+ = \{v \in V : \rho(x)(v) = v\}$$

$$V^- = \{v \in V : \rho(x)(v) = -v\}$$

El hecho que $\rho(x)$ y $\rho(y)$ conmutan asegura que $\rho(y)$ deja a los subespacios V^+ y V^- invariantes. Entonces podemos escoger los subespacios siguientes :

$$V_+^+ = \{v \in V^+ : \rho(y)(v) = v\}$$

$$V_-^+ = \{v \in V^+ : \rho(y)(v) = -v\}$$

$$V_+^- = \{v \in V^- : \rho(y)(v) = v\}$$

$$V_-^- = \{v \in V^- : \rho(y)(v) = -v\}$$

Tenemos entonces que

$$V = V_+^+ \oplus V_-^+ \oplus V_+^- \oplus V_-^-$$

Podemos escoger una base de V adjuntando primero una base de V_+^+ , luego una base de V_+^- , luego una base de V_-^+ y finalmente una base de V_-^- . En esta base, la representación es entonces equivalente a la representación

$$\eta : G \rightarrow GL(V_+^+ \times V_+^- \times V_-^+ \times V_-^-) \simeq GL(V_+^+) \times GL(V_+^-) \times GL(V_-^+) \times GL(V_-^-)$$

donde

$$\eta(x) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \quad \eta(y) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

Luego las representaciones irreducibles de G son las siguientes cuatro de grado 1 :

$$\rho_{++} : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto 1, y \mapsto 1$$

$$\rho_{+-} : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto 1, y \mapsto -1$$

$$\rho_{-+} : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto -1, y \mapsto 1$$

$$\rho_{--} : G \rightarrow GL(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^* : x \mapsto -1, y \mapsto -1$$

CAPÍTULO 30

CARÁCTERES Y CONTEO DE REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

En esta sección veremos como determinar cuantas representaciones irreducibles no equivalentes sobre el cuerpo de los números complejos existen para cada grupo finito $(G, *)$. De manera más precisa.

Teorema 30.0.23. — Sea $(G, *)$ un grupo finito. Entonces el número de representaciones irreducibles complejas no equivalentes es igual al número de clases de conjugación en G .

Ejemplo 30.0.24. — Para el grupo simétrico S_n habíamos visto en la sección 14 que el número de clases de conjugación es igual al número de soluciones del sistema

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = n$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0$$

luego, ese número es exactamente la cantidad de representaciones irreducibles complejas no equivalentes de S_n .

Necesitaremos algunos conceptos que iremos definiendo a continuación.

Definición 30.0.25. — Cada representación compleja $\phi : G \rightarrow GL(V)$, de un grupo $(G, *)$ (finito o infinito) de grado finito tiene asociada la función

$$\chi_\phi : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \text{Tr}(\phi(g))$$

donde $\text{Tr}(\phi(g))$ denota la traza del automorfismo lineal $\phi(g) : V \rightarrow V$. A esta función la llamaremos el *carácter* de ϕ . Observemos que

$$\chi_\phi(I_G) = \dim(V)$$

Como conjugación preserva las trazas, vemos que el carácter de representaciones equivalentes es el mismo. Más aún, si $g, h \in G$, entonces vale que $\chi_\phi(g) = \chi_\phi(h * g * h^{-1})$; luego el carácter es constante en cada clase de conjugación en G .

Ejercicio 30.0.26. — Ya que hemos hablado de producto de representaciones, digamos en este punto que si $\phi : G \rightarrow GL(V)$ y $\psi : G \rightarrow GL(W)$ son dos representaciones del grupo finito $(G, *)$, ambas de grado finito, entonces

$$\chi_{(\phi, \psi)} = \chi_\phi + \chi_\psi$$

Verificar que el conjunto de los caracteres de todas las representaciones lineales de grado finito de un grupo finito $(G, *)$ no es necesariamente un espacio vectorial.

tenemos que el conjunto de los caracteres no define un espacio vectorial.

Definición 30.0.27. — El conjunto de las *funciones de clase* es

$$F(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es constante en las clases de conjugación de } G\}$$

Definición 30.0.28. — Denotemos por $Car(G) \subset F(G)$ al conjunto de los caracteres de las representaciones de grado finito de G .

Ejercicio 30.0.29. — Verificar que $F(G)$ es el espacio vectorial más pequeño que contiene $Car(G)$.

Ejercicio 30.0.30. — Calcular los caracteres asociados a las representaciones de grado finito de las secciones anteriores. En particular,

- (i) para la representación lineal asociado a una acción $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(X)$, del grupo finito $(G, *)$ sobre un conjunto finito X , verificar que el carácter evaluado en $g \in G$ coincide con la cardinalidad de $Fix(\phi(g))$;
- (ii) $\chi_{\phi \otimes \psi}(g) = \chi_\phi(g)\chi_\psi(g)$
- (iii) $\chi_{\phi^*}(g) = \overline{\chi_\phi(g)}$
- (iv) $\chi_{\phi \wedge \phi}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\phi(g)^2 - \chi_\phi(g^2))$

Ejercicio 30.0.31. — Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación compleja de grado finito del grupo finito $(G, *)$ y $\chi_\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ su carácter asociado. Verificar que χ_ϕ permite conocer los valores propios de $\phi(g)$ para cada $g \in G$ (observe que si los valores propios de g son $\{\lambda_j\}$, entonces los valores propios de g^k son $\{\lambda_j^k\}$).

Supongamos que tenemos una representación compleja de grado finito de un grupo finito $(G, *)$, digamos

$$\phi : G \rightarrow GL(V)$$

Como $\chi_\phi(I_G) = \dim(V)$, tenemos que el carácter determina el grado de la representación. Para esta acción tenemos que

$$V_G = \{v \in V : \eta(g)(v) = v \text{ para cada } g \in G\}$$

Ejercicio 30.0.32. — Verificar que V_G es un subespacio vectorial de V y que la representación η es irreducible sí y sólo si $V_G = \{0\}$.

Una manera de calcular explícitamente el subespacio vectorial V_G es la siguiente. Consideremos la función lineal dada por el promedio

$$L = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \eta(g) : V \rightarrow V \in \text{Hom}_G(\phi, \phi)$$

Tenemos que

- (i) $L(v) \in V_G$, para cada $v \in V$;
- (ii) $L(v) = v$, para cada $v \in V_G$.

De esta manera, $L : V \rightarrow V_G$ es una proyección sobre V_G y además

$$V_G = \text{Fix}(L)$$

en particular,

$$\begin{aligned} \dim(V_G) &= \text{Tr}(L) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\eta(g)) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\eta(g) \end{aligned}$$

En particular, si η es una representación irreducible, entonces necesariamente debemos tener

$$\sum_{g \in G} \chi_\eta(g) = 0$$

Consideremos ahora dos representaciones irreducibles

$$\phi : G \rightarrow GL(V) \text{ y } \psi : G \rightarrow GL(W)$$

podemos considerar el espacio vectorial $\text{Hom}_G(\phi, \psi)$ formado por todos los homomorfismos $M : V \rightarrow W$ de las dos representaciones. Como consecuencia del lema de Schur y su corolario, tenemos que

$$\dim(\text{Hom}_G(\phi, \psi)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi \text{ y } \psi \text{ son equivalentes} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Consideremos la representación homomorfismo

$$\eta = \text{Hom}(\phi, \psi) : G \rightarrow GL(\text{Hom}(V, W))$$

cuyo carácter asociado es dado por $\chi_\eta = \overline{\chi_\phi} \chi_\psi$

En este caso, tenemos que $\text{Hom}(V, W)_G = \text{Hom}_G(\phi, \psi)$.

Así, por lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\phi(g)} \chi_\psi(g) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\eta(g) = \dim(\text{Hom}_G(\phi, \psi)) = \\ &= \dim(\text{Hom}(V, W))_G = \begin{cases} 1 & \text{si las representaciones son equivalentes} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Esta fórmula nos permite definir un producto interior Hermitiano

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

sobre el espacio vectorial $F(G)$ de las funciones de clases de G de manera que los caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes forman un conjunto ortonormal. Una consecuencia de esta situación es la siguiente.

Proposición 30.0.33. — *Toda representación compleja de grado finito de un grupo finito $(G, *)$, digamos $\phi : G \rightarrow GL(V)$, está únicamente determinada, módulo equivalencia, por su carácter. Más aún, la representación es irreducible si y sólo si $(\chi_\phi, \chi_\phi) = 1$.*

Demonstración. —

Situación Irreducible. Consideremos dos representaciones irreducibles $\phi : G \rightarrow GL(V)$ y $\psi : G \rightarrow GL(W)$, ambas de grado finito con el mismo carácter χ . Supongamos primero que ambas representaciones son irreducibles, entonces podemos utilizar lo hecho anteriormente para obtener nuestro resultado.

Situación General. Supongamos que la representación ϕ no es irreducible. Entonces, podemos encontrar representaciones irreducibles no equivalentes $\rho_j : G \rightarrow GL(V_j)$, para $j = 1, \dots, r$, de manera que $\rho = (\rho_1^{a_1}, \dots, \rho_r^{a_r}) : G \rightarrow GL(V_1^{a_1} \times \dots \times V_r^{a_r})$ es equivalente a ϕ . En este caso tenemos que

$$\chi_\phi = \chi_\rho = \sum_{j=1}^r a_j \chi_{\rho_j}$$

Como cada representación irreducible está determinada por su carácter, tenemos que la representación ϕ queda determinada por su carácter. Observemos que en este caso $(\chi_\phi, \chi_\phi) = \sum_{j=1}^r a_j^2$. □

De lo anterior, vemos que las representaciones lineales de grado finito de un grupo finito $(G, *)$ quedan determinados, módulo equivalencia, por sus caracteres.

Supongamos que A_1, \dots, A_n son las diferentes clases de conjugación del grupo G , donde $A_1 = \{I_G\}$. Escojamos un representante de cada clase, digamos $g_j \in A_j$, $j =$

2, 3, ..., n. Sea $a_j = \#A_j$. Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clase del grupo finito de G , entonces consideremos el vector

$$(f(I_G), f(g_2), \dots, f(g_n)) \in \mathbb{C}^n$$

Esto nos permite construir una función lineal inyectiva

$$M : F(G) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

y así considerar $F(G)$ como un subespacio de \mathbb{C}^n y, en particular, considerar $Car(G)$ como un conjunto de vectores.

En el espacio vectorial \mathbb{C}^n podemos considerar el producto interior Hermitiano

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^n a_j \overline{x_j} y_j$$

Ejercicio 30.0.34. — Verificar que este producto Hermitiano hace que M sea una isometría respecto al producto Hermitiano considerado anteriormente para $F(G)$.

Ahora, los vectores en \mathbb{C}^n que corresponden a los caracteres de representaciones irreducibles forman un conjunto ortonormal respecto al producto Hermitiano, en particular, se tiene la segunda consecuencia, una aproximación del teorema 30.0.23.

Proposición 30.0.35. — El número de representaciones irreducibles no equivalentes de grado finito de un grupo finito $(G, *)$ es a lo más el número de clases de conjugación en G .

Ejemplo 30.0.36. — Consideremos $(G, *)$ un grupo finito y la acción $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G) : h \mapsto g * h$. Consideremos la representación lineal que esta define, es decir la representación regular de G , denotemosla por $\phi_G : G \rightarrow GL(V)$, donde $\dim(V) = |G|$. En este caso

$$\chi_{\phi_G}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq I_G \\ |G| & \text{si } g = I_G \end{cases}$$

En particular $\langle \chi_{\phi_G}, \chi_{\phi_G} \rangle = |G|^2$, con lo cual obtenemos que esta representación lineal no es irreducible para $|G| > 1$. En este caso, tenemos que ϕ_G es equivalente a la representación $\rho = (\rho_1^{a_1}, \dots, \rho_r^{a_r})$, donde ρ_1, \dots, ρ_r son todas las representaciones irreducibles de G de grado finito y $a_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Habíamos observado que

$$\begin{aligned} a_j = \langle \rho_j, \rho \rangle &= \langle \rho_j, \chi_{\phi_G} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_j(g)} \chi_{\phi_G}(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\rho_j(I_G)} \chi_{\phi_G}(I_G) = \\ &= \overline{\rho_j(I_G)} = \text{grado de la representación } \rho_j > 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto vemos que en la representación regular ϕ_G del grupo G aparecen todas las representaciones irreducibles de G , cada una apareciendo exactamente

tantas veces como su grado. Una consecuencia simple de esto es que el número de representaciones irreducibles no equivalentes es finita (lo que ya sabíamos por la proposición anterior). Además, tenemos que

$$|G| = \langle \chi_{\phi_G}, \chi_{\phi_G} \rangle = \sum_{j=1}^r a_j^2$$

Proposición 30.0.37. — *La suma de los cuadrados de los grados de todas las representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo finito es igual al orden de este.*

Ejemplo 30.0.38. — Para el grupo S_3 tenemos a lo más tres representaciones irreducibles no equivalentes. Por la proposición anterior se puede ver que no hay sólo una representación irreducible ya que 6 no es un cuadrado de un entero. Si hubiesen sólo dos representaciones irreducibles, entonces estaríamos diciendo que 6 es suma de dos cuadrados, lo cual no es posible. De esta manera, obtenemos que deben haber exactamente tres representaciones irreducibles no equivalentes. Si denotamos por $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, \dots\}$ los grados de estas, entonces debemos tener $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 6$. De aquí vemos que la única posibilidad es dada por el siguiente trío, módulo permutación, $(1, 1, 2)$.

Ahora procedemos a verificar que el conjunto ortonormal de vectores que corresponden a las representaciones irreducibles de G es de hecho una base, obteniendo de esta manera la demostración del teorema 30.0.23.

Para esto supongamos que tenemos la posibilidad de escoger una función de clases de G , digamos $f \in F(G)$, que sea ortogonal a cada carácter de una representación irreducible de G . Bastará con verificar que $f = 0$.

Consideremos una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$ de grado finito d . Definamos la función lineal $L : V \rightarrow V$ por

$$L(v) = \sum_{g \in G} f(g) \phi(g)(v)$$

Para cada $h \in G$ y cada $v \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(h) \circ L \circ \phi(h^{-1})(v) &= \sum_{g \in G} f(g) \phi(h * g * h^{-1})(v) = \\ &= \sum_{g \in G} f(h * g * h^{-1}) \phi(h * g * h^{-1})(v) = \sum_{k \in G} f(k) \phi(k)(v) = L(v) \end{aligned}$$

en particular, $L \in \text{Hom}_G(\phi, \phi)$. Como consecuencia del corolario al lema de Schur vale que $L(v) = \lambda v$ para cierto valor $\lambda \in \mathbb{C}$, luego

$$\begin{aligned} \lambda d = \text{Tr}(L) &= \sum_{g \in G} f(g) \text{Tr}(\phi(g)) = \sum_{g \in G} f(g) \chi_{\phi}(g) = \\ &= |G| \langle \bar{f}, \chi_{\phi} \rangle = |G| \langle \bar{f}, \overline{\chi_{\phi}} \rangle = |G| \langle \bar{f}, \chi_{\phi^*} \rangle \end{aligned}$$

y como χ_{ϕ^*} es una combinación lineal de los caracteres de las representaciones irreducibles que descomponen la representación ϕ , obtenemos finalmente

$$\lambda d = 0$$

y, en particular, $\lambda = 0$ como deseabamos para completar la demostración del teorema 30.0.23.

En resumen. Dado un grupo finito $(G, *)$, procedemos como sigue :

- (1) determinamos la cantidad n de clases de conjugación y las respectivas cardinalidades $a_1 = 1, a_2, \dots, a_n$.
- (2) consideramos el producto interior Hermitiano en \mathbb{C}^n dado por

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^n a_j \overline{x_j} y_j$$

- (3) buscamos bases ortonormales de \mathbb{C}^n con la propiedad de que la primera coordenada de cada vector involucrado sea un entero positivo y tal que la suma de los cuadrados de las primeras coordenadas sea igual al orden del grupo. Uno de los vectores involucrados siempre es $(1, 1, \dots, 1)$ que corresponde a la representación trivial

$$1 : G \rightarrow \mathbb{C}^* : g \mapsto 1$$

Ejemplo 30.0.39. — Consideremos el grupo simétrico \mathcal{S}_3 . En este caso tenemos 3 clases de conjugación $A_1 = \{I\}$, $A_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ y $A_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$. De esto sabemos que hay exactamente tres representaciones irreducibles de \mathcal{S}_3 . En \mathbb{C}^3 entonces consideramos el producto Hermitiano

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \frac{1}{6} (\overline{x_1} y_1 + 3\overline{x_2} y_2 + 2\overline{x_3} y_3)$$

Si consideramos tres vectores $(a_j, b_j, c_j) \in \mathbb{C}^3$, donde $a_j \in \{1, 2, \dots\}$, formando una base ortonormal, entonces debemos tener las ecuaciones ($i \neq j \in \{1, 2, 3\}$)

$$\begin{aligned} a_j^2 + 3|b_j|^2 + 2|c_j|^2 &= 6 \\ a_i a_j + 3\overline{b_i} b_j + 2\overline{c_i} c_j &= 0 \end{aligned}$$

La igualdad $a_j^2 + 3|b_j|^2 + 2|c_j|^2 = 6$ de donde podemos observar que $a_j \in \{1, 2\}$.

De esta información obtenemos que las tres representaciones irreducibles son de grado 1 y/o 2. Por un lado, siempre está la representación irreducible de grado 1 trivial

$$1 : \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* : g \mapsto 1$$

cuyo carácter corresponde al vector $(1, 1, 1)$. Otra representación irreducible de grado 1 es

$$-1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^* : g \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } g \text{ tiene orden par} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

cuyo carácter corresponde al vector $(1, -1, 1)$. La tercera representación irreducible tiene carácter correspondiente a un vector (a, b, c) , donde $a \in \{1, 2\}$ y valen las igualdades :

$$\begin{aligned}a^2 + 3|b|^2 + 2|c|^2 &= 6 \\a + 3b + 2c &= 0 \\a - 3b + 2c &= 0\end{aligned}$$

De las dos últimas igualdades obtenemos al sumirlas $a = -2c$, de donde estamos obligados a tomar $a = 2$, $c = -1$ y luego $b = 0$. En particular, la tercera representación irreducible es dada por el vector $(2, 0, -1)$ que es de grado 2. Esta representación es dada por $\phi : G \rightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ tal que

$$\phi(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} e^{\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/3} \end{bmatrix}$$

$$\phi(1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

REFERENCIAS

- [1] Burnside, W. *Theory of Groups of Finite Order*, Dover, 1955.
- [2] Coxeter, H.S. and Moser, W.O. *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1965.
- [3] Fraleigh, J.B. *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 1982.
- [4] Fulton, W. and Harris, J.H. *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1991.
- [5] Jacobson, N. *Lecture in Abstract Algebra*, Princeton, vol.1, 1951, vol.2, 1953, vol.3, 1964.
- [6] Herstein, I.N. *Topics in Algebra*, Blaisdell, 1964.
- [7] Van der Waerden, B.L. *Modrn Algebra*, Ungar, vol.1, 1949, vol2, 1940.

INDICE

- p -Grupo, 76
- Abelianización de un grupo, 38
- Acción fiel, 71
- Acción por la derecha de un grupo, 71
- Acción por la izquierda de un grupo, 71
- Acción transitiva, 74
- Anillo, 95
- Anillo cociente, 108
- Anillo con unidad, 96
- Anillo conmutativo, 98
- Anillo de división, 96
- Anillo de polinomios, 97
- Anillo de un grupo, 96
- Anillo Noetheriano, 131
- Anillos isomorfos, 103
- Antiautomorfismo de grupos, 19
- Asociatividad, 7
- Automorfismo interior, 20
- Automorfismos de grupo, 17
- Cápsula normal, 40
- Ciclo, 63
- Carácter de una representación, 155
- Característica, 113
- Centralizador de un elemento, 38
- Centralizador de un grupo, 38
- Cero de un polinomio, 105
- Commutatividad, 9
- Conmutador, 37
- Cuaternos, 99
- Cuerpo, 98
- Cuerpo de fracciones, 117
- Cuerpo no conmutativo, 99
- Cuerpos primos, 113
- Descomposición en Fracciones Parciales, 127
- Divisores de cero, 98
- Dominio de factorización Unica, 122
- Dominio de Ideales Principales, 120
- Dominio entero, 98
- Dominio Euclidiano, 119
- Ecuación de las clases, 77
- Elemento inverso, 7
- Elemento Irreducible, 121
- Elemento Neutro, 7
- Enteros Gausianos, 120
- Estabilizador de un punto, 73
- Función de clase, 156
- Función de Euler, 14
- Grado de un polinomio, 97
- Grado de una representación, 137
- Grafo, 11
- Grupo Abeliano, 9
- Grupo alternante, 65
- Grupo de automorfismos exteriores, 31
- Grupo de clases laterales, 29
- Grupo de isometrías, 6
- Grupo de Klein, 28
- Grupo de las clases residuales, 31
- Grupo dihedral, 59
- Grupo Especial Lineal, 10
- Grupo fundamental, 15
- Grupo libre, 55
- Grupo libre abeliano, 57
- Grupo orientable, 90
- Grupo orientado, 90
- Grupo Proyectivo Lineal, 10
- Grupo reflejado, 19

- Grupo Simétrico, 21
- Grupo simétrico, 63
- Grupo simple, 88
- Grupos cíclicos, 23
- Grupos de permutaciones, 4
- Grupos isomorfos, 17
- Grupos sin torsión, 40
- HNN-extensión, 53
- Homomorfismo de anillos, 103
- Homomorfismo de evaluación, 104
- Homomorfismo de grupos, 17
- Ideal, 107
- Ideal derecho, 107
- Ideal generado, 109
- Ideal izquierdo, 107
- Ideal maximal, 111
- Ideal primo, 111
- Ideal principal, 109
- Imágen de un homomorfismo, 17
- Índice de un subgrupo, 27
- Isomorfismo de anillos, 103
- Isomorfismo de grupos, 17
- Longitud de una palabra reducida, 47
- Núcleo de un homomorfismo, 17
- Normalizador, 40
- Orbita por una acción, 73
- Orden de un grupo, 8
- Orden del grupo de permutaciones, 4
- Orden del subgrupo de permutaciones, 5
- Palabra reducida, 47
- Permutación, 3
- Permutaciones impares, 66
- Permutaciones pares, 66
- Polinomios, 97
- Primer teorema del isomorfismo, 32
- Producto débil, 44
- Producto directo, 43
- Producto directo de anillos, 99
- Producto directo interno, 45
- Producto libre, 48
- Producto libre amalgamado, 51
- Producto semidirecto, 45
- Producto semidirecto interno, 46
- Radical, 110
- Rango de un grupo libre, 55
- Representación cociente, 141
- Representación cuña, 140
- Representación estandar del grupo simétrico, 149
- Representación fiel, 137
- Representación homomorfismo, 140
- Representación irreducible, 143
- Representación Lineal, 137
- Representación producto, 139
- Representación producto tensorial, 140
- Representación reducible, 143
- Representación regular, 139
- Representación restricción, 141
- Representación suma directa, 139
- Segundo teorema del isomorfismo, 34
- Semicuerpo, 99
- Subanillos, 100
- Subgrupo, 9
- Subgrupo de conmutadores, 37
- Subgrupo de permutaciones, 5
- Subgrupo normal, 29
- Subrepresentación inducida, 143
- Sucesión corta exacta, 46
- Suma directa, 43
- Teorema de Euler, 14
- Teorema de Fermat, 13
- Teorema de Lagrange, 27
- Teoremas de Sylow, 83
- Tercer teorema del isomorfismo, 34
- Transposiciones, 63
- Valuación, 119
- Yuxtaposición de palabras, 48