TRAZA DE UNA MATRIZ.

En los clases anteriores hemos estudiado algunas características fundamentales mostradas por un NUMERO:

- el módulo, que expresa la longitud de un determinado vector
- el rango, que expresa el número máximo de vectores linealmente independientes.

En este apartado comenzamos estudiando dos FUNCIONES ESCALARES, es decir valores NUMÉRICOS asociados a una matriz cuadrada.

Definición TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se define la traza de la matriz A y se denota por tr(A)

al valor obtenido al sumar todos los elementos de la diagonal principal, es decir

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Veamos algunos ejemplos, considerando las siguientes matrices

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c := \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Es sencillo obtener la traza(A), ya que basta sumar 1+1+0=2

$$1 + 1 + 0 = 2$$

la traza de B

$$1 + 4 - 5 = 0$$

y la traza de C

$$2 + 3 - 5 = 0$$

A partir de esta definición podemos realizar algunas observaciones, que manejaremos mediante el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1

Construir dos matrices cuadradas de orden 2, A y B, distintas y tales que tr(A) sea igual a tr(B). ¿Podrías obtener algún resultado general para dos matrices cuadradas de un orden cualquiera en relación con la traza?

Una conclusión o respuesta al ejercicio anterior se basa en la siguiente

Observación

Sean A y B dos matrices del mismo orden.

1. Si tr(A) = tr(B) entonces esto no implica que A=B
2. Por el contrario si A=B entonces tr(A) = tr(B).

Ejercicio 2

Dadas las matrices

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Obtener los siguientes valores:

1. tr(A) + tr(B); tr(A+B)
2. 3 * tr(A); tr(3 A)
3. tr(A.B); tr(B.A); tr(A).tr(B); tr(B).tr(A)
4. tr(A^{-1}); 1/tr(A)
5. Estudiar si B es idempotente. Calcular rg(B) y tr(B).
6. Estudiar si A es idempotente. Calcular rg(A) y tr(A)
7. tr($A\otimes$ B); tr(A).tr(B).

De todas las operaciones que has realizado intenta, utilizando otras matrices si puedes deducir algunas propiedades que tiene la traza de una matriz respecto de las operaciones indicadas.

Si es posible una vez que intuyas una propiedad intenta probarla de forma general.

Como conclusión al ejercicio anterior se pueden obtener las propiedades de la traza de una matriz cuadrada que son las siguientes

PROPIEDADES DE LA TRAZA.

Sean A,B dos matrices cuadradas de orden y sea α un número real. Entonces se verifican:

1. **tr(A+B) = tr(A) + tr(B)**
2. **tr(α A) = α tr(A)**
3. **tr(A.B) = tr(B.A) siempre que A y B sean multiplicables aunque A.B sea distinto a B.A.**
4. **En general se verifica que tr(A.B)® tr(A).tr(B)**
5. **Si A tiene inversa, tr(A^{-1}) es distinto que 1/tr(A).**
6. **Si A es idempotente entonces tr(A)=rg(A).**
7. **tr(A⊗ B)=tr(A).tr(B).**

Una posible demostración de algunas de estas propiedades sería la siguiente:

Propiedad 1.

tr(A+B) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ = tr(A) + tr(B)

Propiedad 2.

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha tr(A)$$

Propiedad 3.

$$tr(AB) = tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}.a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = tr(BA)$$