“IMPORTANCIA DE LAS MATRICES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La gran diversidad de necesidades del ser humano, en cada uno de los ámbitos requiere emplear técnicas y métodos matemáticos que den una solución rápida y exacta. Una de las herramientas que ha tenido gran aplicación son las matrices, las cuales nos dan una solución optima a un sistema de ecuaciones lineales previamente obtenidas de un planteamiento del problema.

A su vez se hace más versátil y dinámico el emplear para su resolución un software (Derive). Es por ello la importancia en la gran resolución de problemas de diversos tópicos.

MATRIZ

Es un arreglo rectangular de elementos de un conjunto dispuesto en filas y columnas.

$$A = \left[\, a_{ij} \,\right]_{m \times n}$$

m = Número de renglones o filas

n = Número de renglones o filas

MATRIZ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

$$a := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 20 & 8 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 9 & 30 & 18 & 19 \end{bmatrix}_{3x4}$$

TIPOS DE MATRICES

TIPO DE MATRIZ	DEFINICIÓN	EJEMPLO
Matriz nula	Aquella matriz compuesta única y exclusivamente por ceros.	$a := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz traspuesta	Una matriz es traspuesta de otra, cuando una fila m =a es igual en números a una columna n = a	$a := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $a^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
Matriz simétrica	Es aquella matriz que es igual a su matriz traspuesta, es decir $A = A^t$	$a := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
Matriz antisimétrica	Es aquella matriz cuya traspuesta es igual a ella misma solo que cambiada de signo $A = -A^t$	$a := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ $a^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

TIPOS DE MATRICES

TIPO DE MATRIZ	DEFINICIÓN	EJEMPLO
Matriz diagonal	Es aquella matriz diagonal compuesta por elementos de la diagonal de diferentes tipos de escalar.	$a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz escalar	Es aquella matriz diagonal compuesta por elementos de la diagonal de un único tipo de escalar.	$a := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Matriz triangular	Es aquella matriz que presenta un triangulo de ceros en una de sus esquinas.	$a := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz identidad o unidad	Es aquella matriz escalar cuyo elemento en la diagonal es el 1.	$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OPERACIONES

MATRICIALES

SUMA

DIFERENCIA

PRODUCTO

SUMA

La suma de una matriz es una generalización de la de la suma de vectores.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

DIFERENCIA

Se efectúa alterando los signos de la matriz restante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO

El producto de dos matrices se realiza mediante la multiplicación de filas por columnas, la multiplicación de fila n de la primera matriz por la columna m de la segunda matriz y sumados los elementos obtenidos da lugar al elemento (n,m) de la matriz producto.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} & a_{31}\cdot b_{13} + a_{32}\cdot b_{23} \end{bmatrix}$$

PRODUCTO

$$a := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot b$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

Resolver mediante el uso de matrices el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

(1) $4X_1 + 2X_2 + X_3 = 15$
(2) $20X_1 + 5X_2 – 7X_3 = 0$
(3) $8X_1 – 3X_2 + 5X_3 = 24$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 15 \\ 20 & 5 & -7 & 0 \\ 8 & -3 & 5 & 24 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \end{array}$$

APLICACIONES

Tómese el elemento a_{11} como pivote. Para hacerlo 1 y a los otros elementos cero en la primera columna, realícense las siguientes operaciones elementales mostradas en orden para cada raíz:

Réstese (20/4) [ecuación (1)] de la ecuación (2)

(a) Réstese (8/4) [ecuación (1)] de la ecuación (3)

(b) Multiplíquese la ecuación (1) por ¼.

Para obtener

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & -5 & -12 & -75 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array}$$

APLICACIONES

Efectúense las operaciones elementales para hacer el elemento pivote a_{22} igual 1 y los otros elementos en la segunda columna iguales a cero:

(a) Réstese [(1/2)/-5] [ecuación (2a)] de la ecuación (1a)

(a) Réstese (-7/-5) [ecuación (2a)] de la ecuación (3a)

(b) Multiplíquese la ecuación (2a) por (-7/-5).

Para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{19}{20} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{12}{15} & 15 \\ 0 & 0 & \frac{99}{5} & 99 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1b) \\ (2b) \\ (3b) \end{array}$$

APLICACIONES

Otra serie de operaciones elementales conduce a un 1 para el elemento a_{33} y ceros para los otros dos elementos en la tercera columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

La solución para el sistema es:

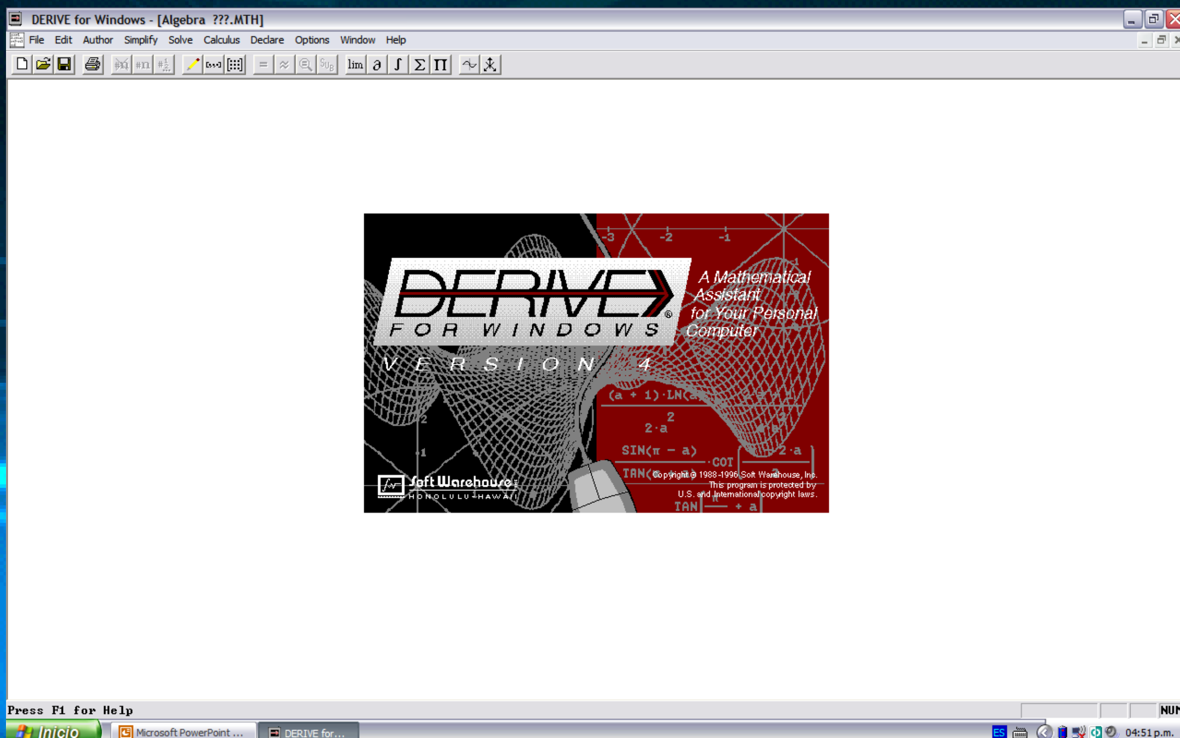
$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 5$

APLICACIONES

Mediante este método se puede resolver problemas de la vida cotidiana y con ello dar una solución adecuada y óptima a la problemática. Con la ayuda de un software de matemáticas (**derive**) se hace más fácil dicha resolución.



APLICACIONES

Planteamiento del problema

Un granjero da de comer a su ganado un a mezcla de 2 tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento tipo A proporciona a un novillo 10 % del requerimiento diario de proteínas y 15 % de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento B contiene 12 % del requerimiento diario de proteínas y 8 % del de carbohidratos. Si el granjero requiere alimentar a su ganado con el 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteínas y carbohidratos, ¿Cuántas unidades de cada tipo de alimento debe de dar a un novillo al día?

APLICACIONES

Modelo matemático

Para dar solución a al problema se debe obtener el modelo matemático, es decir el sistema de ecuaciones lineales.

	A (%)	B (%)	REQUERIMIENTO DIARIO (%)
PROTEINA	10	12	50
CARBOHIDRATOS	15	8	50

(1) $10X_1 + 12X_2 = 15$

(2) $15X_1 + 8X_2 = 0$

APLICACIONES

Transformación a un modelo matricial

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 50 \\ 15 & 8 & 50 \end{bmatrix}$$

La solución al sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

Interpretación

La solución para el sistema es:

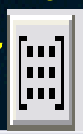
$x_1 = 2$

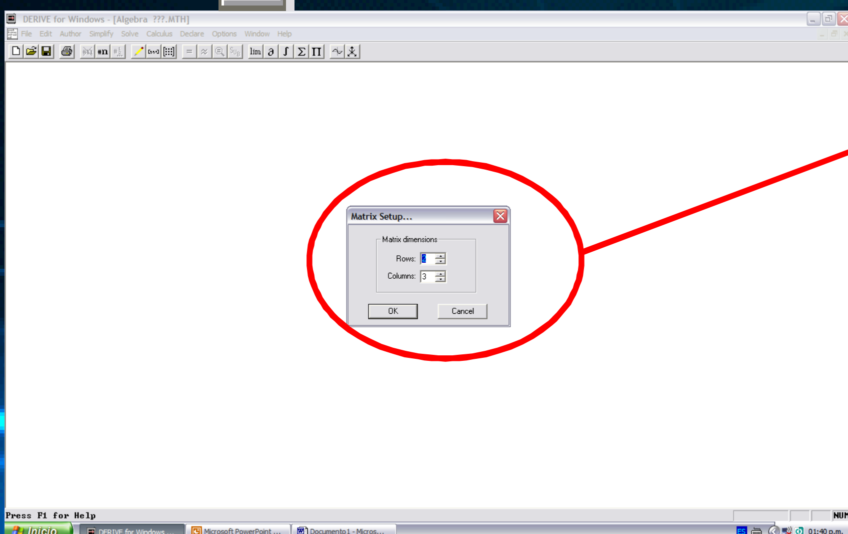
$x_2 = 5/2$

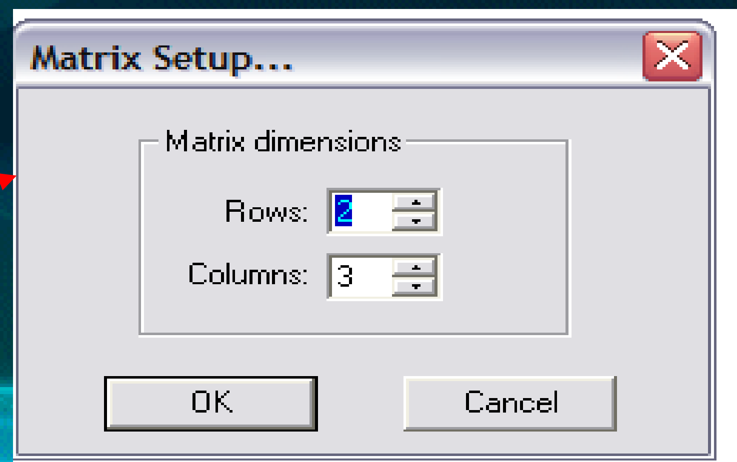
Es decir se requieren 2 unidades del alimento A y 5/2 del alimento B que se deben de dar a un novillo por día.

APLICACIONES

Utilización del software DERIVE

1. Seleccionar la matriz con respecto al número de filas y columnas del sistema mediante el comando *author matriz*  .

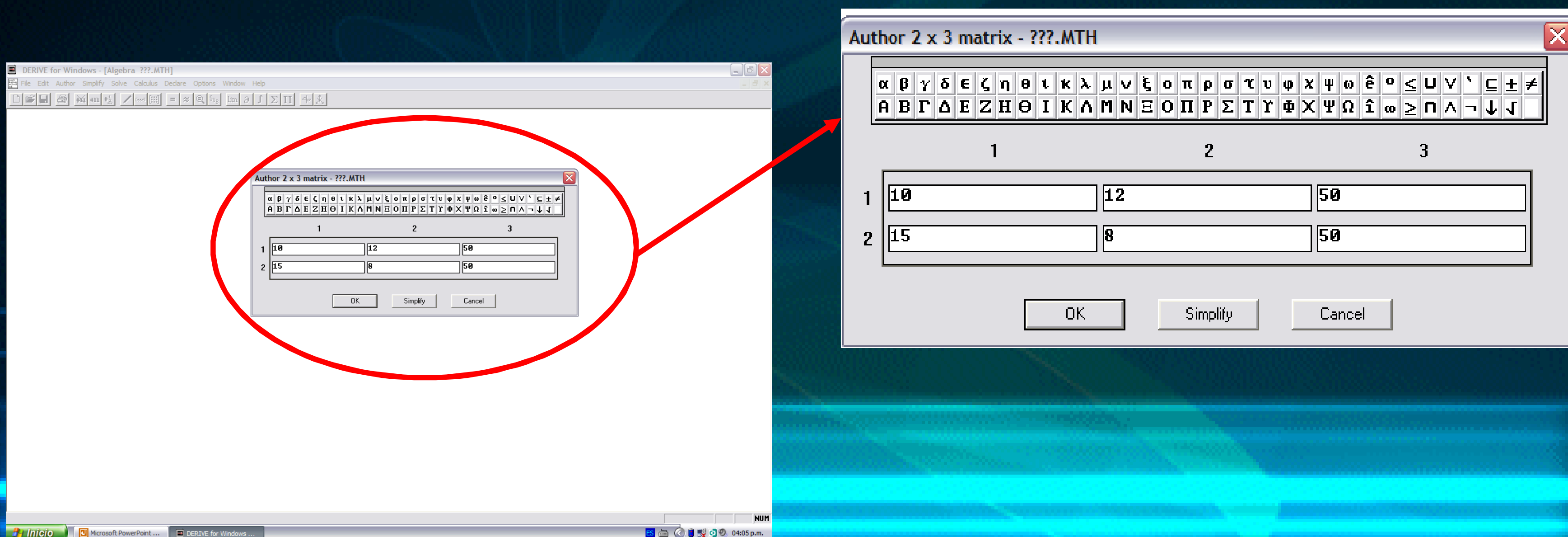




APLICACIONES

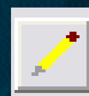
Utilización del software DERIVE

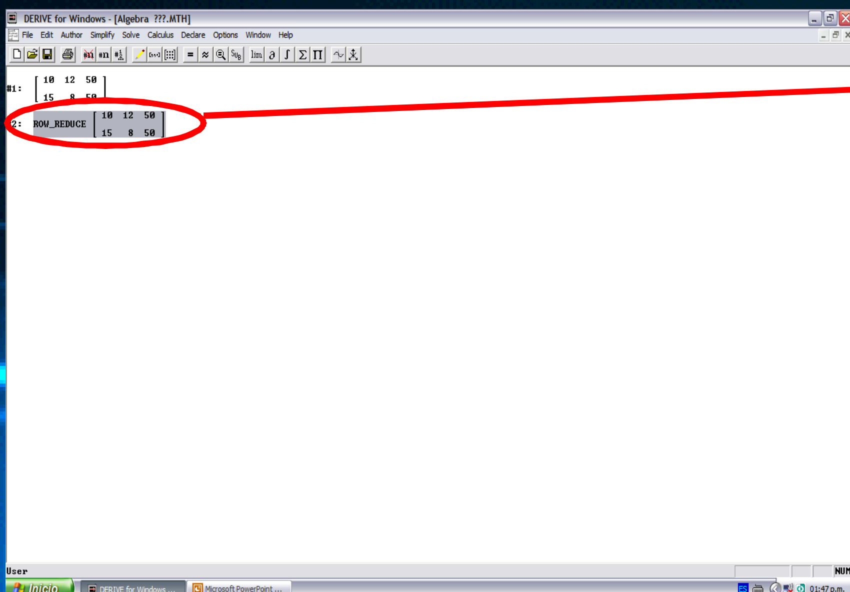
2. Dar los valores correspondientes a cada casillero

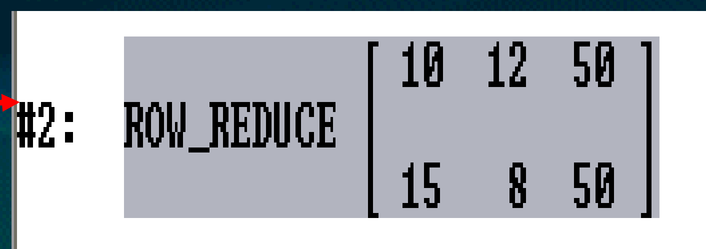


APLICACIONES

Utilización del software DERIVE

3. Dar la orden de que haga la reducción de columnas con el comando autor  mediante la siguiente acción ***row_reduce*** indicando el número de la matriz a resolver.

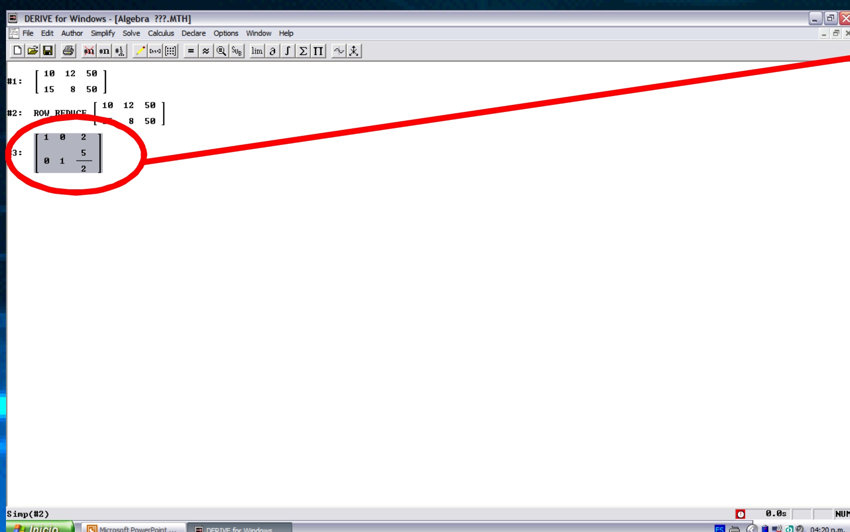


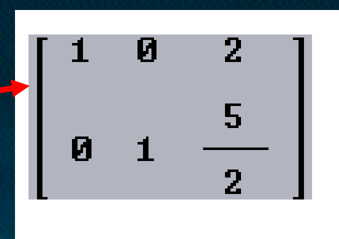


APLICACIONES

Utilización del software DERIVE

4. Dar click en el simbolo de igual (=) para obtener la solución exacta de la matriz.





APLICACIONES

Utilización del software DERIVE

5. Interpretación de resultados.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

La solución para el sistema es:

$x_1 = 2$

$x_2 = 5/2$

Es decir se requieren 2 unidades del alimento A y 5/2 del alimento B que se deben de dar a un novillo por día.

CONCLUSIONES

Mediante el uso de las matrices se resolvió un sistema de ecuaciones lineales, además se encontró la importancia que tienen en la resolución de problemas de la vida cotidiana con lo cual se llega a dar una solución exacta para dar mejores resultados en un determinado proceso.

El empleo de estas herramientas matemáticas se hacen más interesantes y útiles mediante el uso de un software que en este caso empleamos el DERIVE, con ello nos da a mostrar cual tan importantes son las matemáticas en la resolución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Grossman Stanley I. Algebra Lineal, McGraw-Hill. Quinta Edición. México. 2000.
2. Miller Irwing R., Freund John E. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Prentice-Hall. México. 1992.
3. Baldor A. Algebra. Publicaciones Cultural. México. 2002.