

ALGEBRA DE MATRICES

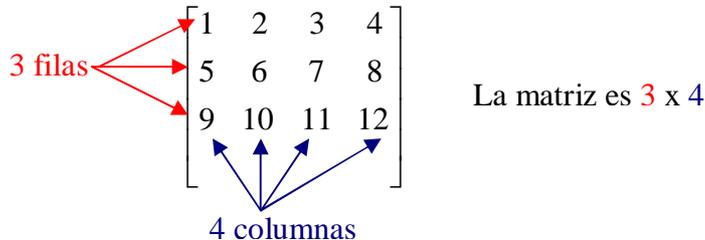
Explicaciones generales

matriz 3 x 4
fila \longrightarrow \longleftarrow columna

El primer número nos indica el número de filas que tiene la matriz.

El segundo indica la cantidad de columnas que tiene la matriz.

Ejemplo:



Si la matriz es A las posiciones de cada número son a_{ij}

i es la fila y j es la columna donde se encuentra posicionado el número en la matriz A.

Si la matriz es B las posiciones de cada número son b_{ij}

i es la fila y j es la columna donde se encuentra posicionado el número en la matriz B.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

En la siguiente matriz indica la posición del número circulado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

2	_____
7	_____
9	_____
14	_____

Suma de matrices

Para poder sumar matrices deben de tener el mismo orden, ambas matrices deben tener el mismo número de filas y columnas.

Definición de suma:

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ entonces su suma es $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Ejemplo:

Suma las matrices A + B

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the addition of the first row elements: $1 + 5 = 6$ and $3 + 7 = 10$. Arrows point from the circled 1 and 5 to 6, and from the circled 3 and 7 to 10.

Suma $a_{11} + b_{11}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the addition of the first column elements: $3 + 7 = 10$. An arrow points from the circled 3 and 7 to 10.

Suma $a_{12} + b_{12}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the addition of the second row elements: $5 + 4 = 9$ and $7 + 8 = 15$. Arrows point from the circled 5 and 4 to 9, and from the circled 7 and 8 to 15.

Suma $a_{21} + b_{21}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the addition of the second column elements: $7 + 8 = 15$. An arrow points from the circled 7 and 8 to 15.

Suma $a_{22} + b_{22}$

Propiedades:

Ley asociativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

Ley conmutativa $A + B = B + A$

Elemento neutro

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Producto de un escalar

Definición:

Si $kA = k(a_{ij})_{m \times n}$

Debes multiplicar cada número de la matriz por el escalar.

Ejemplo:

Opera 2A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 2A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Inverso aditivo (resta)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Opera A - B

$$A - B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

El orden es igual que en la suma pero debes fijarte muy bien en los signos.

HOJA DE TRABAJO

En cada ejercicio realiza: a) A + B b) B - A c) 2 A + 3 B d) 5 A - 4 B

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2) A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$3) A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 7 \\ -3 & 4 & -8 \\ -2 & -9 & -7 \end{vmatrix}$$

$$4) A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5) A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$6) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -8 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$7) A = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix}$$

$$8) A = \begin{vmatrix} 2 & -5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$9) A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$

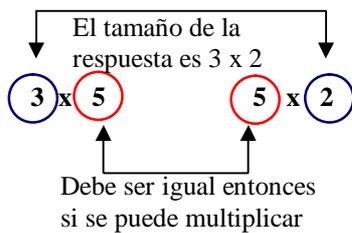
Multiplicación de matrices:

Para poder multiplicar debemos revisar primero el numero de filas x columnas

Si tenemos que una matriz es 3 x 5 y la otra 5 x 2 se puede multiplicar si

Matriz A

Matriz B



Si los números centrales son iguales entonces se puede multiplicar y el tamaño de la respuesta son los números de los extremos 3 x 2

Resuelve el siguiente ejercicio e indica si se puede multiplicar las matrices o no, y cual es el tamaño de la matriz de la respuesta.

Matriz A	Matriz B	¿se puede multiplicar?	Tamaño de respuesta
3 x 4	4 x 5		
5 x 6	6 x 2		
5 x 3	4 x 6		
7 x 8	8 x 2		
4 x 2	3 x 4		
5 x 7	7 x 2		
3 x 1	1 x 4		
4 x 3	4 x 3		
2 x 5	5 x 4		

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \end{bmatrix}$$

Se opera así:

$$(0 \times 6) + (1 \times 9) + (2 \times 12) = 0 + 9 + 24 = 33$$

- 1) Reviso el tamaño de la matriz
 $A = 2 \times 3$ $B = 3 \times 3$
 Como son iguales se puede multiplicar.
 El tamaño de la matriz de la respuesta es 2 x 3

- 2) Siempre se toma la primera matriz con la fila 1 (**horizontal**) con la 1 columna (**vertical**) marcada en la matriz.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & 8 \\ \hline 9 & & 11 \\ \hline 12 & & 14 \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & \end{bmatrix}$$

$$(0 \times 7) + (1 \times 10) + (2 \times 13) =$$

$$0 + 10 + 26 = 36$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & \\ \hline 9 & 10 & \\ \hline 12 & 13 & \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \end{bmatrix}$$

$$(0 \times 8) + (1 \times 11) + (2 \times 14) =$$

$$0 + 11 + 28 = 39$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 7 & 8 \\ \hline & 10 & 11 \\ \hline & 13 & 14 \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & & \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 6) + (4 \times 9) + (5 \times 12) =$$

$$18 + 36 + 60 = 114$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & 8 \\ \hline 9 & & 11 \\ \hline 12 & & 14 \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 7) + (4 \times 10) + (5 \times 13) =$$

$$21 + 40 + 65 = 126$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & \\ \hline 9 & 10 & \\ \hline 12 & 13 & \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 8) + (4 \times 11) + (5 \times 14) =$$

$$24 + 44 + 70 = 138$$

Respuesta:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 \\ \hline 12 & 13 & 14 \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

Encuentra AB y BA , si es posible.

$$1) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$6) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7) A = [-1 \quad 1] \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Resuelve el siguientes problema:

1) Tres ebanistas: José, Pedro y Arturo trabajan a destajo para una compañota de muebles .Por cada juego de alcoba en caoba les pagan \$500; si es de cedro les pagan \$400 y si es de pino tratado les pagan \$100. A continuación están las matrices A y B que representas sus producciones en enero y febrero. La matriz X es la matriz pago/unidad.

	Producción enero			Producción febrero			Salario/ Unidad			
	A			B			X			
	Caoba	Cedro	Pino	Caoba	Cedro	Pino				
José	[2	0	3]	1	2	3	Caoba	500
Pedro		1	1	4		2	0	3	Cedro	400
Arturo		1	2	3		2	1	4	Pino	100

Calcule las siguientes matrices y decida que representan.

- a) AX b) BX c) $A+B$ d) $(A+B)X$

Evalúa la expresión matricial

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Evalúa:

- a) $A^2 + B^2$ b) $3A - BA$ c) $A^2 - 5B$ d) $A + A^2 + B + B^2$