ÁLGEBRA DE MATRICES

TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas (o las columnas por las filas) y se denota por: A^T

Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces $A^T = (a_{ji})$ es la matriz $n \times m$. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(kA)^T = kA^T$ (si k es un escalar).
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

SUMA Y RESTA DE MATRICES

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3×2 y otra de 3×3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. **No** necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

PRODUCTO DE MATRICES

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2×3 y la multiplicamos por otra de orden 3×5, la matriz resultante será de orden 2×5.

$$(2\times3) \times (3\times5) = (2\times5)$$

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación 3×5 por 2×3, puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B; es decir, A es una matriz $m\times p$ y B una matriz $p\times n$. Entonces el producto AB es la matriz $m\times n$ cuya entrada ij se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B.
Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & \cdots & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

Ejemplos:

1.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot0 & 1\cdot1 + 2\cdot2 \\ 3\cdot1 + 4\cdot0 & 3\cdot1 + 4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

El producto de un escalar *k* por la matriz *A*, escrito *k·A* o simplemente *kA*, es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de *A* por *k*:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

MATRICES INVERTIBLES

Se dice que una matriz cuadrada *A* es invertible, si existe una matriz *B* con la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

siendo *I* la matriz identidad. Denominamos a la matriz *B* la inversa de *A* y la denotamos por A^{-1}.

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que *AB* = *BA* = *I*, *A* y *B* son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra

MÉTODO DE GAUSS PARA INVERTIR UNA MATRIZ

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden *n*. Para calcular la matriz inversa de *A*, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A \; I)$ esto es, *A* está en la mitad izquierda de *M* y la matriz identidad *I* en la derecha.

Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de *M*, y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11}, que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo:

Consideremos una matriz 3×3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A \ \vdots \ I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Paso 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & \vdots & a_{11}0 - a_{21}1 & a_{11}1 - a_{21}0 & a_{11}0 - a_{21}0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & \vdots & a_{11}1 - a_{31}1 & a_{11}0 - a_{31}0 & a_{11}1 - a_{31}0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal.

Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz *A* se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz *M* se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de *M* por un escalar.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A \,\vdots\, I)$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2\cdot 0 & 3-2\cdot 2 & \vdots & 0-2 & 1-2\cdot 0 & 0 \\ 0 & 1-4\cdot 0 & 8-4\cdot 2 & \vdots & 0-4 & 0 & 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0-(-1) & \vdots & 4-(-2) & 0-1 & -1-0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim$$

La mitad izquierda de *M* está en forma triangular, por consiguiente, *A* es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad *A* de *M*, la operación habría terminado (*A* no es invertible).
A continuación, cogemos como pivote a_{33}, ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & -11 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que dividir la segunda fila entre -1:

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & -11 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de *M* es precisamente la matriz inversa de *A*:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1}, teniendo que dar como resultado la matriz identidad *I*.

Comprobación:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2\\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3\\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$