MENORES, COFACTORES Y DETERMINANTES

Anteriormente, en la sección de matrices, se definió el determinante de una matriz A de 2 x 2 como

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ahora para el caso de 3 x 3 tenemos:

Definición.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo.

Evalúe el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\det \mathrm{A} = |\mathrm{A}| = (1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -2 + 2 - 6 = -6$$

Existe otro método para calcular determinantes de 3 x 3. Se escribe el determinante en cuestión y se le adjuntan sus dos primeras columnas:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} & & \\ & & + & + & + \end{array}$$

Después se calculan los seis productos, sumando todos los indicados por las flechas hacia abajo menos aquellos indicados por las flechas hacia arriba.

Ejemplo.

Evaluar el siguiente determinante $A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Solución:

Se anexan las dos primeras columnas y se realizan los productos con los signos apropiados:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right. & & \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{array} & & \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 3(2)(4) + 5(3)(-1) + 2(4)(2) - (-1)(2)(2) - 2(3)(3) - 4(4)(5) \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$

Definición.

Sea A una matriz cuadrada. El **menor** del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y es el determinante de la matriz que queda después de borrar el renglón i y la columna j de A. El **cofactor** de a_{ij} se denota como A_{ij} y está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

Ejemplo.

Determine el menor y el cofactor de los elementos a_{11} y a_{32} de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Aplicando la definición anterior, se tiene lo siguiente:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 (-10) = 10$$

Definición.

El determinante de una matriz A de n x n es la suma de los productos de los elementos del primer renglón por sus cofactores.

Si A es de 3 x 3, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
Si A es de 4 x 4, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$
Si A es de n x n, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + ... + a_{1n}A_{1n}$

A estas ecuaciones se les llama expansión por cofactores de |A|.

Ejemplo.

Evalúe el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Usando los elementos del primer renglón y sus correspondientes cofactores se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [0(1) - 1(2)] - 2[3(1) - 1(4)] - [3(2) - 0(4)] \\ &= -2 + 2 - 6 = -6 \end{aligned}$$

En general se tiene:

Teorema

El determinante de cualquier matriz cuadrada es la suma de los productos de los elementos de cualquier renglón o columna por sus cofactores.
Expansión a lo largo del renglón i:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Expansión a lo largo de la columna *j*:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Definición.

Matriz triangular.

Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todos sus elementos arriba de la diagonal principal son cero. Una matriz se llama **matriz diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal principal son cero. Una matriz diagonal es tanto triangular superior como inferior.

Ejemplo:
Las matrices A y B son triangulares superiores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices C y D son triangulares inferiores.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal. También es triangular superior e inferior.

Teorema.

Sea A = (a_{ij}) una matriz de n x n triangular superior o inferior. Entonces

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nm}$$

Esto es, el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal principal.

Ejemplo.

Evaluar el determinante de la siguiente matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución.
Ya que C es una matriz triangular, podemos aplicar el teorema anterior.

det C = 5(3)(4) = 60

Teorema

Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible (tiene inversa) si y sólo si det T = 0.

Propiedades de los determinantes.
Sean A, B y C determinantes de n x n .

1. det (A + B) = det A + det B.
2. det AB = det A det B.
3. det At = det A
4. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces det A = 0
5. Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces det A se multiplica por c.
6. El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A, tiene el efecto de multiplicar det A por -1.
7. Si a tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det A = 0.
8. Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces det A = 0.
9. Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Ejemplo 1.
Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4 x 4.

Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

Solución.
Existe un cero en la primera columna. Por lo que se reducen otros elementos de la primera columna a cero buscando una matriz triangular.
Se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al tercer renglón ; se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por -5 y -7 y se suma al tercer y cuarto renglones respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza -16 del tercer renglón (usando la propiedad 5).

$$|A| = -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$|A| = -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y

$$|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = 160$$

Ejemplo 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

Calcule el siguiente determinante
Solución:
Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Debido a que todos los elementos del último renglón son cero.

Determinantes e inversas.

Teorema

Si A es invertible, entonces det A ≠ 0 y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Teorema

Adjunta de una matriz

Sea A una matriz de *n* x *n* y sea B la matriz de sus cofactores, es decir

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces la adjunta de A, escrito como adj A, es la transpuesta de la matriz B de *n* x *n*.

$$adjA = B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular la adjunta de la siguiente matriz
Solución.
Los cofactores de A son los siguientes:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 14 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -9 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

La matriz de cofactores de A es: $\begin{pmatrix} 14 & 3 & -1 \\ -9 & 7 & 6 \\ -12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

La matriz adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores.

$$adjA = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Teorema.

Sea A una matriz de *n* x *n*. Entonces

$$(A)(adjA) = \begin{pmatrix} \mathbf{det}\,A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{det}\,A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{det}\,A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{det}\,A \end{pmatrix} = (\mathbf{det}\,A)I$$

Si det A ≠ 0, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

Regla de Cramer

Considere el siguiente sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

el cual puede escribirse de la siguiente forma, como ya anteriormente se había establecido A $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Si det A ≠ 0, entonces el sistema anterior tiene una solución única dada por

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

Se cuenta con un método para determinar esa solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea D = det A. Se define *n* nuevas matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida reemplazando la columna *i* de A por $\boldsymbol{b}$.
Por último, sea D_1 = det A_1, D_2 = det A_2, …, D_n = det A_n.

Teorema

Regla de Cramer

Sea A una matriz de *n* x *n* y suponga que det A ≠ 0. Entonces la solución única al sistema A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ldots,\ x_i = \frac{D_i}{D},\ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

Ejemplo.
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Solución.
La matriz A de coeficientes y la matriz columna $\boldsymbol{b}$, de términos constantes son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se encuentra que D =|A| = -3 ≠ 0. Por lo que se puede aplicar la regla de Cramer. Se tiene entonces

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que $|D_1| = -3$, $|D_2| = 6$ y $|D_3| = -9$.

Por tanto

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-9}{-3} = 3$$

La solución única es $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$.