MENORES Y COFACTORES.

En esta sección se calcularán determinantes haciendo uso de dos conceptos, el de menor de un determinante y el de cofactor de un elemento.

Se llama menor del elemento a_{ik} de un determinante D de $n \times n$ al determinante M_{ik} de orden $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al eliminar el renglón i y la columna k de D.

Ejemplo 1.

Obtener los menores M_{13} y M_{21} del determinante D de 3×3.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para M_{13} eliminamos el renglón 1 y la columna 3 para obtener

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

De la misma forma, se elimina el renglón 2 y la columna 1 para tener

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Se llama cofactor del elemento a_{ik} del determinante D, al menor M_{ik} con el signo $(-1)^{i+k}$ y se denota A_{ik}, esto es

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \qquad (1)$$

Ejemplo 2.

Obtenga los cofactores A_{13} y A_{21} del determinante D dado:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la fórmula (1) el cofactor A_{13} está dado por

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (4)(-3) - (6)(5) = -42$$

Y de la misma forma

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(-1)(7) - (-3)(3)\right] = -2$$

Expansión por cofactores de un determinante.

Se puede probar el siguiente

Teorema
Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de un renglón (o columna) cualquiera por sus cofactores correspondientes.

Esto es

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (2)$$

es el desarrollo del determinante D por el renglón i, y similarmente

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \qquad (3)$$

es el desarrollo del determinante D por la columna k.

Las expresiones (2) y (3) son fórmulas completamente generales, cualquier determinante de cualquier dimensión se puede evaluar usando estas fórmulas.

Ejemplo 3.

Desarrollar por cofactores del segundo renglón y calcular el valor del determinante D.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para expandir D, por cofactores del segundo renglón, calculamos primero los cofactores A_{21}, A_{22} y A_{23} de los elementos del segundo renglón.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (4)(-2) + (5)(-4) + (2)(0) = -28$$

Ejemplo 4.

Desarrollar por cofactores de la primera columna y calcular el valor del determinante D del ejemplo 3 para verificar que obtenemos el mismo valor.

Para expandir por cofactores de la primera columna, primero evaluamos los cofactores A_{11}, A_{21}, A_{31} de los elementos de la primera columna:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 41 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Entonces

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (2)(41) + (4)(-2) + (6)(-17) = -28$$

Ejemplo 5.

Considere la matriz A y calcule su determinante $\det A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para evaluar el determinante de A usamos la fórmula (2) que permite desarrollar un determinante por cofactores de una columna. Observe que la primera columna de A consta de tres ceros y un 2. Desarrollando por la columna (1) se tiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= (2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aún falta evaluar el determinante de 3x3, que desarrollamos por cofactores de la columna 3 porque dos de sus elementos son ceros, entonces

$$\det A = (2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-12)(1+12) = -156$$

Ejemplo 6.

El determinante de una matriz triangular.
Considere la matriz B triangular, calcule $\det B$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces, desarrollando por cofactores de la primera columna, y desarrollando los menores correspondientes de la misma forma, se tiene

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)(1)(5) = 30$$

Así que, el determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos en la diagonal principal.