I. POLINOMIOS Y SUS CEROS

DEF 1.- Un **polinomio de grado n** tiene la forma:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Siendo $a_0,\ a_1,\ a_2, ..., a_n$ números reales y $a_n \neq 0$

DEF 2.- El **valor numérico** de un polinomio P(x) para x = a, es el resultado que se obtiene al sustituir x por a, y realizar las operaciones indicadas.

DEF 3.- Un número "r" es un **cero** de un polinomio P(x) si: P(r) = 0 .
Un cero de un polinomio también se llama **raíz** de la ecuación P(x) = 0

1.1 RESULTADO 1 .- Un numero "r" es un cero de un polinomio P(x) si y solo sí P(x) tiene un factor de la forma (x-r) . El número de tales factores se llama **multiplicidad** del cero

1.2 RESULTADO 2.- Un cero "r" de un polinomio P(x) se dice que tiene **multiplicidad "m"** si existe un polinomio Q(x) tal que:

$$\boxed{P(x) = (x-r)^m . Q(x) \quad \text{y} \quad Q(r) \neq 0}$$

Un cero de multiplicidad **m=1** se llama **"simple"** ; si **m=2** se llama **"doble"** y si **m=3** **"triple"...**

P1.- Sea p(x) = $4x^4 + 10\ x^3 + 19x + 5$. Hallar p(-3)

P2.- Hallar "k", sabiendo que – 2 es raíz de P(x) = $5x^4 – 7x^3 + 11x + k$

P3 . Si P(x) = $x^5 – 10x^3 + 7x + 6$; encontrar P(3); ¿es (x – 3) factor de P(x)?

II. POLINOMIOS DE GRADO 2 (Cuadráticos)

Hay algunos resultados acerca de los polinomios de grado 2 **P(x)=ax^2+bx+c**

2.1 RESULTADO 3.- Si r_1 y r_2 son ceros o raíces del polinomio **P(x) = ax^2+bx+c.** Entonces:

$$\boxed{\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2) \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = r_1 \times r_2}$$

Además el polinomio P(x) se puede descomponer en factores de la forma:

$$\boxed{P(x) = a(x - r_1).(x - r_2)}$$

2.2 RESULTADO 4.- En el caso particular de P(x) = x^2+bx+c. Entonces

$$\boxed{b = -(r_1 + r_2) \quad \text{y} \quad \text{c} = r_1 \times r_2}$$

EJ RES.- Si $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$ ¿Cuanto vale c?

SOL: Los factores del primer miembro señalan que -2 y –b son raíces del polinomio luego por el resultado 4

-2 .(-b) = 6 y por tanto b = 3

-((-2)+(-b)) = c $\Rightarrow$ c = 5

P4.- El polinomio $x^2 - 9x + 3$ tiene raíces r y s. Si $x^2 + bx + c$ tiene raíces r^2 y s^2 .¿Cuanto valen b y c?

P5.- Un antiguo manuscrito señalaba que el polinomio $x^2 + bx + 30$ tiene dos raíces enteras. Pero es imposible leer el valor del entero positivo b ¿Cuantas posibilidades haya para b?

P6,- Sean d y e las soluciones de la ecuación $2x^2+3x+5=0$ ¿Cuanto vale (d-1).(e-1) ?

P7.- Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2-6x+2=0$, entonces $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$ es igual a:

a) -3 b) 3 c) -6 d) 6 e) 2

2.3 RESULTADO 5.- El número de raíces del polinomio **P(x) = ax²+bx+c** depende del valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, de tal forma que:

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ Hay dos raíces reales distintas
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Hay una raíz real (doble)
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ No tiene raíces reales

EJ RES.- ¿Para que valores de “a” la ecuación $ax^2 + 2x + 1 = 0$ no tiene raíces reales?

SOL: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; $2^2 - 4a.1 < 0$; $4-4a<0$; $a > 1$ a debe ser mayor que 1

III. POLINOMIOS DE CUALQUIER GRADO

3.1 ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), existen dos polinomios únicos S(x) y R(x) tales que:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(x) = Q(x).S(x) + R(x) \\ \text{con } R(x) = 0 \text{ ó } grd(R(x)) < grd(Q(x)) \end{array}}$$

Se dice que Q divide a P (o que P es divisible por Q) si el resto de la división R(x) = 0

Teoremas del resto y del factor

3.2 TEOREMA EL RESTO.

El valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$ es igual al resto de la división P(x) : ($x - a$). Es decir existe un polinomio Q(x) de grado una unidad inferior al grado de P(x) que cumple:

$$\boxed{P(x) = (x-a).Q(x) + P(a)}$$

3.3 TEOREMA DEL FACTOR.

($x - a$) es un factor del polinomio P(x) ⇔ $x = a$ es una raíz de P(x) ⇔ P(a)=0

- Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación P(x) = 0.
- Si conocemos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de P(x), entonces el polinomio es de la forma $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, siendo c una constante.

RESUMIENDO: $x = a$ es una raíz de P(x) ⇔ P(a) = 0 ⇔ ($x - a$) es un factor de P(x) ⇔
⇔ P(x) = ($x - a$) · Q(x), siendo Q(x) de un grado menor que P(x).

EJ RES.- Cuando dividimos el polinomio P(x) entre (x -19) , obtenemos de resto 99 y cuando lo dividimos entre (x – 99) obtenemos resto 19 ¿Cuál es el resto de la división de P(x) entre
(x-19).(x-99)?

SOL: Por el algoritmo de la división : P(x) = (x-19).(x-99).Q(x) + (ax+b)

Además por el teorema del resto P(19) = 99 P(99) = 19 ; Formamos el sistema:

99 = 19a+b

19 = 99a+b

Que tiene como soluciones a = -1 y b = 118 , luego el Resto es R(x) = –x+118

P8.- Determinar los números a y b, sabiendo que $P(x)= 2x^3 +ax^2 +bx - 8$ es divisible por (x-1) y que al dividirlo por (x-2) da resto 4

P9.- Si $P(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6$; encontrar p(3); ¿es (x – 3) factor de P(x)?

P10.- Hallar el valor de m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 6$ sea divisible por (x + 3) y por (x – 2).

3.4 RAICES ENTERAS DE UN POLINOMIO

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene raíces enteras entonces dichas raíces deben ser divisores del término independiente a_0

3.5 RAICES RACIONALES DE UN POLINOMIO

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene una raíz racional p/q entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n

3.6 OTROS RESULTADOS SOBRE POLINOMIOS

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un polinomio, entonces:

- $P(0) = a_0$ El termino independiente del polinomio
- $P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ La suma de los coeficientes de P(x)
- $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n$

3.7 RELACIONES DE CARDANO

Caso n= 2

Si r_1 y r_2 son las raíces del polinomio $x^2 + px + q$, entonces:

$$(x-r_1).(x-r_2) = x^2 + px + q$$

Al igualar ambos miembros se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} -p = r_1 + r_2 \\ q = r_1.r_2 \end{array}}$$

Caso n= 3

Si r_1 , r_2 y r_3 son las raíces del polinomio $x^3 + px^2 + qx + s$, entonces:

$$(x-r_1).(x-r_2).(x-r_3) = x^3 + px^2 + qx + s$$

Igualando ambos miembros se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} -p = r_1 + r_2 + r_3 \\ q = r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3 \\ -s = r_1.r_2.r_3 \end{array}}$$

Existen formulas similares para n = 4, 5,6...

EJ RES.- Sean a, b, y c las tres raíces del polinomio $x^3 - 64x - 14$ ¿Cuanto vale a+b+c ? ¿Y a.b.c? ¿Y $a^2+b^2+c^2$?

SOL: Por las relaciones de CARDANO se cumple que:

$$0 = a+b+c$$
$$-64 = ab+ac+bc$$
$$14 = a.b.c$$

Luego a+b+c=0 ; a.b.c= 14 y como: $0^2 = 0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2ab+2ac+2bc =$

$= a^2+b^2+c^2 + 2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2 + 2(-64) = 0$

Luego $a^2+b^2+c^2 = 128$

P11.-Sean a, b, y c las tres raíces del polinomio $x^3 - 64x - 14$ ¿Cuanto vale $a^3+ b^3+ c^3$? (utiliza lo obtenido en el ejercicio anterior)

P12.- El polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ tiene tres diferentes raíces: a, b, y c
¿Cuanto vale $a^3+ b^3+ c^3$?

P13.- Si 3 y 13 son dos raíces del polinomio con coeficientes enteros P(x) ¿Cual de los siguientes números puede ser el valor de P(10)?

a) 3 b) 10 c) 14 d) 39 e) 42

PRACTICA LO QUE HAS APRENDIDO

1) Si p y q son primos y $x^2 - px + q = 0$ tiene dos raíces enteras, distintas y positivas, entonces: ¿Cuantos de los siguientes resultados son verdaderos?: I) La diferencia de las raíces es impar II) Al menos unas de las raíces es un nº primo III) $p^2 - q$ es primo IV) $p + q$ es primo.
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

2) Sean p y q dos raíces distintas del polinomio $P(x)= x^3 +3x^2 - 1$ ¿Cuál de los siguientes polinomios tiene como raíz a p.q?
a) $x^3 - 3x - 1$ b) $x^3 +x^2 - 3x + 1$ c) $x^3 +3x^2 + 1$ d) $x^3 +x^2 +3x - 1$ e) $x^3 -3x^2 + 1$

3) El polinomio $x^3 +ax^2 +bx+c$ con coeficientes reales, tiene sus tres raíces reales y la suma de dos de ellas es 0 . Expresar c en términos de a y b.

4) Si $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+ a_2x^2 + a_1x +a_0$; entonces: $a_7+a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+ a_1+a_0 =$
a) 0 b) 1 c) 64 d) -64 e) 128

5) Determina cuantos números positivos “a” hay de manera que la ecuación $x^2 +ax+2007=0$ tenga dos raíces enteras.
a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

6) Si a es una solución de la ecuación $x^4 +x^2 -1 = 0$, determina el valor de $a^6 + 2a^4$

7) Se tiene un polinomio $\mathbf{P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ y $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)$, entonces el valor de **a** es:
a) -8 b) 10 c) -15 d) 22 e) -35