RAÍCES DE POLINOMIOS

6.1. Generalidades

Ecuación Entera Racional

$\neq$

$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + a_3\, x^{n-3} + \ldots\ldots\; a_n = 0$

Donde $a_0 \neq 0$

n entero positivo e indica el grado de la ecuación

a_0 , a_1 , a_2 , a_n son constantes y pueden ser reales o números complejos

Ejemplos

$3\, x^4 - 24\, x^3 + 4\, x^2 - 29\, x - 67 = 0$

$(4-3\, i)\, x^4 - (2+4\, i)\, x^3 + (3-4\, i)\, x^2 - (2-9\, i)\, x - (6+7\, i) = 0$

RAÍCES DE POLINOMIOS

6.1. Generalidades

Polinomio en x

Es una función en la variable x, de grado con la siguiente forma:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n$

con $a_0 \neq 0$, n entero positivo y a_0 , a_1 , a_2 , a_n constantes.

Entonces f(x)=0 es una ecuación racional entera de grado n en la variable x

Ejemplo

$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 29x - 67$

RAÍCES DE POLINOMIOS

6.1. Generalidades

Evaluación de Polinomios

Consistre en obtener el valor del polinomio al sustituir el valor de la variable en el polinomio

Ejemplo

Sea

$f(x)= 3\ x^4 – 24\ x^3 + 4\ x^2 –29\ x – 6$

Para x =1 entonces $f(1) = 3\ (1)^4 – 24\ (1)^3 + 4\ (1)^2 –29\ (1) – 67$

$f(1) = -52$

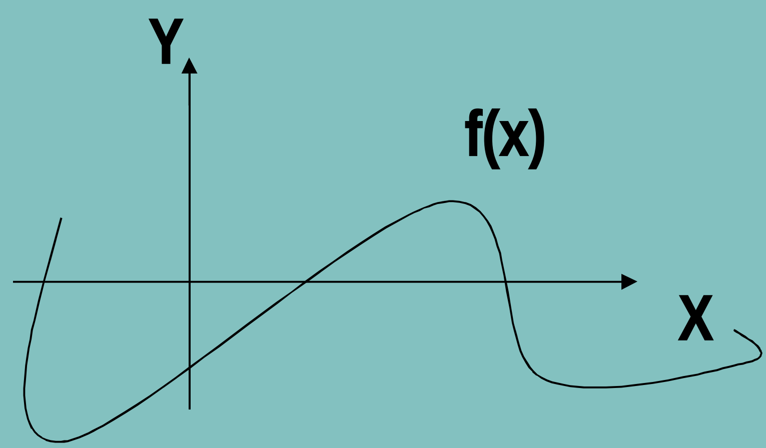
RAÍCES DE POLINOMIOS
6.1. Generalidades

Representación gráfica de Polinomios

Sea una función f (x). Para varios valores de x, evaluar la función y mostrarse en una tabulación para obtener su representación gráfica.

Ejemplo

x	f(x)



RAÍCES DE POLINOMIOS
6.1. Generalidades

Raíces de Polinomios

El grado del polinomio es la cantidad de raíces que tiene.

Las raíces que puede tener un polinomio son de tres tipos:

- **raíces positivas**
- **raíces negativas**
- **raíces complejas**

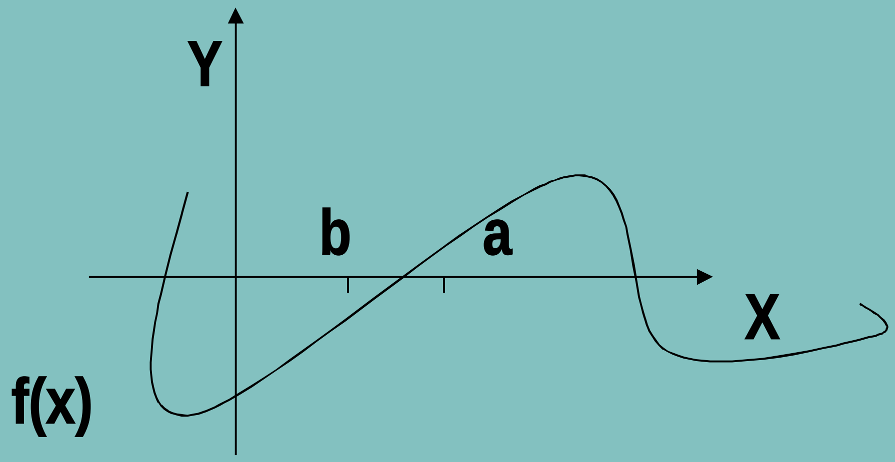
Las raíces también se pueden presentar con valores repetidos.

RAÍCES DE POLINOMIOS
61. Generalidades

Representación gráfica de raíces reales de los Polinomios

Sea una función f (x) al graficarla, las intersecciones con el eje de las X son las raíces reales de la función.

Se observa que para f(a) y f(b) la función tiene signo contrario, entonces hay por lo menos una raíz entre a y b



RAÍCES DE POLINOMIOS
6.1. Generalidades

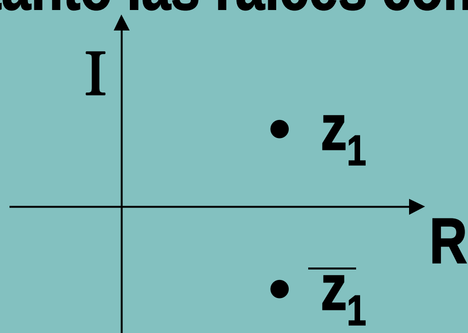
Representación gráfica de raíces complejas de los Polinomios

Si un polinomio f(x) tiene raíces complejas

Entonces si $z_1 = a + b\,i$ es una raíz, el complejo conjugado

$\overline{z_1} = a - b\,i$ **También es raíz del polinomio.**

Por lo tanto las raíces complejas se presentan por pares



RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Regla de Rufini o División Sintética

Es un método para dividir un polinomio f (x) por (x + r)
o sea f (x) / (x + r) . El divisor se obtiene despejando x=-r

Se obtienen los coeficientes del polinomio cociente (o polinomio reducido) y el resto (o residuo) de la división.

Divisor	**2**	**3**	**– 24**	**+ 4**	**-29**	**– 6**	**Coeficientes de f(x)**
			6	**- 36**	**-64**	**-186**	
		3	**- 18**	**-32**	**-93**	**-196**	**← f(2) o residuo (resto)**

coeficientes del Polinomio reducido (cociente)

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Regla de Rufini

Ejemplo

$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 29x - 6$ dividirlo por x-2 de4spejando x=2

Se obtiene

El polinomio cociente $3x^3 - 18x^2 - 32x - 93$ (de grado n-1)

El resto (residuo) de la división f(2)= -196

Ya que $f(2) \neq 0$ entonces $x = 2$ no es raiz

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Teorema Fundamental del Álgebra

Toda ecuación racional entera $f(x) = 0$ admite al menos una raíz Real o Compleja.

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Teorema del Divisor

Si r es una raíz de la función f(x) = 0 o sea f(r) = 0 entonces (x – r) es un divisor de f(x).

$f(x)= x^4+5x^3+5x^2-5x-6$ dividido por x-1 (despejando x=1)

Realizando la división sintética se obtiene

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 11 & 6 & 0 \end{array}$$

como f(1) = 0 entonces x=1 es raíz

El polinomio reducido es $x^3+6x^2+11x+6=0$

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Teorema del Residuo

Sea r una constante, si se divide el polinomio

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n$ por $(x - r)$,

el resto que se obtiene es $f(r)$

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

De la descomposición en factores

En un polinomio $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + .. a_n = 0$ con $a_1 = 1$

Existen las siguientes relaciones entre los coeficientes y las raíces

- **$- a_1$= suma de las raíces**
- **a_2= suma de los productos de las raíces tomadas de dos a dos o sea $a_2 = \Sigma C_{n,2}$**
- **$- a_3$= suma de los productos de las raíces tomadas de tres a tres o sea $a_2 = - \Sigma C_{n,3}$**
- **$(-)^n a_n$= producto de todas las raíces**

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

De la descomposición en factores

En el polinomio $x^3+4x^2+x-6=0$ con ríces 1,-2,-3

Verificar las relaciones entre los coeficientes y las raíces

- $-a_1$= suma de las raíces $-a_1= -(1-2-3) = 4$
- a_2= suma de los productos de las raíces tomadas de dos a dos o sea $a_2 = \Sigma C_{n,2}$ y $C_{3,2} = 3$
  entonces $a_2= (1)(-2)+(1)(-3)+(-2)(-3) = 1$
- $-a_3$= suma de los productos de las raíces tomadas de tres a tres o sea $a_2 = -\Sigma C_{n,3}$ y $C_{3,3} = 1$
  entonces $a_2= (1)(-2)(-3) = -6$

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Regla de los signos de Descartes

En un polinomio f(x) con coeficientes reales ordenado por potencias descendentes, hay una variación de signo cuando dos términos consecutivos son de signo contrario.

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

La Regla de los signos de Descartes establece que:

- **El número de raíces positivas de la ecuación f(x) =0 es igual a la cantidad de cambios de signo del polinomio f(x), o bien este número menos un entero par.**
- **El número de raíces negativas de la ecuación f(x) =0 es igual a la cantidad de cambios de signo del polinomio f(-x), o bien este número menos un entero par.**

La razón de restar pares, es para considerar las raíces complejas.

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Ejemplo

Sea $f(x)= x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

Cambios de signo para f(+1) + + + - -

un cambio por tanto 1 posible raiz positiva

Cambios de signo para f(-1) + - + + -

Tres cambios por tanto 3 ó 1(3-2=1) raíces negativas

Incluyendo las raíces complejas quedan las posibles raíces

Positivas	negativas	complejas
1	3	0
	1	2

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Cota Superior y Cota Inferior

En un polinomio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n$

en el cual $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_n$ son reales >0

- **Si al dividir f(x) por (x-a) siendo a≥ 0 mediante la Regla de Rufini, cuando los coeficientes del polinomio cociente son positivos o cero, entonces “a” es cota superior de las raíces reales de f(x) =0**
- **Si al dividir f(x) por (x + b) siendo b ≤ 0 mediante la Regla de Rufini, cuando todos los coeficientes del polinomio cociente son alternados positivo negativo o cero entonces “b” es cota inferior de las raíces reales de f(x) =0**

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.2. Reglas y Teoremas

Cota Superior y Cota Inferior

Ejemplo Sea $f(x)= x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

Por la Regla de Rufini se obtiene

6	1	5	5	-5	-6
		6	66	426	2526
	1	11	71	421	2520

Todos los coeficientes del polinomio cociente son positivos, entonces a= 6 es cota superior de las raíces reales de f(x)

Por la Regla de Rufini se obtiene

-6	1	5	5	-5	-6
		-6	6	-66	71
	1	-1	11	-71	65

Todos los coeficientes del polinomio cociente son alternados de signo positivo, negativo entonces b= - 6 es cota inferior de las raíces reales de f(x) =0

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.3. Raíces racionales

Valores posibles de raíces racionales

En una ecuación de coeficientes enteros

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n$ con $a_0 \neq 0$

Sea b es un divisor exacto de a_n y

c es un divisor exacto de a_0

Los valores posibles de raíces racionales serán los cocientes de los divisores exactos b/c

RAÍCES DE POLINOMIOS
6.3. Raíces racionales

Valores posibles de raíces racionales

Ejemplo

Sea $f(x)= x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

Posibles divisores exactos de b=6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

divisores exactos de c=1 es ± 1

Entonces $b/c = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

y que son los valores posibles de las raíces racionales

RAÍCES DE POLINOMIOS

6.3. Raíces racionales de ecuaciones

Raíces Racionales

$\neq$

Sea una ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n = 0$$

$$\text{con} \qquad a_0 \neq 0$$

Una fracción racional b/c irreducible, y que sea raíz de la ecuación, b es divisor de a_n y c de a_0 cumplen con los conceptos de los valores probables de raíces.