UNIDAD III. POLINOMIOS

3.4. Técnicas elementales para buscar raíces

Recordando la definición de raíz Un polinomio P(x) tiene una raíz "r" si y solo si P(r) = 0.

Recordar el teorema de factorización lineal
Si $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ Donde: $a_n \neq 0$ y n ≥ 1.
El polinomio puede factorizarse a la forma:
$p(x)=a_n\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)\left(x-r_3\right)...\left(x-r_n\right)$
Donde: a_n es el coeficiente principal y r_1 a r_n son las raíces complejas.

Técnicas elementales para buscar raíces
Una de las más sencillas es un proceso de factorización; a continuación se muestran unos ejemplos:

Ejemplo 1. Encontrar las raíces para el polinomio:
$p(x)=x^3-6x^2-16x$
Solución: Nos podemos dar cuenta por factorización que:

$p(x)=x^3-6x^2-16x$

$p(x)=x\left(x^2-6x-16\right)$

$p(x)=x\left(x+2\right)\left(x-8\right)$

Y como las raíces son los valores que hacen que P(x)=0 igualamos a cero el polinomio y determinamos los valores que hacen posible dicha igualdad.
$x\left(x+2\right)\left(x-8\right)=0$ Quedando las raíces como: $x_1=0$; $x_2= -2$ y $x_3=8$.

Ahora puede hacerlo con los siguientes polinomios:

$f(x)=2x^4+8x^3+10x^2$

$q(x)=3x^2-10x+8$

Cuando el grado del polinomio y la cantidad de términos del mismo no permiten la factorización directa, se requiere utilizar el siguiente método.

Para un polinomio: $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$

Sus posibles raíces racionales esta dada por $\dfrac{p}{q}$

Donde "p" son todos los factores (positivos y negativos) del término constante a_0 y "q" los factores (positivos y negativos) del término principal a_n. Es decir, para el polinomio en su forma general:

$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$

↨ q = a_n ↨ p = a_0

Ejemplo: para el polinomio P(x)=$3x^2$ + 2x - 5.

↨ q = a_n, q = 3 ↨ p = a_0, p = -5

Entonces los factores (positivos y negativos) para cada término son:
$p=\pm5,\pm1$ y $q=\pm3,\pm1$

Las posibles raíces del polinomio son:

$\dfrac{p}{q}=\pm5,\pm\dfrac{5}{3},\pm\dfrac{1}{3},\pm1$

Determine las posibles raíces para los siguientes polinomios:

$f(x)=2x^4+8x^3+10x^2$

$q(x)=3x^2-10x+8$

$s(x)=x^4-3x^2+2x-5$

Cada una se puede probar con división sintética, para determinar las raíces definitivas; como se dará cuenta es un proceso largo, a continuación se exponen algunas reglas que pueden ayudarnos a hacer mas corto el proceso para probar las posibles raíces.

Cotas de las raíces reales.

Por cota se refiere a los límites entre los cuales se encuentran las raíces del polinomio.

Se dice que a es una cota inferior y b una superior de las raíces de un polinomio (o los ceros de un polinomio) si para cada raíz "r" se satisface la siguiente condición: a ≤ r ≤ b.

Sea un polinomio P(x) con raíces reales:

Si P(x) se divide entre x – b siendo que b > 0; y el renglón que contiene tanto el cociente y el residuo son positivos, entonces b es una cota SUPERIOR para las raíces de P(x).

Si P(x) se divide entre x – a; siendo que a < 0; y el renglón que contiene al cociente y al residuo alternan su signo (positivo a negativo y viceversa) entonces a es una cota INFERIOR para los ceros reales de P(x).

NOTA: El cero puede ser considerado negativo o positivo según convenga para el teorema anterior.

Ejemplo: Demostrar que el polinomio $s(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ tiene sus raíces reales entre – 3 y 2.

Dividiendo entre (x -2):

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Nótese que se divide entre **b >0** y todos los coeficientes del **cociente** y el **residuo** son positivos, por lo tanto 2 es una cota **SUPERIOR**

Dividiendo entre (x + 3)

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & -3 & 9 & -18 & 48 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -16 & 43 \end{array}$$

Nótese que se divide entre **a < 0** y los signos del **cociente** y **residuo** se alternan, por lo tanto -3 es una cota **INFERIOR**.

Otro ejemplo: Determine la cota inferior y superior para el siguiente polinomio: $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 10$ use los valores 1, 2, 3 y 4 como posibles cotas superiores y para las cotas inferiores -1 y -2.

Usando división sintética para probar las cotas superiores:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & 1 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & 2 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & \boxed{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 4) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & 4 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{18} \end{array}$$

Al dividir entre 4 (b > 0) todos los coeficientes del cociente y residuo son positivos; por lo cual 4 es una cota SUPERIOR.

Ahora buscando la cota inferior:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & -1 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & \boxed{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -2) & 1 & -3 & -2 & 10 \\ & & -2 & 10 & -16 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & \boxed{-6} \end{array}$$

Solo en a = -2 hay los signos se alternan con cada coeficiente, nótese que en el caso del -1 el valor de 2 (ultimo coeficiente del cociente) y 8 (residuo) ambos son positivos, por lo cual no se alterna el signo para ese caso.

Por lo tanto las raíces están en el intervalo [-2, 4]

Regla de los signos de descartes

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales tal que P(0)≠0. Entonces:

1. El número de raíces reales positivas de p(x) es igual al número de cambios en el signo de P(x) o es disminuido en una cantidad entera par.
2. El número de raíces reales negativas de p(x) es igual al número de cambios de signo de p(-x) o es disminuido en una cantidad entera par.

Importante notar que solo estamos hablando de raíces reales y que debemos ordenar los términos del polinomio de mayor a menor grado.

Ejemplo: determinar el número posible de raíces reales para el siguiente polinomio: $p(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$

Solución: El ejemplo ya ofrece el polinomio ordenado según el grado de cada término, por lo cual no se requiere ordenarlo.

Polinomio	**$3x^6$**	**$+ 4x^5$**	**$+ 3x^3$**	**$– x$**	**$- 3$**
Coeficiente	**+3**	**+4**	**+3**	**-1**	**-3**
Signo	**Positivo**			**Negativo**	
Variaciones	**Una**				

En el polinomio hay un solo cambio. Por lo tanto el número de raíces positivas solo puede ser una.

Ahora probaremos la cantidad de cambios de signo de p(-x):

$$p(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

$$p(-x) = 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3$$

$$p(-x) = 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3$$

NOTA: cuando -x se eleva a una potencia par el signo se vuelve positivo, pero cuando –x se eleva a una potencia impar, se vuelve negativo.

Polinomio	**$3x^6$**	**$- 4x^5$**	**$- 3x^3$**	**$+x$**	**$- 3$**
Coeficiente	**+3**	**- 4**	**-3**	**+1**	**-3**
Signo	**Positivo**	**Negativo**		**Positivo**	**Negativo**
Variaciones	**Una**			**Dos**	**Tres**

Así que P(-x) tiene tres variaciones de signo por lo cual tiene **máximo tres raíces negativas** o una raíz negativa (ya que el máximo de raíces "3" es disminuido en un número par 3 -2= 1).

Resumiendo, para $p(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$

Numero de posibilidad	**Número de raíces positivas**	**Número de raíces negativas**	**Número de raíces imaginarias**	**TOTAL RAICES:**
1	**1**	**1**	**4**	**6**
2	**1**	**3**	**2**	**6**

Ejercicio: Aplique la regla de signos de descartes para determinar la posible cantidad de raíces reales para:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6$$

No hay variaciones de signo para P(x) (todos los términos son positivos) por lo cual hay cero raíces positivas.

Ahora probando p(-x)

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6$$

$$p(x) = (-x)^5 + 2(-x)^4 + (-x)^3 + 2(-x)^2 + 3(-x) + 6$$

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 6$$

Hay 5 variaciones de signo. Puede haber 5, 3 o 1 raíz real negativa. Termine la tabla siguiente:

Numero de posibilidad	**Número de raíces positivas**	**Número de raíces negativas**	**Número de raíces imaginarias**	**TOTAL RAICES:**
1		**1**		
2		**3**		
3		**5**		

Teorema sobre raíces conjugadas

“Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales, si el número complejo a+bi es una raíz del polinomio, también debe serlo su conjugado a–bi.”

Se requiere que el conjugado sea otro factor del polinomio si este solo tiene coeficientes reales tal como dice el teorema, por ejemplo: el polinomio P(x)= x^2 +1. Tiene coeficientes reales.

Como puede notarse solo tiene dos raíces imaginarias y puede expresarse en forma de sus factores,

$$p(x) = (x+i)(x-i)$$

Comprobación:

$$p(x) = (x+i)(x-i)$$

$$p(x) = x^2 - xi + xi - i^2$$

$$p(x) = x^2 - (-1)$$

$$p(x) = x^2 + 1$$

¿Cuáles son las raíces? r_1 = +i y r_2 = -i Nótese que son raíces conjugadas.

Ejemplo completo de factorización de polinomios: Factorice completamente el siguiente polinomio:

$$p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

Hay dos cambios de signo, así que puede haber hasta dos raíces positivas.

Los posibles ceros o raíces racionales son:

p = 9

q = 2

$p = \pm 9, \pm 3, \pm 1$ y $q = \pm 2, \pm 1$

Las posibles raíces del polinomio son:

$$\frac{p}{q} = \pm 9, \pm\frac{9}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$$

Se buscarán las raíces positivas:

Probando desde el valor positivo más pequeño 1/2:

$\frac{1}{2}$	2	5	-8	-14	6	9
		1	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{9}{8}$
	2	6	-5	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{63}{8}$

½ no es un cero y tampoco una cota.

Probando el 1:

1	2	5	−8	−14	6	9
		2	7	−1	−15	−9
	2	7	−1	−15	−9	0

El valor 1 es una raíz del polinomio, por lo cual se puede factorizar la raíz (x – 1) quedando:

$$p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

$$p(x) = (x-1)\underbrace{\left(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9\right)}$$

El nuevo **polinomio a factorizar** tiene un cambio de signo, por lo cual TIENE UNA RAIZ POSITIVA.

Dado que las raíces pueden repetirse se descarta solamente el ½ positivo como raíz, se sigue probando el 1 (el cual no cero el residuo).

1	2	7	−1	−15	−9
		2	9	8	−7
	2	9	8	−7	−16

Se prueba ahora con el valor positivo siguiente y el 3/2 si fue raíz.

$\frac{3}{2}$	2	7	−1	−15	−9
		3	15	21	9
	2	10	14	6	0

Al encontrar una nueva raíz, encontramos un factor mas del polinomio:

$$p(x)=(x-1)\left(2x^4+7x^3-x^2-15x-9\right)$$

$$p(x)=(x-1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\underbrace{\left(2x^3+10x^2+14x+6\right)}$$

El nuevo **polinomio a factorizar** NO tiene un cambio de signo, por lo cual NO TIENE RAICES POSITIVAS (Saber esto nos ahorro 4 divisiones sintéticas).

Se pueden seguir probando ahora los factores negativos, pero hay una simplificación que nos puede ahorrar muchas divisiones también; nótese que de $2x^3+10x^2+14x+6$ se puede factorizar un 2; quedando:

$$p(x)=(x-1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)(2)\left(x^3+5x^2+7x+3\right)$$

Esto hace mas simple el polinomio a factorizar; ahora el 2 puede ser multiplicado por cualquiera de los otros dos factores (x-1) o (x – 3/2).

Podemos multiplicarlo por el último y así no quedan fracciones en los factores.

$$p(x)=(x-1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)(2)\left(x^3+5x^2+7x+3\right)$$

$$p(x)=(x-1)\left(2x-\tfrac{2*3}{2}\right)\left(x^3+5x^2+7x+3\right)$$

$$p(x)=(x-1)(2x-3)\underbrace{\left(x^3+5x^2+7x+3\right)}$$

Así queda el nuevo **polinomio a factorizar**. Recuerde que solo tiene raíces negativas (no hay cambio de signos) por lo cual se reducen las posibles raíces reales a -1 y -3.

Dividiendo entre el valor negativo r = -1 (es decir entre x + 1) queda:

−1	1	5	7	3
		−1	−4	−3
	1	4	3	0

Dado que r = - 1 si fue raíz se extrae el factor (x – (-1)) o el factor (x + 1), el cual factorizando ahora a:

$$p(x)=(x-1)(2x-3)(x+1)\left(x^2+4x+3\right)$$

Ahora ¿dos números que multiplicados den 3 y al sumarse den 4?

RESPUESTA: $p(x)=(x-1)(2x-3)(x+1)(x+1)(x+3)$

3.3. Resuelva los siguientes problemas:

I.- Usar la regla de los signos de descartes para determinar la cantidad posible de raíces reales positivas y negativas.

i. $p(x)=x^3+4x^2+3x-2$

ii. $p(x)=x^3-5x^2+2x+12$

iii. $p(x)=x^4-6x^3+4x^2+15x+4$

II.- Identificar las raíces posibles p/q para cada caso:

iv. $p(x)=x^3+4x^2+3x-2$

v. $p(x)=x^3-5x^2+2x+12$

vi. $p(x)=x^4-6x^3+4x^2+15x+4$

III.- Calcule las raíces de los siguientes polinomios y llévelos a su forma factorizada:

vii. $p(x)=x^3+4x^2+3x-2$

viii. $p(x)=x^3-5x^2+2x+12$

ix. $p(x)=x^4-6x^3+4x^2+15x+4$

Elabore una PRÁCTICA DE EJERCICIOS siguiendo las rubricas correspondientes: http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm

Puede entregar impreso el trabajo o enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

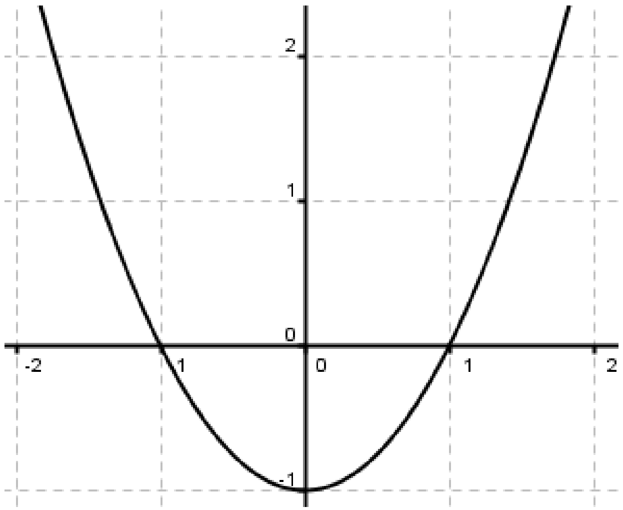
Práctica

Gráficas de polinomios.
Para graficar polinomios es necesario llevarlo a su forma factorizada:
$p(x) = a_n\left(x - r_1\right)\left(x - r_2\right)\left(x - r_3\right)\ldots\left(x - r_n\right)$

Raíces simples: tocan el eje 1 vez.

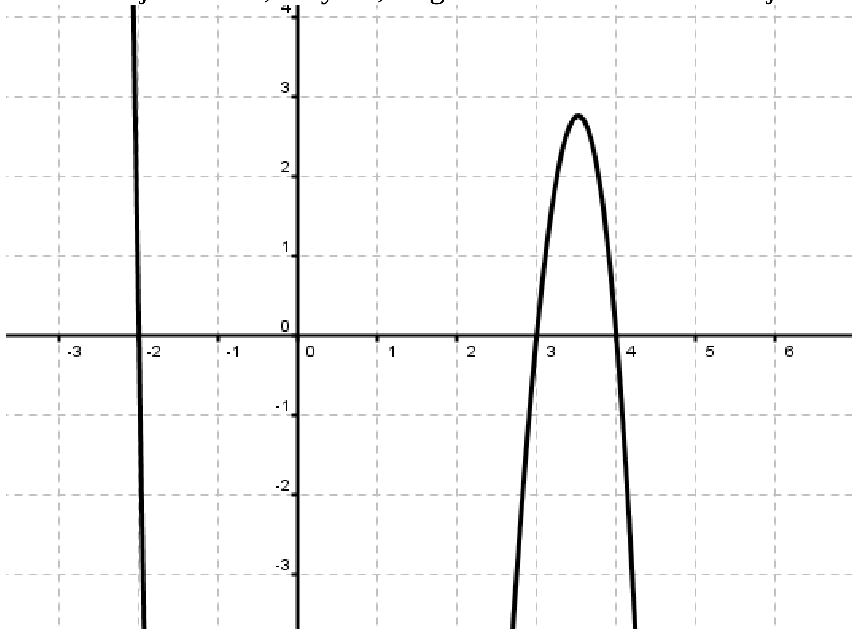
Por ejemplo el polinomio: $p(x) = \left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$
Tiene los siguientes valores: $a_n = 1$ $r_1 = 1$ $r_2 = -1$

Como el valor de p(x) se grafica en el eje Y y cuando el valor de x es igual a las raíces, el polinomio toca al eje X. p(x = r) = 0



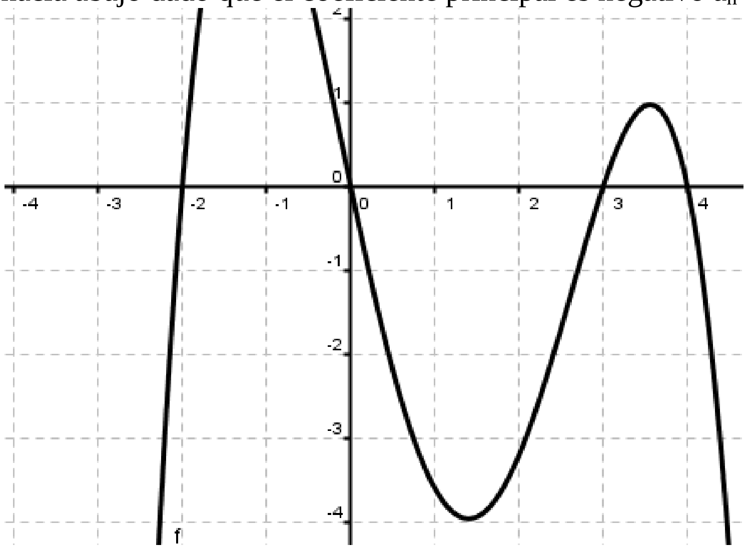
Ahora siempre que a_n sea positiva, la gráfica crecerá; siempre que a_n sea negativa, la gráfica terminará hacia abajo.

Por ejemplo: $p(x) = -2\left(x + 2\right)\left(x - 3\right)\left(x - 4\right)$
Tocará el eje X en -2, +3 y +4; su gráfica terminará hacia abajo.



Y para la gráfica: $p(x) = -\frac{1}{5}(x+2)(x-3)(x-4)x$

Nótese que cortara al eje X en: -2, +3, +4 y 0; su gráfica terminará hacia abajo dado que el coeficiente principal es negativo a_n = -1/2.

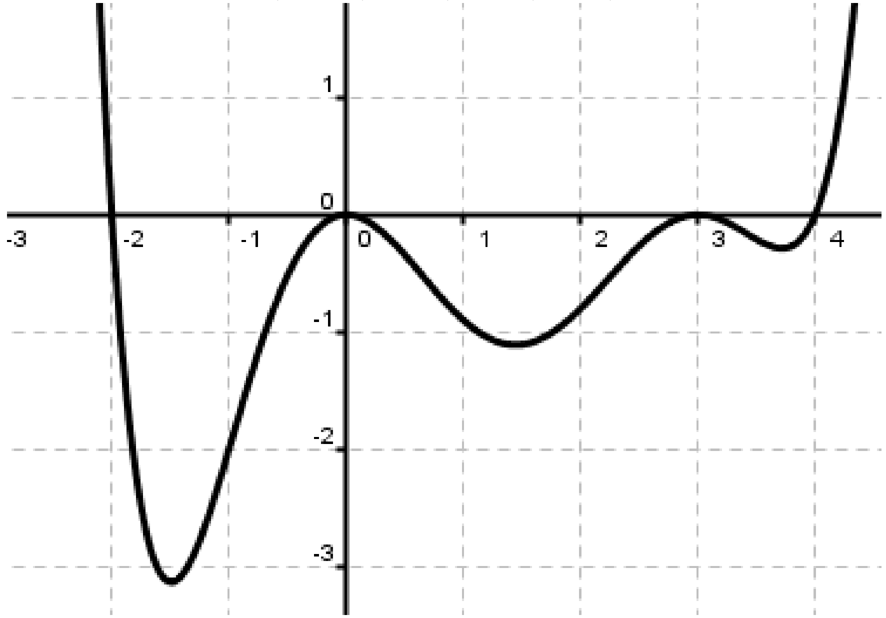


Raíces dobles, rebotan en el eje.

Ahora cuando las raíces son dobles: $p(x) = \frac{1}{40}(x+2)(x-3)^2(x-4)x^2$

Nótese que es un polinomio de grado 6 ya que tiene 6 factores (x – r). Aquí el coeficiente principal es positivo, la gráfica terminará hacia arriba.

Las raíces son: $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 0$, $r_6 = 0$.



Libros en línea que pueden consultar:

Precálculo: matemáticas para el cálculo Escrito por James Stewart, Lothar Redlin
http://books.google.com.mx/books?id=CiHF4fJ_ezwC&lpg=PA267&ots=mzUNLH5_Jo&dq=cambio%20de%20signo%20en%20el%20residuo%2C%20polinomios&pg=PA276#v=onepage&q=cambio%20de%20signo%20en%20el%20residuo,%20polinomios&f=false

Álgebra y trigonometría con geometría análitica Escrito por Arthur Goodman, Lewis Hirsch.
http://books.google.com.mx/books?id=84mjXNXuZKEC&lpg=PA274&ots=Sflzq7g9lI&dq=polinomios%2C%20teorema%20fundamental%20del%20%C3%A1lgebra&pg=PA276#v=onepage&q=polinomios,%20teorema%20fundamental%20del%20%C3%A1lgebra&f=false

Graficadores:
Software Graph: Descargar: http://www.padowan.dk/graph/Download.php
Software GeoGebra: Descargar: http://www.geogebra.org/download/ Tutorial GeoGebra: http://www.youtube.com/watch?v=_HQeDcM62xs&feature=related