

6. MOVIMIENTOS OSCILATORIOS

Cuando estudiamos movimientos unidimensionales por medio del diagrama de la energía (Capítulo 5) vimos que si un móvil está atrapado en un pozo de energía potencial su movimiento es una oscilación, o sea un vaivén entre dos posiciones extremas (los puntos de retorno x_- y x_+). Esta situación se da muchas veces en la práctica y por eso el estudio de los movimientos oscilatorios tiene gran importancia. Las características de las oscilaciones dependen de la ley de fuerzas o, lo que es lo mismo, de la forma de la energía potencial $V(x)$ y de la presencia o no de otras fuerzas no conservativas que pueden dar lugar a la disipación o al aumento de la energía mecánica del sistema. Veremos que esto da lugar a una gran variedad de fenómenos y comportamientos diferentes.

El movimiento oscilatorio más simple es el de una masa movida por un resorte (Fig. 6.1a), en cuyo caso la fuerza es

$$F = -kx \quad (6.1)$$

y corresponde a una energía potencial

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.2)$$

Las oscilaciones del resorte son una primera aproximación para muchos movimientos oscilatorios. En efecto, si x_0 es un punto de equilibrio donde la energía potencial correspondiente $V(x)$ es mínima (Fig. 6.1b), en el entorno de x_0 podremos escribir

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \frac{1}{3}q(x - x_0)^3 + \dots, \quad V_0, k, q, \dots = \text{cte.} \quad (6.3)$$

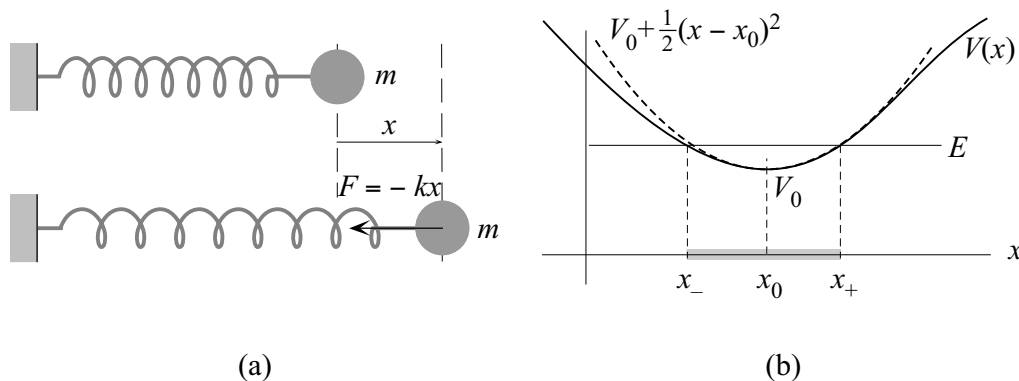


Fig. 6.1. Las oscilaciones de una masa movida por un resorte (a) son el modelo básico y la primera aproximación de muchos movimientos oscilatorios de pequeña amplitud (b).

Si $k \neq 0$, como ocurre en muchos casos, y si la amplitud de las oscilaciones no es demasiado grande, se puede entonces aproximar $V(x)$ por medio de una parábola de la forma (6.2). Por lo tanto los movimientos oscilatorios de pequeña amplitud que responden a la fuerza de restitución (6.1) son fenómenos muy frecuentes y de gran importancia práctica y por eso merecen un estudio detenido. Comenzaremos por el caso más simple, que es aquél en que no actúan fuerzas no conservativas, de modo que la fuerza es únicamente la (6.1).

Oscilaciones libres de un resorte

En ausencia de fuerzas no conservativas la ecuación del movimiento de la masa m sometida a la fuerza de restitución (6.1) es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (6.4)$$

Es fácil verificar que la solución de esta ecuación es una función del tipo seno o coseno ya que $\ddot{x}(t)$ es proporcional a $-x(t)$. Además por ser la (6.4) del 2º orden, su solución general debe contener *dos constantes* de integración. Ensayamos entonces una solución de la forma

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad a, \varphi = \text{cte.} \quad (6.5)$$

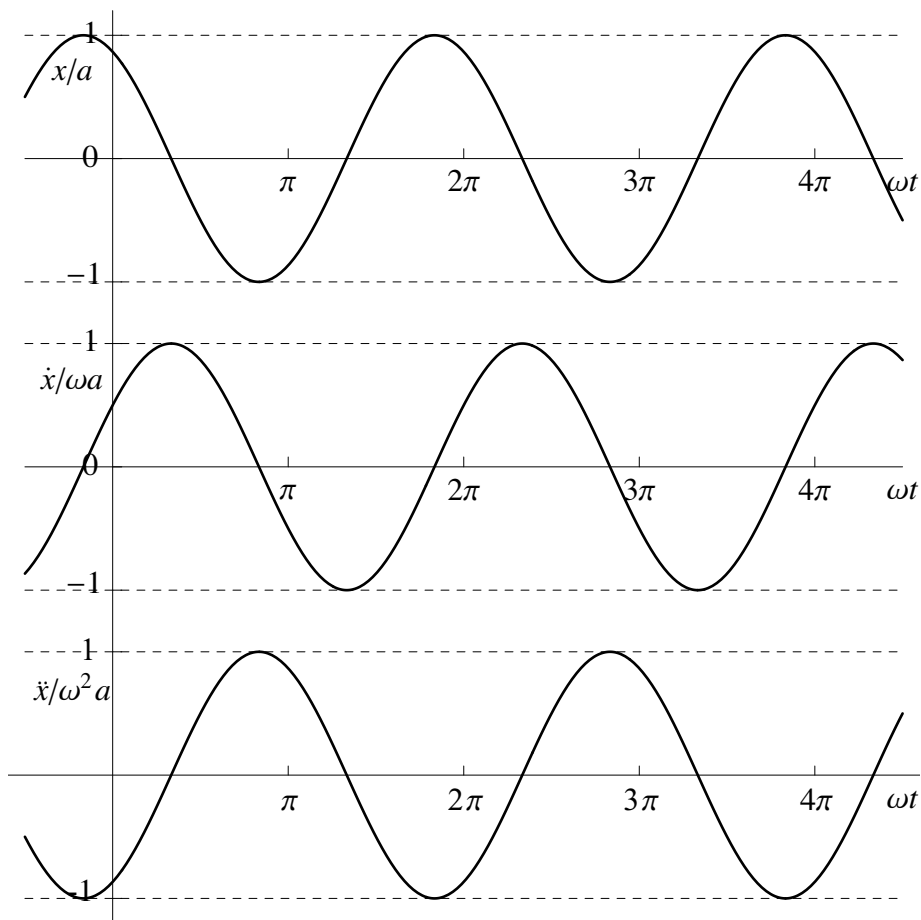


Fig. 6.2. Posición, velocidad y aceleración para una oscilación armónica.

La (6.5) describe una oscilación sinusoidal de amplitud a y frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$ cuyo período y fase inicial son T y φ ; para ver si satisface la ecuación del movimiento calculamos

$$\dot{x} = -\omega a \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad \ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (6.6)$$

Sustituyendo (6.5) y (6.6) en la (6.4) resulta $\omega^2 = k/m$, luego la (6.5) satisface la (6.4) si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.7)$$

La magnitud ω es la *frecuencia propia* del oscilador¹. La solución *general* (6.5) describe todas las oscilaciones posibles; a y φ se determinan a partir de las condiciones iniciales, para lo cual hay que dar *dos* condiciones, por ejemplo la posición y velocidad inicial, o la posición y energía inicial, o la velocidad y energía inicial, etc. Es útil escribir x , \dot{x} y \ddot{x} en la forma

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \dot{x} = \omega a \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad , \quad \ddot{x} = \omega^2 a \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (6.8)$$

Luego x , \dot{x} y \ddot{x} son funciones sinusoidales del tiempo y sus amplitudes están en la relación

$$1 : \omega : \omega^2 \quad (6.9)$$

Esto es lógico por razones dimensionales, ya que $\dot{x} \sim a/T \sim \omega a$ y $\ddot{x} \sim a/T^2 \sim \omega^2 a$. Además \dot{x} y \ddot{x} están *desfasadas* respecto de x : las fases de la velocidad y la aceleración están adelantadas en $\pi/2$ y π , respectivamente (Fig. 6.2). Este tipo de movimiento se denomina *movimiento armónico simple* u *oscilación armónica*. Como se demostró en el Capítulo 5, la energía mecánica del movimiento oscilatorio armónico es proporcional al cuadrado de la amplitud

$$E = T + V = \frac{1}{2} k a^2 \quad (6.10)$$

Oscilaciones amortiguadas

Si la masa oscila en un fluido está sometida a la fuerza de arrastre, que al disipar la energía mecánica produce con el correr del tiempo una disminución de la amplitud de las oscilaciones o sea un *amortiguamiento*. Para calcular lo que pasa es necesario resolver la ecuación del movimiento con el agregado de la fuerza de arrastre:

$$m a = -kx + F_a \quad (6.11)$$

donde $F_a = -\eta_a \dot{x} \ell$ o bien $F_a = -\rho_a \dot{x} |\dot{x}| \ell^2$ según si el número de Reynolds $\mathcal{R} = \rho_a \dot{x} \ell / \eta_a$ es mucho menor o mucho mayor que la unidad. Aquí m es la masa del cuerpo que oscila, ℓ su dimensión lineal, ρ_a es la densidad del fluido y η_a es el coeficiente de viscosidad. En muchos casos de interés \mathcal{R} es pequeño, luego usamos²

$$F_a = -C\dot{x} \quad , \quad C = \eta_a \ell \quad (6.12)$$

Si sustituimos F_a en la (6.11) se obtiene

$$m \ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0 \quad (6.13)$$

Antes de resolver esta ecuación diferencial es útil estimar el amortiguamiento en base a argumentos físicos. Supongamos que C es muy pequeño, de manera que el amortiguamiento es débil. En este caso la disminución de la amplitud en un período de la oscilación será muy pequeña, de modo que podemos suponer que en primera aproximación el movimiento sigue siendo una oscilación armónica simple. Calculemos entonces la energía disipada en un período:

¹ El argumento dimensional del Capítulo 5 dio correctamente T a menos de un factor $2/\pi$.

² En el caso que $\mathcal{R} > 1$ la fuerza de arrastre depende de \dot{x}^2 y entonces la ecuación de movimiento no es lineal. Esto complica el análisis, como veremos más adelante.

$$\Delta E = W_a = \int_0^T F_a dx = 4 \int_0^a F_a dx = -4C \int_0^a v dx = -4C \bar{v} a \quad (6.14)$$

siendo \bar{v} el valor medio de la velocidad. Ahora, del diagrama de la energía se ve que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2 \quad (6.15)$$

de donde despejamos $v = \omega a(1 - \xi^2)^{1/2}$ donde $\xi = x/a = \cos(\omega t + \varphi)$. Luego $\bar{v} = \omega a \bar{\xi}$ donde $\bar{\xi}$ es el valor medio de $\xi = (1 - \xi^2) = \text{sen}(\omega t + \varphi)$ en el intervalo $(0, 1)$. Como $\xi^2 + \xi^2 = 1$, la curva $\xi(\xi)$ es un cuarto de circunferencia de radio 1 y centro en el origen. El valor medio buscado es el área del correspondiente cuarto de círculo, de modo que $\bar{\xi} = \pi/4$ y $\bar{v} = \pi\omega a/4$. Luego $\Delta E = -\pi C \omega a^2$ y usando (6.7) y (6.10) obtenemos finalmente

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi C}{\sqrt{mk}} \quad (6.16)$$

Luego la energía mecánica decrece en *progresión geométrica* ya que en cada oscilación se disipa una fracción constante $2\pi C/\sqrt{mk}$ de la energía mecánica. Calculemos qué sucede con la amplitud. De $E \sim a^2$ obtenemos $\Delta a/a = \Delta E/2E$ y por lo tanto

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\pi C}{\sqrt{mk}} \quad (6.17)$$

Luego la amplitud decrece en progresión geométrica de razón $\pi C/\sqrt{mk}$. Recordemos que nuestro argumento se basa en suponer que $\Delta a/a \ll 1$, por lo tanto se debe cumplir $C \ll \sqrt{mk}$. Si $C \geq \sqrt{mk}$ este análisis no sirve pues la (6.17) da $\Delta a \geq a$, de modo que la amplitud cae prácticamente a cero en el tiempo $2\pi(m/k)^{1/2}$ y no podemos entonces hablar de oscilaciones. Por lo tanto la solución de la (6.13) tiene diferente carácter según si el amortiguamiento es débil o fuerte, y hay que considerar esos casos por separado.

Amortiguamiento débil

Puesto que cuando el amortiguamiento es débil el movimiento es una oscilación amortiguada, vamos a buscar una solución de la (6.13) de la forma

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (6.18)$$

donde a , φ , γ y ω' son constantes a determinar. Sustituyendo esta expresión en la (6.13) es fácil verificar que la misma se cumple para todo a , φ , si

$$\gamma = \frac{C}{2m}, \quad \omega'^2 = \omega^2 - \gamma^2 \quad (6.19)$$

Luego el movimiento es una oscilación exponencialmente amortiguada cuya frecuencia ω' difiere de la frecuencia ω de las oscilaciones *libres*. El parámetro γ se llama *coeficiente de amortiguamiento*. Si $\gamma \rightarrow \omega$, esto es si $C \rightarrow \sqrt{4mk}$, $\omega' \rightarrow 0$. Si $\gamma \ll \omega$, o sea si $C \ll \sqrt{mk}$, la (6.19) da $\omega' \approx \omega$ a menos de términos del orden de C^2/mk y es fácil ver que se obtiene la (6.17) lo que justifica nuestro anterior tratamiento. Por supuesto la (6.18) tiene sentido sólo si

$$\gamma < \omega \Rightarrow \frac{C}{\sqrt{4mk}} < 1 \quad (6.20)$$

Las constantes a y φ de la solución general (6.18) dependen de las condiciones iniciales. Si $x_0 = x(t=0)$ y $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$ se tiene que

$$a = \frac{\sqrt{x_0^2 + 2\gamma x_0 \dot{x}_0 + \omega^2 \dot{x}_0^2}}{\omega'} \quad , \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega'} + \frac{\dot{x}_0}{\omega' x_0}\right) \quad (6.21)$$

En la Fig. 6.3 se muestra una solución de este tipo.

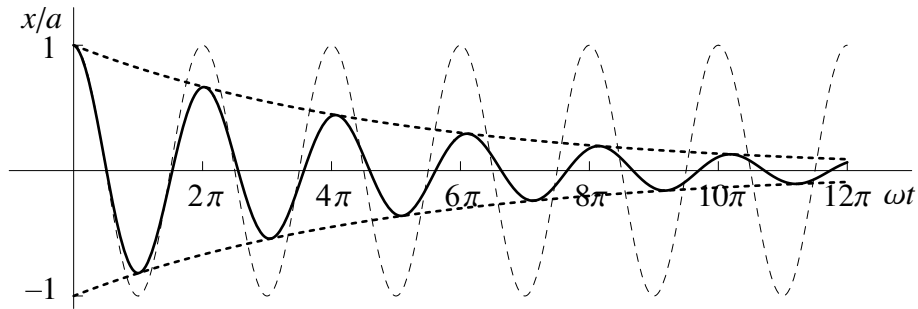


Fig. 6.3. Oscilación amortiguada ($\gamma = 0.2\omega$, $\varphi = 0$). Con línea de trazos se muestra la oscilación libre ($\gamma = 0$, $\varphi = 0$) para que se pueda apreciar la diferencia entre ω' y ω .

Amortiguamiento fuerte

Si $C > \sqrt{4mk}$ el tratamiento anterior no sirve porque el movimiento no es oscilatorio. Buscamos entonces una solución de la (6.13) de la forma

$$x = e^{-\gamma t} (ae^{\beta t} + be^{-\beta t}) \quad (6.22)$$

donde a , b , γ , β son constantes a determinar. Sustituyendo (6.22) en la (6.13) es fácil verificar que la misma se cumple para todo a , b , si

$$\gamma = \frac{C}{2m} \quad , \quad \beta^2 = \gamma^2 - \omega^2 \quad (6.23)$$

La (6.22) describe un movimiento que se acerca exponencialmente (ya que $\gamma > \beta$) a $x = 0$, y tiene sentido solamente si

$$\gamma > \omega \Rightarrow \frac{C}{\sqrt{4mk}} > 1 \quad (6.24)$$

Las constantes a , b de la solución general (6.22) dependen de las condiciones iniciales:

$$a = \frac{[x_0(\beta + \gamma) + \dot{x}_0]}{2\beta} \quad , \quad b = \frac{[x_0(\beta - \gamma) - \dot{x}_0]}{2\beta} \quad (6.25)$$

En la Fig. 6.4 se muestran dos soluciones de este tipo.

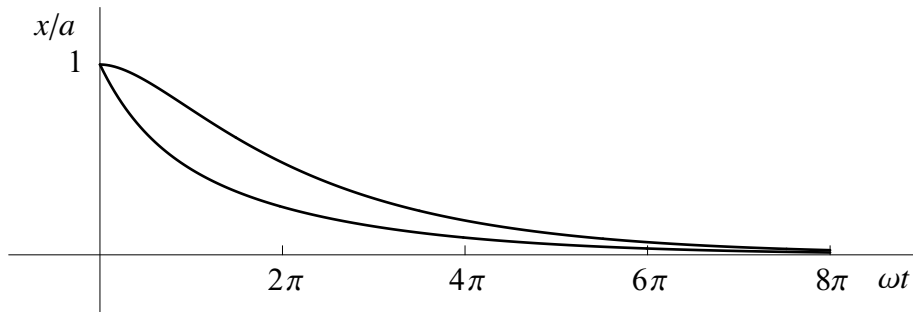


Fig. 6.4. Movimiento con amortiguamiento fuerte. Las dos soluciones que se han dibujado corresponden a $v_0 = 0$ y $v_0 = -\omega x_0$.

Amortiguamiento crítico

El caso límite $C = \sqrt{4mk}$ se denomina *amortiguamiento crítico* y se tiene que tratar por separado. Buscaremos soluciones de la (6.13) de la forma

$$x = e^{-\gamma t}(A + Bt) \quad (6.26)$$

donde A, B, γ son constantes a determinar. Sustituyendo (6.26) en la (6.13) es fácil verificar que la misma se cumple para todo A, B , si

$$\gamma = \omega = \frac{C}{2m}, \quad \frac{C}{\sqrt{4mk}} = 1 \quad (6.27)$$

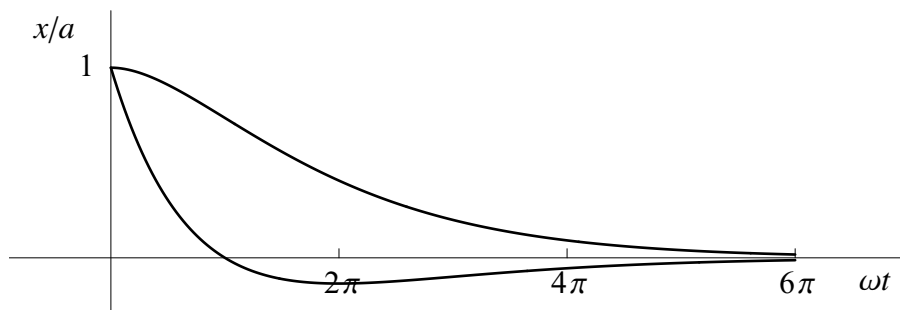


Fig. 6.5. Amortiguamiento crítico. Las dos soluciones que se han dibujado corresponden a $v_0 = 0$ y $v_0 = -\omega x_0$.

La (6.26) describe un movimiento que se acerca exponencialmente a $x = 0$. Las constantes A, B dependen de las condiciones iniciales:

$$A = x_0, \quad B = \gamma x_0 + v_0 \quad (6.28)$$

En la Fig. 6.4 se muestran dos soluciones de esta clase.

Oscilaciones forzadas

Sea un oscilador cuya frecuencia propia es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. El problema que nos interesa, y que es muy importante por sus aplicaciones, consiste en estudiar el movimiento que realiza si lo someto a una fuerza externa F_e que varía sinusoidalmente en el tiempo con la frecuencia ω (que puede ser diferente o igual a ω_0). Tendremos entonces

$$F_e = F \cos \omega t \quad , \quad F = \text{cte.} \quad (6.29)$$

La ecuación del movimiento es $m\ddot{x} = -kx + F_a + F_e$ o sea

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad , \quad c = C/m \quad , \quad f = F/m \quad (6.30)$$

Claramente la energía mecánica no se conserva porque la fuerza externa realiza trabajo. Antes de resolver la (6.30) vamos a poner en evidencia los aspectos físicos más importantes del problema con un mínimo de matemática. La observación muestra lo siguiente:

- si partimos con el oscilador en reposo y a partir de $t = 0$ aplicamos la fuerza F_e el oscilador se pone en movimiento, pero al cabo de cierto tiempo alcanza un régimen *estacionario*;
- el régimen estacionario consiste de oscilaciones cuya frecuencia es igual a ω , la frecuencia de la fuerza excitadora.

Para que exista un régimen estacionario la energía mecánica neta que recibe el oscilador en un período debe ser *nula*. Caso contrario cambiaría la amplitud, contrariamente a lo supuesto.

Sobre el sistema actúan tres fuerzas

- *La fuerza de restitución* del resorte es conservativa y por lo tanto su trabajo en un periodo es *nulo* (cualquiera sea el tipo de oscilación, basta con que vuelva a la posición del comienzo).
- *La fuerza excitadora* F_e no es conservativa y en principio realiza un trabajo neto sobre el sistema, que en un periodo está dado por

$$\int_0^T F_e dx = \int_0^T F_e v dt \quad (6.31)$$

- *La fuerza de arrastre* $F_r = -Cv = -cmv$ que amortigua las oscilaciones libres.

Veamos entonces como se puede obtener un régimen estacionario. En este régimen

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad , \quad \ddot{x} = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (6.32)$$

donde A es la amplitud de las oscilaciones y φ es una fase constante.

Consideremos primero el caso en que la disipación es despreciable ($c \approx 0$) y veamos si se puede satisfacer la ecuación del movimiento. Sustituyendo (6.32) en (6.30) queda

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t + \varphi) = f \cos \omega t \quad (6.33)$$

Hay que distinguir aquí dos casos:

- si $\omega_0 > \omega$ (el término de la fuerza de restitución $\omega_0^2 x$ domina sobre el término de inercia $\omega^2 \ddot{x}$) podemos satisfacer la (6.30) si

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad , \quad \varphi = 0 \quad (6.34)$$

- si $\omega_0 < \omega$ (la inercia domina sobre la fuerza de restitución) podemos satisfacer la (6.30) si

$$A = \frac{f}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \varphi = \pm \pi \quad (6.35)$$

En el último caso se suele elegir $\varphi = -\pi$. Tenemos pues oscilaciones estacionarias. La amplitud es constante porque en un período la fuerza excitadora realiza un *trabajo neto nulo*. En efecto $F_e = F \cos \omega t$ y $v = \omega A \cos(\omega t \pm \pi/2)$ (+ si $\varphi = 0$ y - si $\varphi = -\pi$), luego

$$W_e = \int_0^T F_e v dt = 0 \quad (6.36)$$

puesto que F_e y v tienen una diferencia de fase de $\pm\pi/2$. Esto se puede observar en la Fig. 6.6 donde se aprecia que en el primer cuarto de período (I) el producto $F_e v$ es negativo y en el segundo cuarto (II) es positivo y es fácil ver comparando intervalos de tiempo homólogos que $(F_e v dt)_I$ compensa exactamente a $(F_e v dt)_{II}$; lo mismo ocurre con los otros cuartos de período.

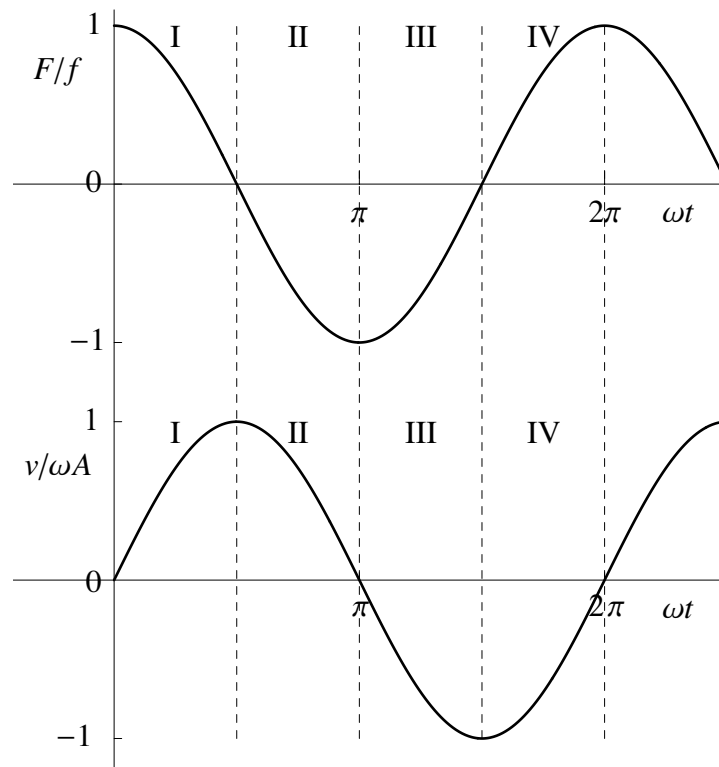


Fig. 6.6. Oscilaciones forzadas. Si $\omega \neq \omega_0$ el trabajo neto de la fuerza excitadora en un período es nulo

Volviendo a las oscilaciones forzadas tenemos entonces que

- si $\omega_0 > \omega$ (resorte “duro”) los términos dominantes en la ecuación de Newton son la fuerza excitadora y la fuerza de restitución: $\varphi = 0$ y la masa oscila *en fase* con F_e con la amplitud

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.37)$$

en particular si $\omega = 0$ (fuerza externa constante),

$$A = \frac{f}{\omega_0^2} = \frac{F}{k} \quad (6.38)$$

luego A es igual a la elongación de equilibrio bajo la acción de la fuerza constante F .

- si $\omega_0 < \omega$ (resorte “blando”) los términos dominantes son F_e y el término de inercia, entonces $\varphi = -\pi$ y la masa oscila *en contrafase* con la fuerza excitadora, con la amplitud

$$A = \frac{f}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.39)$$

Resonancia

En la Fig. 6.7 se aprecian en líneas de trazos $A(\omega)$ y $\varphi(\omega)$. Se ve que cuando $\omega \rightarrow \omega_0$, $A \rightarrow \infty$. Esto no es físico y proviene de que ignoramos la fuerza de arrastre. Lo que pasa es que no es cierto que la fuerza excitadora no realiza trabajo neto. En realidad debe entregar algo de trabajo al oscilador para compensar la disipación debida a F_a . ¿Cómo se consigue eso? Pues por medio de la fase φ , que debe ser *diferente* de 0 y $-\pi$, a fin que

$$\int_0^T F_e v dt \neq 0 \quad (6.40)$$

Este efecto no es importante para ω lejos de ω_0 . Pero cerca de ω_0 , donde A se hace grande, la disipación (proporcional a v , y por lo tanto a A) se hace también grande y la fase debe ser bien diferente de 0 y π . Por lo tanto la amplitud en resonancia *no* es infinita, sino que está limitada por la disipación, esencialmente porque la velocidad no puede superar la velocidad límite v^* .

Estimemos el efecto de la disipación. En resonancia ($\omega = \omega_0$) tenemos

$$F_a = -Cv = -CA\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \quad (6.41)$$

Cuando la amplitud es máxima se debe cumplir $F_e + F_a = 0$, luego se debe tener

$$F \cos \omega_0 t = CA\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \quad (6.42)$$

Esto implica

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{f}{c\omega_0} \quad (6.43)$$

Luego F_e y v están en *fase*, de modo que la fuerza excitadora equilibra el arrastre y la masa oscila con $v = v^*$. La amplitud es finita y su valor está determinado por la relación entre f y c .

Es fácil obtener la solución estacionaria *exacta* del problema. Para esto basta sustituir la (6.32) en la (6.30) y se obtiene entonces de inmediato

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{c\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.44)$$

En la Fig. 6.7 se han dibujado con líneas llenas $A(\omega)$ y $\varphi(\omega)$. Se ve que para ω lejos de ω_0 la solución aproximada (sin disipación) difiere muy poco de la solución exacta. Pero la diferencia es importante cerca de la resonancia. Es fácil verificar que cuando $\omega = \omega_0$ recuperamos el resultado (6.43) que obtuvimos mediante un argumento físico. Sin embargo se debe notar que el máximo de A no ocurre para $\omega = \omega_0$ sino para un valor ligeramente inferior dado por

$$\omega = \omega_m \equiv \omega_0 \sqrt{1 - c^2 / 2\omega_0^2} \quad (6.45)$$

como se obtiene de la (6.44). El máximo valor de A es un poco mayor que $A(\omega_0)$; su valor es

$$A_m = A(\omega_m) \equiv \frac{f}{c\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 / 4\omega_0^2}} = \frac{f}{c\omega'} \quad (6.46)$$

donde $\omega' = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ y γ es el coeficiente de amortiguamiento definido por la (6.19). Vemos entonces que la resonancia produce una eficiente disipación de la energía de las oscilaciones.

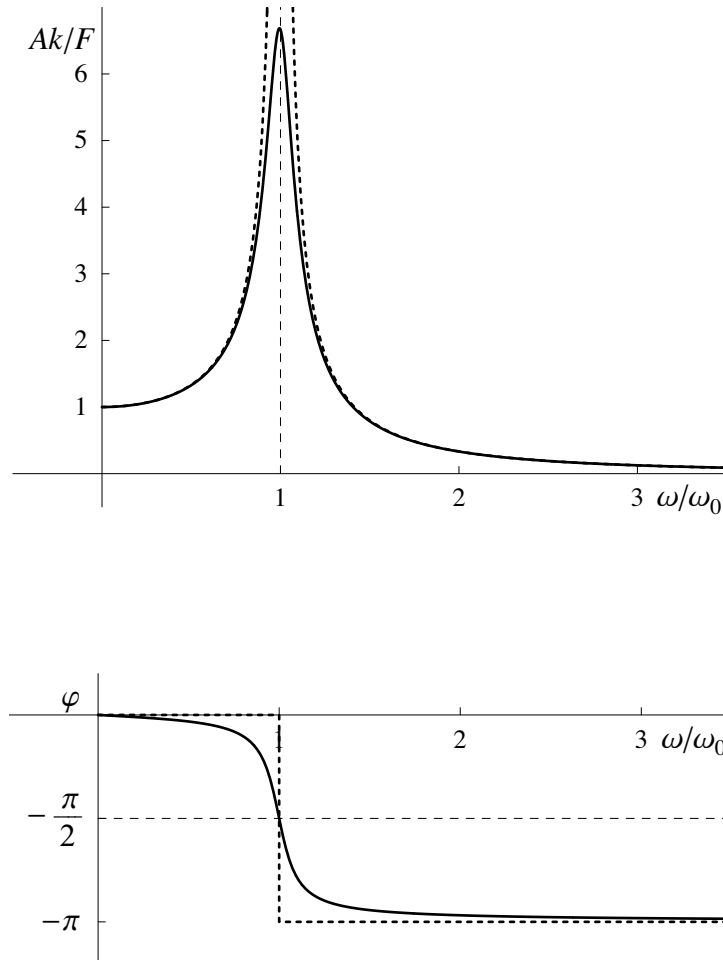


Fig. 6.7 Amplitud y fase de las oscilaciones forzadas.

Debido a la resonancia una fuerza excitadora pequeña puede provocar oscilaciones de gran amplitud, que en determinados casos pueden llegar a romper el sistema oscilante. Esto es lo que ocurre en los terremotos, cuando la resonancia entre las frecuencias propias de oscilación de los edificios y la frecuencia de las ondas sísmicas provoca el derrumbe de los mismos. Un caso muy citado también es el derrumbe del puente de Tacoma Narrows en los Estados Unidos, provocado por el viento que excitó oscilaciones de gran amplitud del puente. Por supuesto cuando las oscilaciones alcanzan una amplitud grande nuestro análisis no sirve pues se funda en aproximar $V(x)$ mediante una parábola, algo que vale sólo para oscilaciones de pequeña amplitud como ya comentamos al comienzo del Capítulo. Si la amplitud de la oscilación es grande hay que tomar más términos del desarrollo de $V(x)$ y entonces la ecuación de movimiento deja de ser lineal. Más adelante trataremos algunos de los efectos de la no linealidad.

En la solución estacionaria (6.32) no figura ninguna constante arbitraria. Esto se debe a que es una solución *particular* de la ecuación de movimiento (6.30) de las oscilaciones forzadas, que reproducimos aquí:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (6.47)$$

La (6.47) es una ecuación *lineal inhomogénea* y es sabido que su solución general se obtiene como la *suma* de la solución general de la correspondiente ecuación *homogénea*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.48)$$

más una solución particular de la ecuación inhomogénea³. Podemos entonces escribir de inmediato la solución general de la (6.47) ya que conocemos una solución particular, que es precisamente la (6.32) donde A y φ están dadas por la (6.44) y también conocemos la solución general de la (6.48) en los tres casos que ya estudiamos, esto es oscilaciones amortiguadas, amortiguamiento fuerte y amortiguamiento crítico. De este modo podemos encontrar las soluciones de la (6.47) para cualquier tipo de condiciones iniciales y estudiar, por ejemplo, las características del transitorio que tiene lugar antes que el sistema llegue al régimen estacionario (6.32), (6.44). A continuación vamos a estudiar algunos casos de interés.

Excitación de la resonancia

Veamos qué pasa cuando un oscilador que está en reposo comienza a ser excitado en $t = 0$ por una fuerza cuya frecuencia está en resonancia con la frecuencia de las oscilaciones libres. Antes de examinar la solución exacta del problema consideremos el comienzo del proceso. Despreciando la disipación porque la amplitud es pequeña al comienzo, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad , \quad (t > 0) \quad (6.49)$$

Supondremos entonces que la solución es del tipo

$$x = a(t) \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad a(t) = \alpha t + 0(t^2) \approx \alpha t \quad (6.50)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x &= \alpha t \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} &= -\omega \alpha t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \alpha \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 \alpha t \cos(\omega t + \varphi) - 2\omega \alpha \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Sustituyendo en la (6.49) obtenemos

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \alpha t \cos(\omega t + \varphi) + 2\omega \alpha \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = f \cos \omega t \quad (6.52)$$

Si $\omega = \omega_0$ esta ecuación se reduce a

$$2\omega_0 \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) = f \cos \omega_0 t \quad (6.53)$$

³ Esto vale solamente si las ecuaciones son lineales.

que se satisface si

$$\varphi = -\pi/2 \quad , \quad \alpha = f/2\omega_0 \quad (6.54)$$

La amplitud de las oscilaciones crece pues linealmente con el tiempo:

$$x = \frac{ft}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{ft}{2\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) \quad (6.55)$$

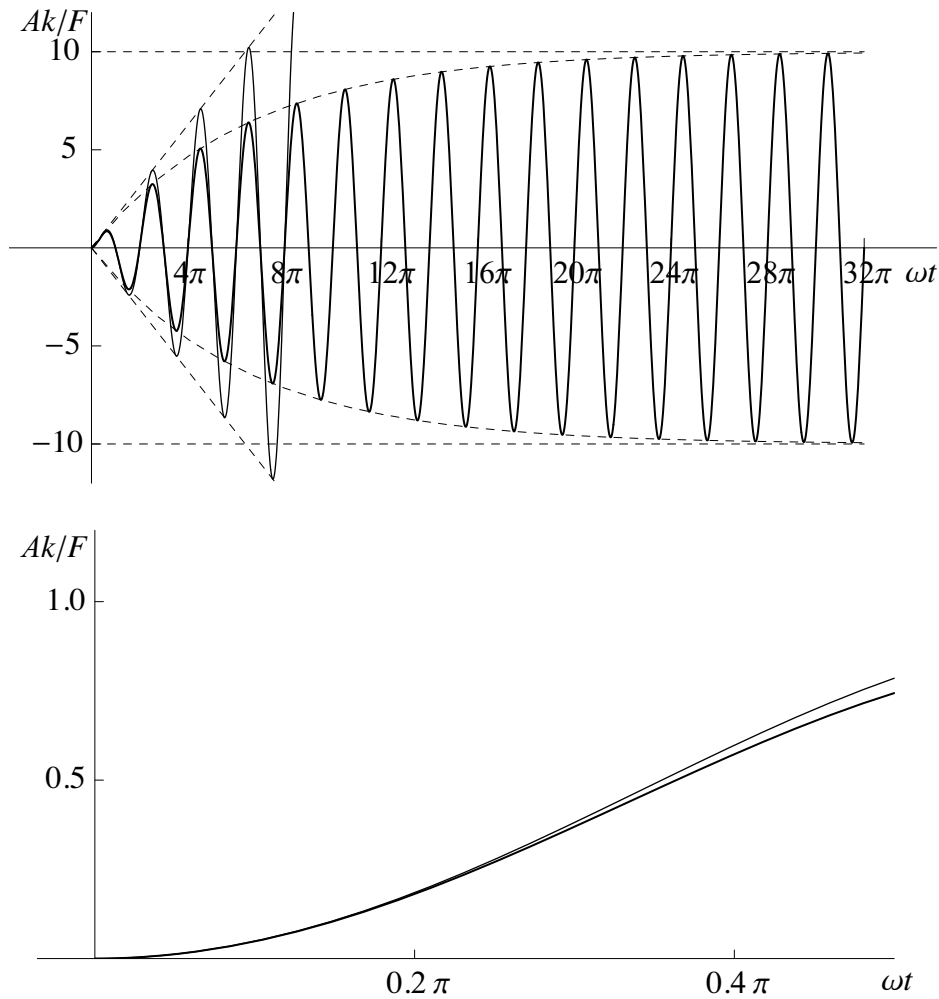


Fig. 6.8. Excitación de la resonancia. Se muestran la solución exacta (6.58) y la solución aproximada (6.55). Las curvas han sido dibujadas para $c = 0.1$ y $f = 1$.

Notar que la (6.55) es una solución *exacta* de la ecuación⁴ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega_0 t$, pero en el presente contexto es una solución *aproximada* de la (6.47) y vale mientras se pueda despreciar la disipación, esto es, siempre que

$$ft/2\omega \ll A = f/c\omega \quad (6.56)$$

o sea para

$$t \ll 2/c = 1/\gamma \quad (6.57)$$

⁴ Esta ecuación fue estudiada por Euler en 1739.

Es fácil verificar que la solución *exacta* de la (6.47) que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ es

$$x = \frac{f}{c\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{f}{c\omega'} e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega' t) \quad , \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad , \quad \gamma = \frac{c}{2} \quad (6.58)$$

Luego el movimiento es una superposición de la solución estacionaria más una oscilación amortiguada⁵ del tipo (6.18). La oscilación amortiguada tiende a cero exponencialmente en el tiempo $t_a = 1/\gamma$. En la Fig. 6.8 se muestran la solución aproximada (6.55) y la solución exacta (6.58).

Fuerza constante aplicada súbitamente

Veamos qué pasa si se aplica de repente una fuerza constante F a un oscilador en reposo. Esto ocurre cuando se carga el platillo de una balanza de resorte, o cuando varía bruscamente la magnitud que estamos midiendo con un instrumento de aguja. Sea $t = 0$ el instante en que se aplica la fuerza. Queremos conocer el transitorio hasta que se alcanza el régimen estacionario que como sabemos es una elongación constante de magnitud $A = F/k = f/\omega_0^2$.

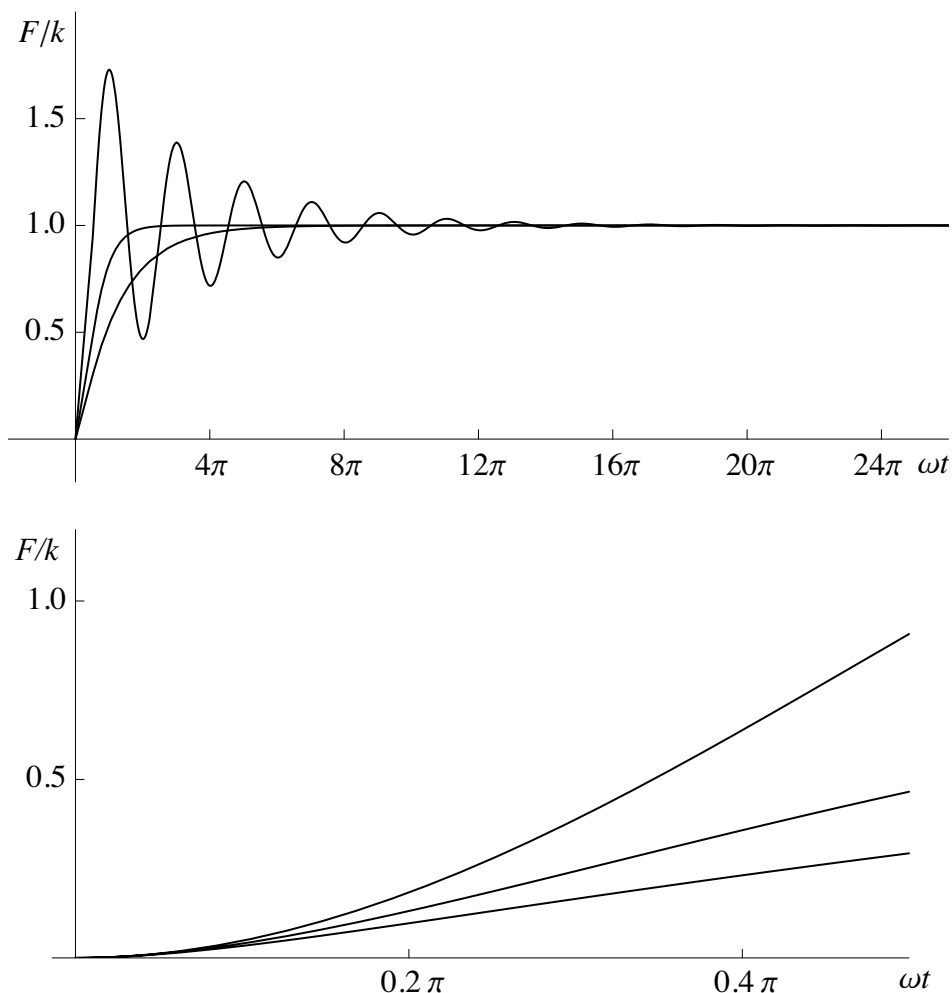


Fig. 6.9. Transitorio de un oscilador cuando se aplica una fuerza constante. Se puede ver que el régimen estacionario se alcanza más rápidamente si el amortiguamiento es crítico.

⁵ Sólo tenemos que considerar soluciones oscilatorias amortiguadas de la ecuación homogénea ya que si el amortiguamiento es fuerte no puede haber resonancia.

Aquí tenemos que considerar tres casos según si la solución de la ecuación homogénea es oscilatoria amortiguada, fuertemente amortiguada o con amortiguamiento crítico. En el primer caso la solución *exacta* de la (6.47) que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ es

$$x = \frac{f}{\omega_0^2} [1 - ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi)] \quad , \quad a = \omega_0 / \omega' \quad , \quad \varphi = -\arctan(\gamma / \omega') \quad (6.59)$$

donde γ y ω' están definidos por la (6.58). Si el amortiguamiento es fuerte la solución exacta es

$$x = \frac{f}{\omega_0^2} [1 - e^{-\gamma t} (ae^{\beta t} + be^{-\beta t})] \quad , \quad a = \frac{\beta + \gamma}{2\beta} \quad , \quad b = \frac{\beta - \gamma}{2\beta} \quad (6.60)$$

con $\beta = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. Si el amortiguamiento es crítico ($c = 2\omega_0$) la solución exacta es

$$x = \frac{f}{\omega_0^2} [1 - e^{-\gamma t} (1 + \gamma t)] \quad , \quad \gamma = \omega_0 \quad (6.61)$$

Las tres soluciones se aprecian en la Fig. 6.9, donde se ve que la solución con amortiguamiento crítico es la que tiende más rápidamente al régimen estacionario. Por eso las balanzas y los instrumentos de aguja trabajan en condiciones de amortiguamiento crítico.

Fuerza impulsiva

Consideremos un oscilador en reposo al que se le aplica una fuerza F muy grande durante un intervalo δt muy corto, como ocurre cuando una rueda de un automóvil impacta en un bache del pavimento. Vamos a suponer que $F \rightarrow \infty$ y $\delta t \rightarrow 0$ de modo tal que el impulso $F\delta t$ que recibe la rueda tiene un valor finito. Sea $t = 0$ el instante en que se aplica la fuerza. Las condiciones iniciales del problema son entonces $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V$, donde x es el desplazamiento de la rueda desde su posición de equilibrio y $V = F\delta t / m$ la velocidad que adquiere de resultas del impacto. Queremos conocer la respuesta de la suspensión de la rueda, que como sabemos consiste de un resorte y un amortiguador. Si el sistema es débilmente amortiguado la solución *exacta* de la (6.47) que satisface las condiciones iniciales es

$$x = e^{-\gamma t} V \frac{\text{sen}(\omega' t)}{\omega'} \quad (6.62)$$

donde γ y ω' están definidos por la (6.58). Si el amortiguamiento es fuerte la solución exacta es

$$x = e^{-\gamma t} V \frac{\text{senh}(\beta t)}{\beta} \quad (6.63)$$

donde $\beta = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. Finalmente la solución exacta para el caso de amortiguamiento crítico ($c = 2\omega_0$) es

$$x = e^{-\gamma t} V t \quad , \quad \gamma = \omega_0 \quad (6.64)$$

Las tres soluciones se muestran en la Fig. 6.10, donde se ve que la solución con amortiguamiento crítico es la que se anula más rápidamente. Por ese motivo la suspensión de un automóvil trabaja en condiciones de amortiguamiento crítico.

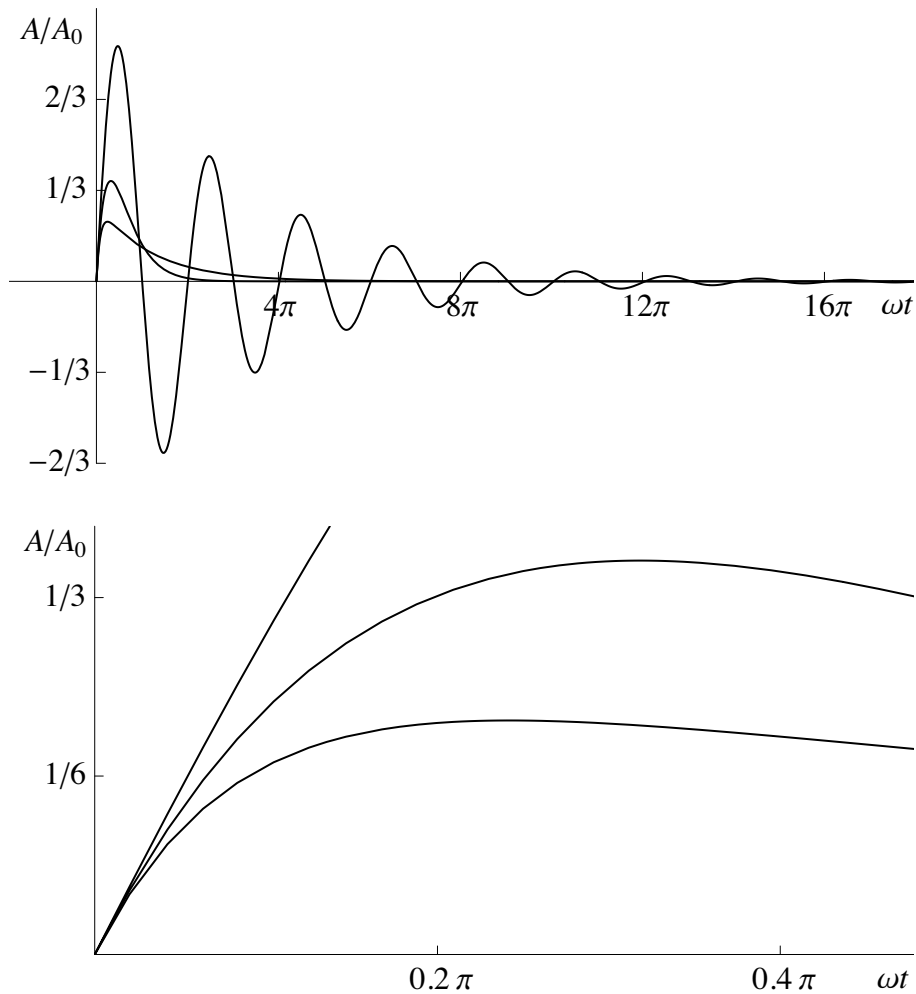


Fig. 6.10. El transitorio de un oscilador cuando se aplica una fuerza impulsiva en $t = 0$. Se puede apreciar que la perturbación se anula más rápidamente en condiciones de amortiguamiento crítico.

Oscilaciones anarmónicas

Cerca de un punto de equilibrio (que supondremos es $x = 0$) del sistema la energía potencial $V(x)$ se puede aproximar por medio de la energía potencial (6.2) de un oscilador armónico. Luego si la amplitud es pequeña las oscilaciones son armónicas. Pero para amplitudes mayores hay que tomar en cuenta los términos siguientes del desarrollo en serie de la fuerza:

$$F = \frac{dV}{dx} = -kx + qx^2 + \dots \quad (6.65)$$

Veamos las modificaciones debidas a los primeros términos. Conservando solamente la primera corrección qx^2 , la ecuación de Newton es

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha x^2 \quad (6.66)$$

Aquí $\omega^2 = k/m$ y $\alpha = q/m$. Esta es una ecuación no lineal y su tratamiento no es tan sencillo como el de las ecuaciones lineales que consideramos hasta ahora. Sin embargo si el término no lineal αx^2 es pequeño se puede emplear una técnica simple y muy útil llamada *método de pequeñas perturbaciones*. Con este fin escribimos la (6.66) en la forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha x^2 \quad (6.67)$$

Vamos a suponer que αx^2 es una pequeña corrección, de modo que $\ddot{x} + \omega^2 x \approx 0$. La idea básica del método de pequeñas perturbaciones es aprovechar esta circunstancia para escribir

$$x = x_0 + x_1 \quad (6.68)$$

donde $x_0 = a \cos(\omega t + \varphi)$ es solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ y x_1 es una pequeña corrección. Luego

$$\dot{x} = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{x}_1, \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \ddot{x}_1 \quad (6.69)$$

Sustituyendo en la ecuación de Newton y despreciando cantidades de orden superior al primero (como αx_1 y αx_1^2) resulta

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \alpha x_0^2 = \alpha a^2 \cos^2 \omega t \quad (6.70)$$

Usando la fórmula trigonométrica

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) \quad (6.71)$$

la (6.70) se escribe como

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\alpha a^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) \quad (6.72)$$

Esta ecuación describe una oscilación forzada por una fuerza constante que proviene del primer término del miembro derecho, más una fuerza que oscila con la frecuencia 2ω . Podemos entonces aprovechar los resultados anteriores y escribir el resultado:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + A_1 \cos 2\omega t \quad (6.73)$$

El primer término del miembro derecho describe las oscilaciones libres de x_1 y lo podemos suponer nulo pues sólo cambia la amplitud de x_0 . El segundo modifica la *posición media*, que no coincide con la posición de equilibrio $x = 0$. El tercero describe la oscilación forzada de frecuencia 2ω , y usando la (6.39) tenemos que

$$A_1 = \frac{f}{(2\omega)^2 \omega^2} = \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \quad (6.74)$$

La solución es entonces

$$x = x_0 + x_1 = a \cos \omega t + \frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t \quad (6.75)$$

se trata pues de oscilaciones, pero no armónicas. La Fig. 6.11 muestra la solución (6.75) y con líneas de trazos los tres términos de la misma. El efecto del término qx^2 en la fuerza es introducir una *anarmonicidad* en la oscilación, que consiste en la aparición, además de la frecuencia fundamental ω , de la segunda armónica 2ω . Como veremos, los términos de orden más alto en la

fuerza (proporcionales a x^3, x^4, \dots) dan lugar a la aparición de la tercera armónica (3ω), la cuarta (4ω), etc., así como otros efectos.

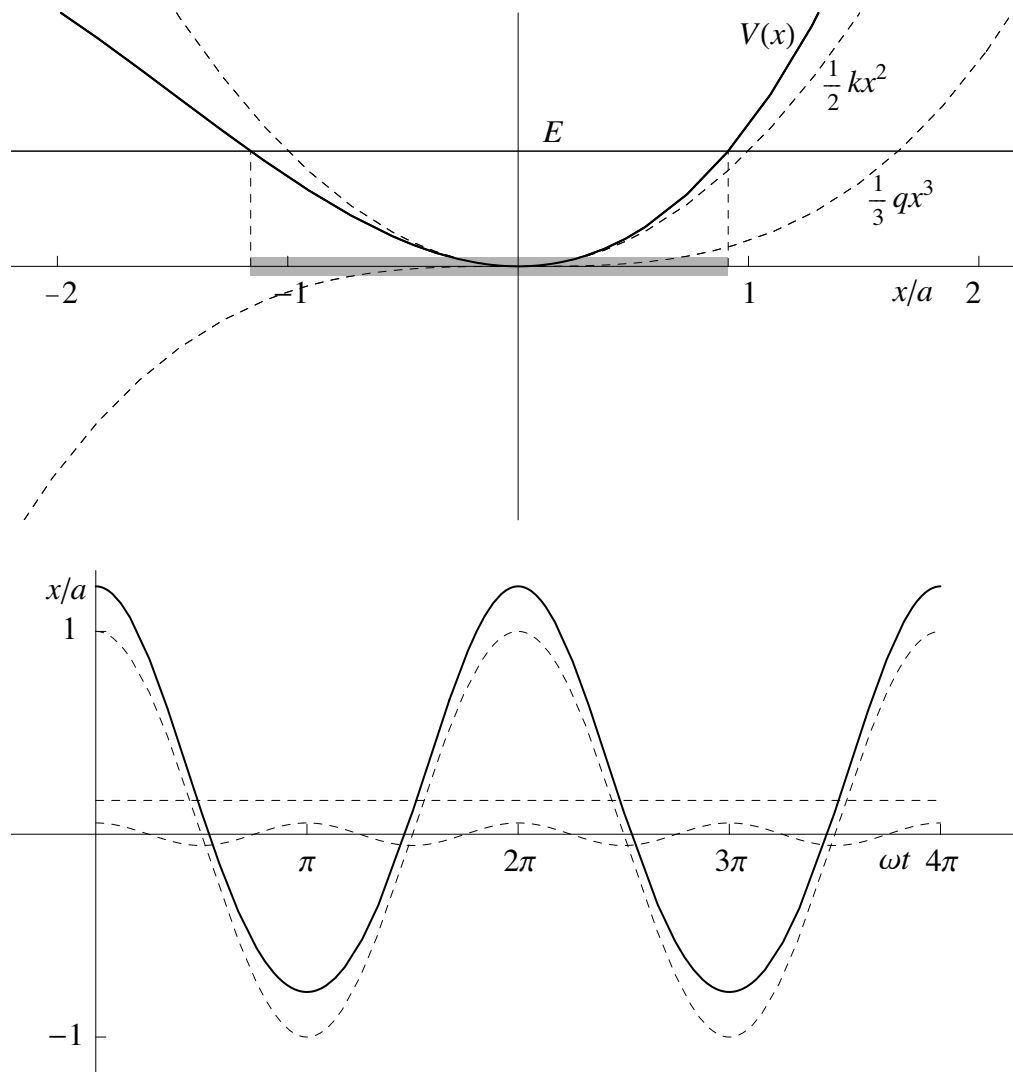


Fig. 6.11. Oscilaciones anarmónicas. Con líneas de trazos finos se muestran los tres términos de la (6.75).

Oscilaciones de un péndulo

Una masa m suspendida de un hilo inextensible de longitud ℓ y masa despreciable puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio (Fig. 6.12). La trayectoria de la masa es un arco de circunferencia de radio ℓ . Si s es el arco medido desde la posición de equilibrio tendremos que

$$s = \ell\alpha \quad \dot{s} = \ell\dot{\alpha} \quad \ddot{s} = \ell\ddot{\alpha} \quad (6.76)$$

La fuerza de restitución es la componente tangencial a la trayectoria del peso, esto es

$$F_t = -mg \operatorname{sen} \alpha \quad (6.77)$$

La energía potencial es

$$V = mgh = mg\ell(1 - \cos \alpha) \quad (6.78)$$

La ecuación del movimiento es entonces $m\ddot{s} = F_t$, esto es

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{\ell} \sin \alpha \quad (6.79)$$

En esta ecuación no aparece la masa, luego el periodo de las oscilaciones del péndulo no depende de su masa. La ecuación (6.79) no es lineal y no se puede resolver en términos de funciones elementales. Dejaremos para más adelante su estudio detallado y trataremos ahora las oscilaciones de *pequeña amplitud* para las cuales es fácil obtener soluciones aproximadas.

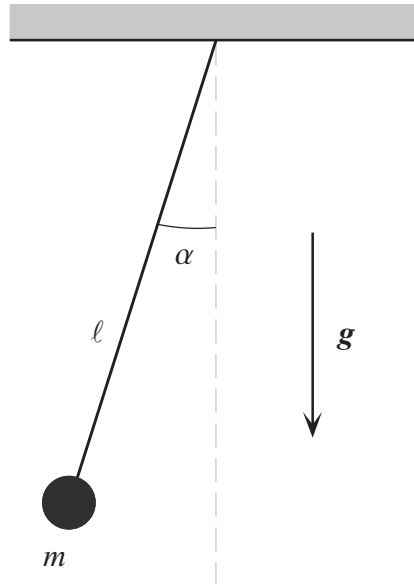


Fig. 6.12. Un péndulo consiste de una masa m suspendida de un hilo inextensible de longitud ℓ y masa despreciable, que puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio.

Oscilaciones de amplitud infinitesimal

Recordando que

$$\sin \alpha \cong \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots \quad (6.80)$$

vemos que si $\alpha \ll 1$ se puede poner $\sin \alpha \approx \alpha$, luego para oscilaciones de pequeña amplitud

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{\ell} \alpha \quad (6.81)$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{g/\ell}$ y período $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Por lo tanto el período no depende de la amplitud (siempre que ésta sea *pequeña*).

Oscilaciones de amplitud pequeña pero no infinitesimal

Si α es pequeño pero no despreciable se puede intentar una primera corrección al resultado anterior tomando en consideración el término siguiente de la serie (6.80). Pondremos entonces

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 \quad (6.82)$$

con lo cual la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2\left(\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3\right) \quad (6.83)$$

Trataremos de resolver la (6.83) usando el método perturbativo. Para eso escribimos la ecuación de movimiento en la forma

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = a\alpha^3 \quad , \quad a = \omega^2/6 \quad (6.84)$$

y consideraremos $a\alpha^3$ como una pequeña perturbación. Suponemos entonces que

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t + \alpha_1 \quad (6.85)$$

donde $\alpha_0 \cos(\omega t)$ es solución de la (6.79) y α_1 es una pequeña corrección. Entonces

$$\dot{\alpha} = -\omega \alpha_0 \sin \omega t + \dot{\alpha}_1 \quad , \quad \ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha_0 \cos \omega t + \ddot{\alpha}_1 \quad (6.86)$$

y sustituyendo en la (6.84) obtenemos

$$\ddot{\alpha}_1 - \omega^2 \alpha_1 = a\alpha_0^3 \cos^3 \omega t \quad (6.87)$$

donde hemos omitido términos de orden superior en las cantidades pequeñas. Ahora bien

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \quad (6.88)$$

de donde resulta que la ecuación para α_1 es

$$\ddot{\alpha}_1 - \omega^2 \alpha_1 = \frac{3}{4} a\alpha_0^3 \cos \omega t + \frac{1}{4} a\alpha_0^3 \cos 3\omega t \quad (6.89)$$

Surge aquí un problema ya que en la (6.89) figura el término $(3/4)a\alpha_0^3 \cos \omega t$ que está en resonancia⁶ con la frecuencia ω . Como un sistema excitado en resonancia oscila con una amplitud *grande*, la (6.89) contradice nuestra hipótesis de que la perturbación α_1 es *pequeña*.

El método perturbativo que hemos planteado hasta aquí falla porque la aproximación de orden más bajo ($\alpha_0 \cos \omega t$) tiene un defecto y la forma de salir del paso es mejorarla. La pista para lograrlo proviene del experimento, que muestra que el período (y por lo tanto la frecuencia) del péndulo depende de la *amplitud* de las oscilaciones. Luego no basta con sumar la pequeña corrección α_1 , también hay que modificar (perturbar) la *frecuencia*. Pondremos entonces

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega' t + \alpha_1 \quad , \quad \omega' = \omega + \delta\omega \quad (6.90)$$

donde $\delta\omega$ es una pequeña corrección que vamos a determinar de modo que no aparezca el término secular en la ecuación para α_1 . De la (6.90) resulta

$$\dot{\alpha} = -\omega' \alpha_0 \sin \omega' t + \dot{\alpha}_1 \quad , \quad \ddot{\alpha} = -\omega'^2 \alpha_0 \cos \omega' t + \ddot{\alpha}_1 \quad (6.91)$$

Sustituyendo (6.90) y (6.91) en la (6.84) y puesto que $\omega'^2 \approx \omega^2 + 2\omega \delta\omega$, se obtiene

$$-2\omega\delta\omega\alpha_0 \cos \omega' t + \ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 = a\alpha_0^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega' t + \frac{1}{4} \cos 3\omega' t\right) \quad (6.92)$$

⁶ Términos de este tipo de denominan *seculares*.

Pedimos ahora que el término que contiene $\delta\omega$ cancele el término secular del miembro derecho. Para esto es preciso que

$$\delta\omega = -\omega \frac{\alpha_0^2}{16} \quad (6.93)$$

Con esta elección de $\delta\omega$ el término de la perturbación es solución de la ecuación

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 = \frac{\omega'^2 \alpha_0^3}{24} \cos 3\omega't \quad (6.94)$$

que describe un oscilador forzado en 3ª armónica y no contiene términos seculares, como debe ser. La amplitud de la oscilación forzada es

$$A_1 = \frac{\omega^2 \alpha_0^3 / 24}{(3\omega)^2 - \omega^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^3 \quad (6.95)$$

Luego el término correctivo es

$$\alpha_1 = A_1 \cos 3\omega't = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^3 \cos 3\omega't \quad (6.96)$$

El movimiento completo es, en esta aproximación (Fig. 6.13),

$$\alpha(t) = \left[\alpha_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^3 \right] \cos \omega't + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^3 \cos 3\omega't \quad (6.97)$$

donde el segundo término en el corchete se agregó para renormalizar la amplitud de la oscilación de frecuencia ω' , de modo que la elongación máxima sea α_0 . La frecuencia de la oscilación es

$$\omega' = \omega + \delta\omega = \omega \left[1 - \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^2 \right] \quad (6.98)$$

y el período $T' = 2\pi / \omega'$ es

$$T' = T \left[1 + \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^2 \right] = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^2 \right] \quad (6.99)$$

de modo que el período depende de la amplitud.

Es instructivo calcular de nuevo la corrección del período a partir de la ecuación de la energía

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + m g \ell (1 - \cos \alpha) = m g \ell (1 - \cos \alpha_0) = \text{cte.} \quad (6.100)$$

donde α_0 es la amplitud de la oscilación. De la (6.100) podemos despejar

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)} \quad (6.101)$$

o sea

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}} \quad (6.102)$$

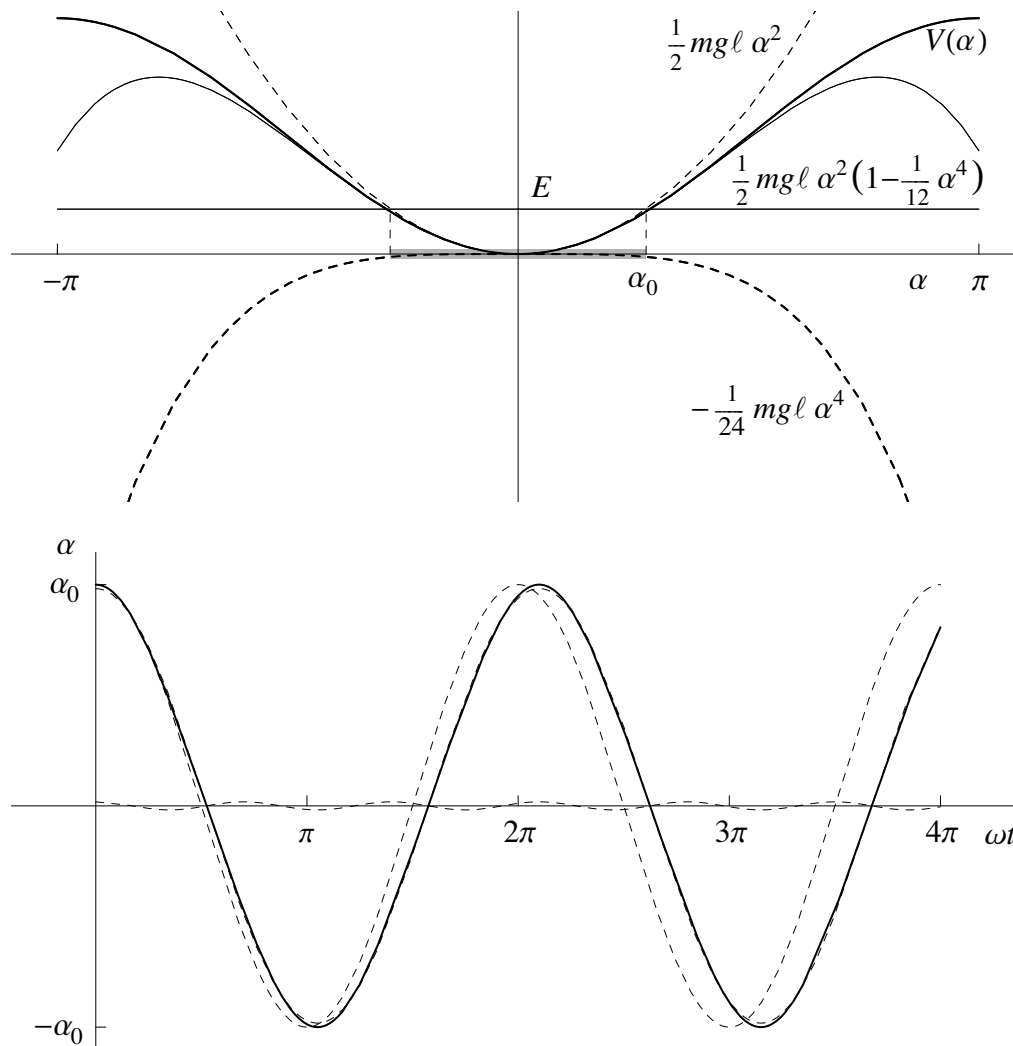


Fig. 6.13. Oscilaciones del péndulo de amplitud pequeña pero finita. Con líneas de trazos finos se muestran los dos términos de la (6.97).

Integrando la (6.102) en un cuarto de período obtenemos

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \mathcal{T}(\alpha_0) \quad , \quad \mathcal{T}(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}} \quad (6.103)$$

La función $\mathcal{T}(\alpha_0)$ se puede expresar en términos de la *integral elíptica de primera especie*, una función especial cuyas propiedades se encuentran en los tratados. Sin embargo si α_0 es pequeño se puede calcular fácilmente una expresión aproximada de $\mathcal{T}(\alpha_0)$, válida a menos de términos del orden de α_0^4 y superiores. Para eso partimos de la serie del coseno

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \quad (6.104)$$

y escribimos el radicando de la (6.103) hasta el orden 4 en α y α_0 :

$$\cos \alpha - \cos \alpha_0 \cong \frac{\alpha_0^2 - \alpha^2}{2} - \frac{\alpha_0^4 - \alpha^4}{24} = \frac{\alpha_0^2}{2} (1 - \xi^2) \left[1 - \frac{\alpha_0^2}{12} (1 + \xi^2) \right] \quad (6.105)$$

donde en el último paso hemos introducido la variable $\xi = \alpha / \alpha_0$. Por lo tanto, recordando que $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ si $x \ll 1$ y que $(1-z)^{-1} \approx 1+z$ para $z \ll 1$, resulta

$$T(\alpha_0) \approx \sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\alpha_0^2(1+\xi^2)/12}} \cong T_0 + \alpha_0^2 T_2 \quad (6.106)$$

Aquí

$$T_0 = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (6.107)$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{2}}{24} \int_0^1 (1+\xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{24\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{24} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Si α_0^2 es muy pequeño $\alpha_0^2 T_2$ es despreciable y queda

$$T \cong 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (6.108)$$

que es el resultado que obtuvimos para las oscilaciones de amplitud infinitesimal. Si α_0 es pequeño pero no infinitesimal hay que calcular la última integral que queda en T_2 . Es fácil ver que

$$\int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{4} \quad (6.109)$$

Luego

$$T_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \quad (6.110)$$

y resulta finalmente

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_0}{4} \right)^2 \right] \quad (6.111)$$

que reproduce el resultado anterior (6.99).

Modos lineales normales de osciladores acoplados

Muchos sistemas físicos pueden llevar a cabo movimientos oscilatorios. Debido a sus interacciones, un sistema que oscila puede influenciar otros sistemas e inducir oscilaciones en los mismos. Se dice entonces que los sistemas están *acoplados*. Por ejemplo si dos guitarras están afinadas y se pulsa una cuerda de una de ellas, la cuerda correspondiente de la otra guitarra se pone también a vibrar. Esto sucede porque las oscilaciones de frecuencia ω de la primera cuerda emiten ondas sonoras que son oscilaciones de la misma frecuencia de la presión del aire, las cuales al llegar a la segunda cuerda ejercen fuerzas oscilantes sobre la misma que la hacen vibrar a su vez. El acoplamiento entre osciladores ocurre a menudo y por lo tanto merece un estudio. El fenómeno no se presenta solamente entre los osciladores mecánicos como resortes, péndulos, etc., sino que aparece también en acústica (como en el ejemplo anterior), en los circuitos eléctricos y en muchas otras situaciones. Los mecanismos que dan lugar al acoplamiento son por lo tanto de diferente especie según el caso. Sin embargo los aspectos esenciales del fenómeno son los mismos y los vamos a poner en evidencia considerando un caso particular que servirá de modelo para todos. Por el momento trataremos el caso más simple que es el de dos osciladores lineales acoplados linealmente, dejando para más adelante el estudio de oscilaciones no lineales y acoplamientos no lineales que es mucho más complicado.

Sea el sistema de la Fig. 6.14, que consiste de dos masas m_1 y m_2 movidas por sendos resortes cuyas constantes son k_1 y k_2 , respectivamente. Estos son nuestros osciladores, cuyas oscilaciones libres tienen las frecuencias $\omega_1 = (k_1/m_1)^{1/2}$ y $\omega_2 = (k_2/m_2)^{1/2}$. El acoplamiento está provisto por el tercer resorte, cuya constante es k . Por el momento no vamos a hacer ninguna hipótesis acerca de las magnitudes de los parámetros m_1 , m_2 , k_1 , k_2 y k .

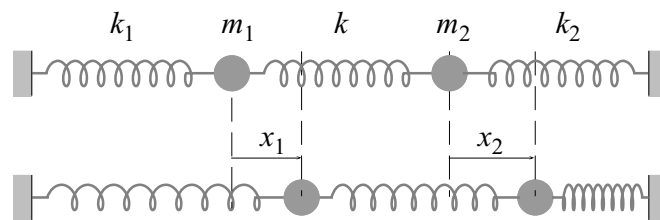


Fig. 6.14. Dos osciladores acoplados: arriba, en la posición de equilibrio; abajo, desplazados.

Supongamos que el sistema está en reposo y en $t = 0$ la masa m_1 se pone en movimiento porque le dimos un golpe. Debido al resorte 1, m_1 tiende a oscilar, pero no con la frecuencia ω_1 pues al moverse cambia la longitud del resorte de acoplamiento, el cual entonces ejerce una fuerza sobre m_1 y una reacción igual y contraria sobre m_2 . De resultas de esto m_2 se pone también en movimiento, lo que afecta el movimiento de m_1 debido al resorte de acoplamiento. Los movimientos de las dos masas se influyen mutuamente y para averiguar lo que pasa es preciso resolver simultáneamente las ecuaciones del movimiento de ambas.

Si x_1 y x_2 son los desplazamientos de m_1 y m_2 desde sus posiciones de equilibrio, las ecuaciones del movimiento de las dos masas son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (6.112)$$

Tenemos entonces que resolver dos ecuaciones acopladas para los dos grados de libertad del sistema. Para hacer esto conviene escribir las (6.112) en la forma matricial equivalente

$$\begin{pmatrix} m_1 \frac{d^2}{dt^2} + k_1 + k & -k \\ -k & m_2 \frac{d^2}{dt^2} + k_2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.113)$$

Esto implica imaginar que x_1 y x_2 son las dos componentes de un *vector* en el *espacio de configuraciones* del sistema, que tiene dos dimensiones puesto que tenemos dos grados de libertad. En este espacio vamos a definir el producto escalar de dos vectores

$$Y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Z \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (6.114)$$

como

$$Y \cdot Z \equiv (y_1, y_2) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = y_1 z_1 m_1 + y_2 z_2 m_2 \quad (6.115)$$

Las (6.112) (o las (6.113)) muestran que el movimiento de cada una de las masas es una oscilación forzada por el movimiento de la otra. Esto hace pensar que las oscilaciones tendrán una frecuencia ω que no es ni ω_1 ni ω_2 y que no conocemos sino que hay que determinar a partir las ecuaciones del movimiento. Luego vamos a suponer que la solución tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \omega t \\ B \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad A, B = \text{cte.} \quad (6.116)$$

Sustituyendo la (6.116) en (6.113) y usando que $k_1 = m_1 \omega_1^2$ y $k_2 = m_2 \omega_2^2$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} m_1(\omega_1^2 - \omega^2) + k & -k \\ -k & m_2(\omega_2^2 - \omega^2) + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (6.117)$$

Este es un sistema de ecuaciones *lineales homogéneas* para A, B . La condición necesaria y suficiente para que tenga soluciones no triviales es que sea nulo el determinante de la matriz de los coeficientes. Esto nos da

$$[m_1(\omega_1^2 - \omega^2) + k][m_2(\omega_2^2 - \omega^2) + k] - k^2 = 0 \quad (6.118)$$

La (6.118) es una ecuación bicuadrática que determina ω . Para escribirla mejor introducimos la masa total $M = m_1 + m_2$, la cantidad $K = k_1 + k_2$ y los parámetros

$$\omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad \omega_M^2 = \frac{K}{M} \quad (6.119)$$

Aquí μ es la *masa reducida* del sistema m_1, m_2 . Usando las (6.119) la (6.118) se escribe como

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_\mu^2) + \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_\mu^2\omega_M^2 = 0 \quad (6.120)$$

Llamando $p = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_\mu^2)/2$ y $q = \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_\mu^2\omega_M^2$, los dos pares de raíces de la (6.120) son

$$\omega_+^2 = p + d \quad , \quad \omega_-^2 = p - d \quad (6.121)$$

donde $d^2 = p^2 - q$.

Es fácil verificar que $d^2 \geq 0$, de modo que las cuatro raíces $\pm\omega_+$ y $\pm\omega_-$ son siempre reales. Esto es consecuencia de que la matriz (6.117) es simétrica, hecho que a su vez deriva de que el término de acoplamiento $k(x_2 - x_1)$ aparece con signo opuesto en las ecuaciones de movimiento de x_1 y x_2 de resultas de la Tercera Ley. Considerando solamente las frecuencias positivas tenemos entonces dos posibles modos de oscilación de la forma (6.116), a saber:

$$X_+ = \begin{pmatrix} A_+ \cos \omega_+ t \\ B_+ \cos \omega_+ t \end{pmatrix} \quad , \quad X_- = \begin{pmatrix} A_- \cos \omega_- t \\ B_- \cos \omega_- t \end{pmatrix} \quad (6.122)$$

La relación entre A_+ y B_+ se obtiene de la primera o de la segunda de las (6.117) como

$$kB_+ = [k + m_1(\omega_1^2 - \omega_+^2)]A_+ \quad \text{ó} \quad kA_+ = [k + m_2(\omega_2^2 - \omega_+^2)]B_+ \quad (6.123)$$

Del mismo modo se obtiene la relación entre A_- y B_- :

$$kB_- = [k + m_1(\omega_1^2 - \omega_-^2)]A_- \quad \text{ó} \quad kA_- = [k + m_2(\omega_2^2 - \omega_-^2)]B_- \quad (6.124)$$

Los modos X_+ y X_- se llaman *modos normales* o *modos propios* del sistema y las frecuencias ω_+ y ω_- son las *frecuencias propias* o *autofrecuencias*. Cada modo normal se puede pensar como un *oscilador independiente* en el espacio de configuraciones del sistema, porque su movimiento está *desacoplado* del otro modo normal. Por eso cada modo normal *conserva* su energía mecánica. Por otra parte tanto X_+ como X_- describen movimientos que involucran simultáneamente a m_1 y m_2 .

Toda solución X de la (6.113) es una combinación lineal de X_+ y X_- , esto es

$$X = a_+ X_+ + a_- X_- \quad , \quad a_+, a_- = \text{cte.} \quad (6.125)$$

De esta forma hemos encontrado la solución general del problema (6.113). Las amplitudes a_+ , a_- de la (6.125) dependen de las condiciones iniciales de cada caso. Es interesante notar que los modos X_+ y X_- son linealmente independientes (por eso cualquier vector X del espacio de configuraciones se puede expresar en la forma (6.125)) y también (con la definición (6.115) del producto escalar) son ortogonales. En efecto, no es difícil verificar que

$$X_+ \cdot X_- \equiv (A_+, B_+) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} = 0 \quad (6.126)$$

Pasemos a considerar ahora algunos casos particulares.

Acoplamiento débil

Si $k \ll k_1, k_2$ la (6.120) se puede escribir como

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = \omega_\mu^2(\omega^2 - \omega_M^2) \quad (6.127)$$

donde el miembro derecho es una cantidad pequeña (ya que $\omega_\mu^2 \sim k$). Si los osciladores están completamente desacoplados ($k = 0$) obtenemos un resultado trivial: las oscilaciones de m_1 y las de m_2 son independientes y coinciden con los modos propios. Supongamos ahora que k es pequeño pero no nulo. Aquí tenemos que tratar por separado los casos $\omega_1 = \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$. Dejamos el primer caso para más adelante. Si $\omega_1 \neq \omega_2$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\omega_1 < \omega_2$; entonces tendremos que

$$\omega_-^2 = \omega_1^2 + \delta_-^{(1)} + \delta_-^{(2)} + \dots, \quad \omega_+^2 = \omega_2^2 + \delta_+^{(1)} + \delta_+^{(2)} + \dots \quad (6.128)$$

donde $\delta_\pm^{(1)}, \delta_\pm^{(2)}, \dots$ son cantidades pequeñas del orden de k, k^2, \dots , respectivamente (hay que calcular las frecuencias de los modos normales hasta el orden k^2 para obtener A_\pm y B_\pm al orden k). Sustituyendo (6.128) en (6.127) e igualando términos del mismo orden en k obtenemos

$$\delta_-^{(1)} = \omega_\mu^2 \frac{\omega_1^2 - \omega_M^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \frac{k}{m_1}, \quad \delta_-^{(2)} = \delta_-^{(1)} \frac{\omega_\mu^2 - \delta_-^{(1)}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \frac{k^2}{m_1 m_2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (6.129)$$

y

$$\delta_+^{(1)} = \omega_\mu^2 \frac{\omega_2^2 - \omega_M^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{k}{m_2}, \quad \delta_+^{(2)} = \delta_+^{(1)} \frac{\omega_\mu^2 - \delta_+^{(1)}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{k^2}{m_1 m_2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (6.130)$$

y por consiguiente hasta el orden de k tenemos que las frecuencias de los modos propios son

$$\omega_- = \omega_1 \left(1 + \frac{k}{2m_1} \right) \quad \text{y} \quad \omega_+ = \omega_2 \left(1 + \frac{k}{2m_2} \right) \quad (6.131)$$

Introduciendo ahora las (6.128), (6.129) y (6.130) en las (6.123) y (6.124) obtenemos

$$B_- = \frac{k}{m_2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} A_- \quad \text{y} \quad A_+ = -\frac{k}{m_1} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} B_+ \quad (6.132)$$

Luego los modos normales (normalizados a menos de términos del orden de k^2 son de la forma

$$X_- = C_- \cos \omega_- t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{m_2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{pmatrix}, \quad X_+ = C_+ \cos \omega_+ t \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_1} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.133)$$

donde C_- y C_+ son constantes. Los resultados (6.131), (6.133) son razonables. El modo X_- es esencialmente una oscilación de m_1 pues la amplitud de la oscilación de m_2 es muy pequeña (del orden de k) o sea que m_2 está casi quieta. La frecuencia ω_- es mayor que ω_1 ya que m_1 se mueve bajo la acción de los resortes k_1 y k , que en la práctica equivalen (para este modo) a un único resorte de constante $k_1 + k$. En cuanto al movimiento de m_2 , comparando la expresión de

B_- con la fórmula (6.38) de la amplitud de una oscilación forzada vemos que es la que resulta si la fuerza excitadora es $F(t) = A_- k \cos(\omega_1 t)$, que es justamente la fuerza que el resorte de acoplamiento ejerce sobre m_2 debido al estiramiento que sufre debido al movimiento de m_1 ; el signo + se debe a que como $\omega_- < \omega_2$ la masa m_2 oscila en fase con $F(t)$. De manera análoga se puede interpretar el modo X_+ ; en este caso los roles de las masas y sus respectivos resortes se invierten: el movimiento es esencialmente una oscilación de m_2 bajo la acción de un único resorte de constante $k_2 + k$ ya que la amplitud de la oscilación de m_1 es del orden de k ; el movimiento de m_1 es una oscilación forzada por la fuerza $F'(t) = B_+ k \cos(\omega_2 t)$ que el resorte de acoplamiento ejerce sobre m_1 debido al estiramiento que sufre por el movimiento de m_2 ; el signo - se debe a que la masa m_1 oscila en contrafase respecto de $F'(t)$ porque $\omega_+ > \omega_1$.

Acoplamiento fuerte

Ahora k es del mismo orden que k_1 y k_2 . Para evitar fórmulas engorrosas supongamos que $k = k_1 = k_2$ de modo que

$$\omega_\mu^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad , \quad \omega_\mu^2 \omega_M^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 \quad (6.134)$$

con lo cual la (6.120) se reduce a

$$\omega^4 - 2\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 3\omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \quad (6.135)$$

de donde obtenemos las frecuencias de los modos propios como

$$\omega_\pm^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 3\omega_1^2 \omega_2^2} \quad , \quad \omega_\pm^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 3\omega_1^2 \omega_2^2} \quad (6.136)$$

Conviene introducir la frecuencia reducida $\omega_r = (k/M)^{1/2}$ ($M = m_1 + m_2$); además sin perder generalidad podemos suponer que $m_1 \leq m_2$ y escribir $m_1 = Mz$, $m_2 = M(1-z)$ con $0 < z \leq 1/2$. Entonces $\omega_1^2 = \omega_r^2/z$, $\omega_2^2 = \omega_r^2/(1-z)$, y las (6.136) se escriben como

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_r^2}{z(1-z)}(1 \pm q) \quad , \quad q = \sqrt{1 - 3z + 3z^2} \quad (6.137)$$

donde q es una función decreciente de z que varía de 1 para $z = 0$ a $1/2$ para $z = 1/2$; para $z \ll 1$, $q \cong 1 - 3z/2$. En la Fig. 6.15 se muestran ω_+ y ω_- . En particular se tiene

$$\begin{aligned} \omega_-^2(z=0) &= \frac{3}{2}\omega_r^2 \quad , \quad \omega_-^2(z=1/2) = 2\omega_r^2 = \omega_1^2(z=1/2) = \omega_2^2(z=1/2) \\ \omega_+^2(z=0) &= \infty \quad , \quad \omega_+^2(z=1/2) = 6\omega_r^2 = 3\omega_1^2(z=1/2) = 3\omega_2^2(z=1/2) \end{aligned} \quad (6.138)$$

Introduciendo las (6.136) en las (6.123) y (6.124) resulta

$$\begin{aligned} B_- &= \left(2 - \frac{\omega_-^2}{\omega_1^2}\right) A_- = \frac{1+q-2z}{1-z} A_- \\ A_+ &= \left(2 - \frac{\omega_+^2}{\omega_2^2}\right) B_+ = -\frac{1+q-2z}{z} B_+ \end{aligned} \quad (6.139)$$

La cantidad $1 + q - 2z$ es siempre positiva y los modos normales son de la forma

$$X_- = C_- \cos \omega_- t \begin{pmatrix} 1 - z \\ 1 + q - 2z \end{pmatrix}, \quad X_+ = C_+ \cos \omega_+ t \begin{pmatrix} 1 + q - 2z \\ -z \end{pmatrix} \quad (6.140)$$

donde C_- y C_+ son constantes.

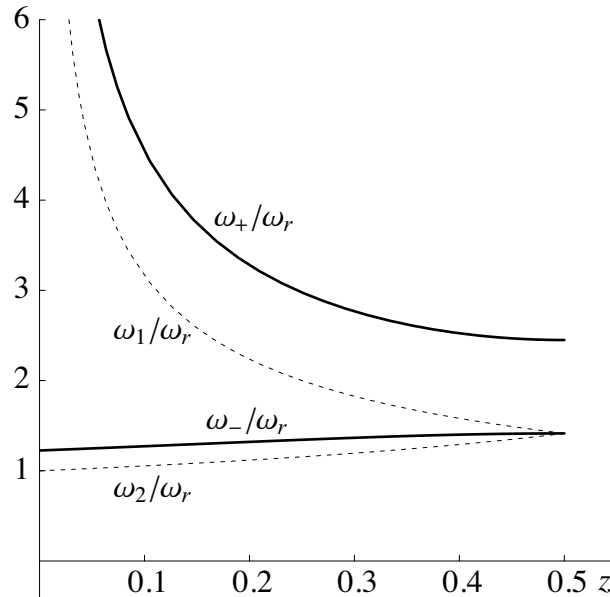


Fig. 6.15. Frecuencias de los modos propios para acoplamiento fuerte.

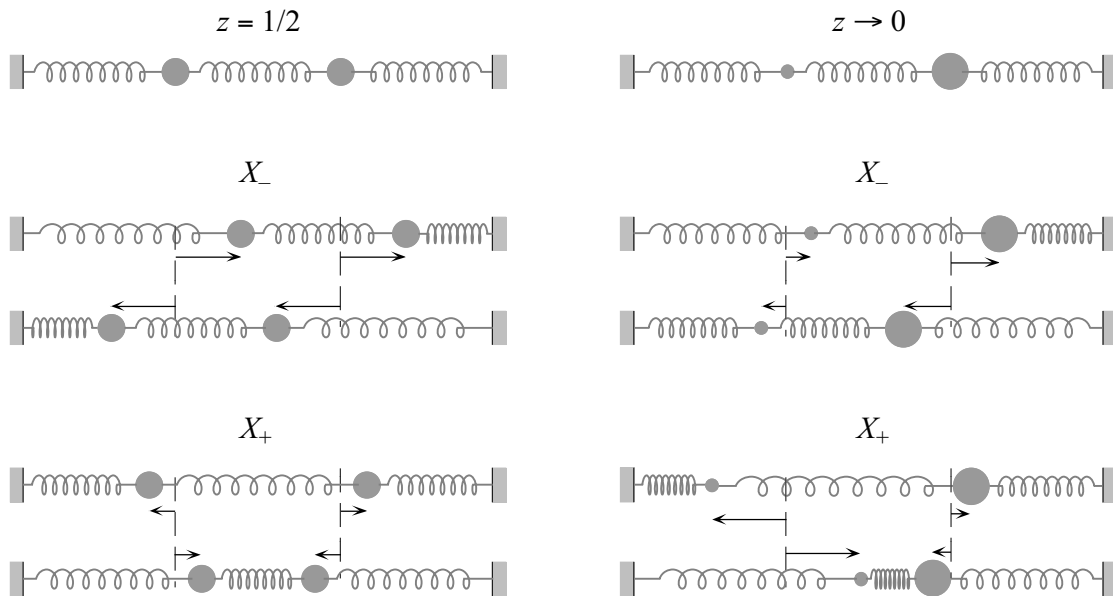


Fig. 6.16. Modos propios de dos osciladores con acoplamiento fuerte.

En el modo de baja frecuencia el movimiento de las masas tiene el *mismo* sentido, mientras que tiene sentido *opuesto* en el modo de alta frecuencia X_+ (Fig. 6.16). Cuando $z = 1/2$ los desplazamientos de m_1 y m_2 son iguales para el modo X_- ; el resorte de acoplamiento *no trabaja* y por eso $\omega_- = \omega_1 = \omega_2$. En cambio en el modo X_+ los desplazamientos son iguales pero opuestos y el resorte de acoplamiento sufre un estiramiento (o acortamiento) *doble*, por eso $\omega_+ = \sqrt{3}\omega_1 = \sqrt{3}\omega_2$. Estas características se pueden obtener directamente de las ecuaciones de

movimiento (6.112). A medida que z disminuye el efecto de la diferencia entre las masas sobre los modos X_- y X_+ es distinto. Para X_- el desplazamiento de la masa menor m_1 sigue teniendo el mismo sentido pero es más pequeño que el de m_2 y en el límite $m_1 \rightarrow 0$ es exactamente la mitad (como se ve de la ecuación de movimiento). Para X_+ , por el contrario, el desplazamiento de m_2 se hace menor al de m_1 y se anula para $m_1 \rightarrow 0$; en ese límite el único movimiento es el de m_1 y $\omega_+, \omega_1 \rightarrow \infty$. Esto es razonable si se piensa que m_2 está siendo forzada a oscilar con la frecuencia ω_+ que es mucho mayor que su frecuencia natural ω_2 ; la fuerza que la hace oscilar es $F(t) = 2k \cos \omega_+ t$ y de acuerdo con la (6.39) la amplitud de esas oscilaciones es

$$\frac{2k}{m_2} \frac{1}{\omega_+^2 - \omega_2^2} \cong \frac{2k}{m_2} \frac{1}{\omega_+^2} = z \quad (6.141)$$

y están en contrafase con $F(t)$ porque $\omega_+ > \omega_2$.

Acoplamiento de osciladores de igual frecuencia

Por último es interesante examinar el efecto del acoplamiento sobre dos osciladores de igual frecuencia. No haremos ninguna hipótesis sobre la magnitud de la constante de acoplamiento k , ni sobre los valores de m_1 , m_2 , k_1 y k_2 , salvo suponer que $\omega_2 = \omega_1 \equiv \omega_0$. En este caso con $m_1 = Mz$, $m_2 = M(1-z)$ tenemos que

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1-z}{z}, \quad \omega_M = \omega_0, \quad \omega_\mu^2 = \omega_0^2 \frac{k}{K} \frac{1}{z(1-z)} \quad (6.142)$$

donde $K = k_1 + k_2 = 2k_0$. La (6.120) se reduce entonces a

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_\mu^2) = 0 \quad (6.143)$$

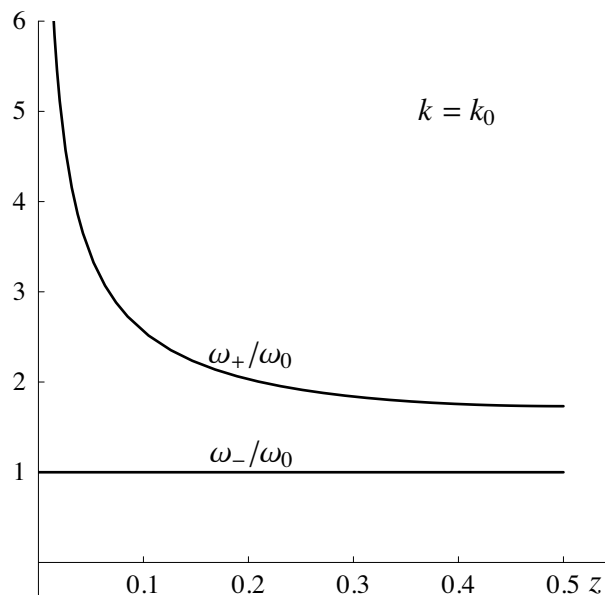


Fig. 6.17. Frecuencias de los modos propios de un sistema de dos osciladores acoplados de igual frecuencia libre ω_0 .

Por lo tanto las frecuencias propias del sistema acoplado son

$$\omega_- = \omega_0 \quad , \quad \omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{k}{2k_0} \frac{1}{z(1-z)}} \quad (6.144)$$

Vemos que $\omega_+(z \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ y $\omega_+(z = 1/2) = \omega_0(1 + 2k/k_0)^{1/2}$ ($k_2 = k_1 = k_0$ cuando $z = 1/2$). Por lo tanto ω_+ es siempre apreciablemente mayor que ω_0 , salvo que $k \ll k_0$ (Fig. 6.17). Introduciendo las (6.144) en las (6.123) y (6.124) resulta

$$B_- = A_- \quad , \quad B_+ = -\frac{z}{1-z} A_+ \quad (6.145)$$

Por lo tanto los modos normales son

$$X_- = C_- \cos \omega_- t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_+ = C_+ \cos \omega_+ t \begin{pmatrix} 1-z \\ -z \end{pmatrix} \quad (6.146)$$

con C_- , C_+ = cte. Notar que la forma de los modos normales no depende de k y que X_- tampoco depende de la relación de masas. Se puede ver que el movimiento de m_1 y m_2 en el modo X_- va siempre en el mismo sentido y los desplazamientos son iguales ($x_2 = x_1$), luego el resorte de acoplamiento no trabaja. En cambio en el modo X_+ el movimiento de las masas va en sentido opuesto y la magnitud de los desplazamientos depende de z (de manera análoga a la que se muestra en la Fig. 6.16 para el acoplamiento fuerte). Los desplazamientos de m_1 y m_2 son iguales y opuestos si $z = 1/2$ pero a medida que z disminuye el desplazamiento de m_2 se hace menor al de m_1 y se anula en el límite $m_1 \rightarrow 0$; en ese límite el único movimiento es el de m_1 . Como ya vimos, toda combinación lineal de X_- y X_+ de la forma (6.125) es solución de las ecuaciones del movimiento. Por lo tanto la solución general para el movimiento de dos osciladores acoplados de igual frecuencia es

$$X = a_- X_- + a_+ X_+ = \begin{pmatrix} a_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) + a_+(1-z) \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ a_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) - a_+ z \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{pmatrix} \quad (6.147)$$

El movimiento de las masas es entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= a_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) + a_+(1-z) \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ x_2 &= a_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) - a_+ z \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{aligned} \quad (6.148)$$

Es interesante examinar las soluciones que se obtienen a partir de condiciones iniciales particulares. Consideremos entonces el caso que en $t = 0$ la masa m_2 está en reposo y la masa m_1 se ha desplazado a una distancia A desde el equilibrio y su velocidad es nula, esto es

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A \quad , \quad \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) &= 0 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.149)$$

Introduciendo estas condiciones iniciales en (6.148) se obtiene

$$\begin{aligned} a_- &= zA \quad , \quad \varphi_- = 0 \\ a_+ &= A \quad , \quad \varphi_+ = 0 \end{aligned} \quad (6.150)$$

de modo que la solución es

$$\begin{aligned}x_1 &= zA \cos \omega_- t + A(1-z) \cos \omega_+ t \\x_2 &= zA(\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t)\end{aligned}\quad (6.151)$$

Recordando las fórmulas trigonométricas

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (6.152)$$

podemos escribir

$$x_2 = -2zA \operatorname{sen} \omega_d t \operatorname{sen} \omega_s t, \quad \omega_d = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-), \quad \omega_s = \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-) \quad (6.153)$$

De aquí se ve que el movimiento de m_2 es una oscilación sinusoidal de frecuencia ω_s cuya amplitud está modulada por el factor $\operatorname{sen} \omega_d t$, que varía lentamente con t pues $\omega_d < \omega_s$. De resultas de esto la energía asociada al movimiento de m_2 (inicialmente nula) crece con t a expensas de la energía asociada al movimiento de m_1 hasta que en $t = \pi/2\omega_d$ la amplitud de la oscilación de m_2 alcanza su valor máximo $2zA$ y luego disminuye a medida que m_2 devuelve a m_1 la energía que había recibido hasta anularse en $t = \pi/\omega_d$, después de lo cual el proceso se repite indefinidamente (si no hay amortiguamiento). Luego el efecto del acoplamiento es permitir una transferencia de energía de ida y vuelta entre los osciladores m_1 y m_2 .

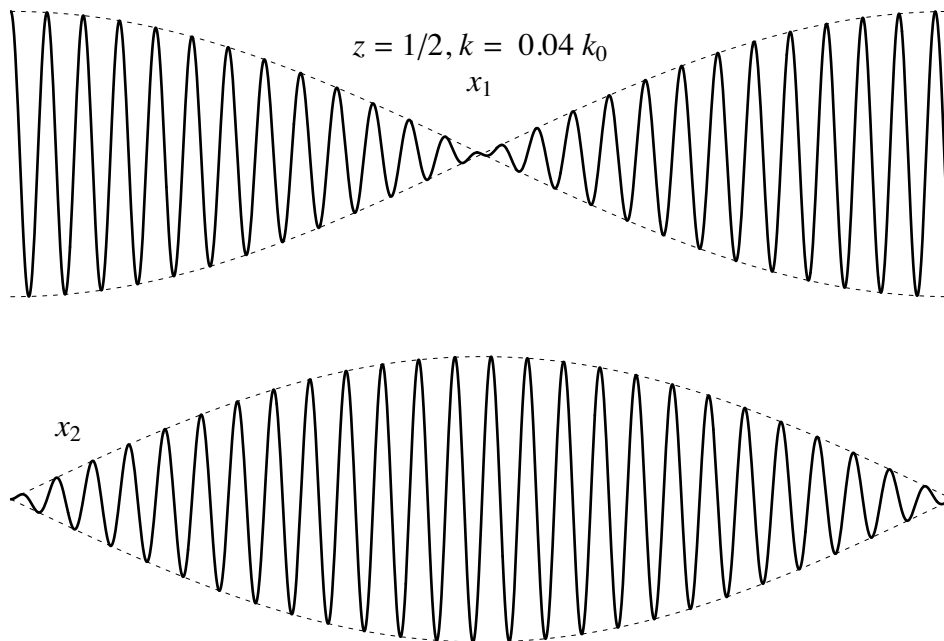


Fig. 6.18. Movimiento de dos osciladores de masas iguales acoplados débilmente, cuando en el instante inicial m_2 está en reposo y m_1 se ha apartado una distancia A del equilibrio.

En la Fig. 6.18 se muestran $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $m_2 = m_1$ ($z = 1/2$) y acoplamiento débil ($k = 0.04k_0$) de modo que $\omega_d \ll \omega_s$ y el proceso de transferencia de energía entre ambos osciladores es lento. En este caso

$$x_1 = A \cos \omega_d t \cos \omega_s t, \quad x_2 = -A \operatorname{sen} \omega_d t \operatorname{sen} \omega_s t \quad (6.154)$$

y por lo tanto la transferencia de energía es *completa* de modo que en el instante que las oscilaciones de m_2 alcanzan su máxima amplitud, m_1 queda en reposo en el punto de equilibrio. En la Fig. 6.19 se muestran $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cuando $m_2 = 7m_1/3$ ($z = 3/10$), con el mismo valor del acoplamiento ($k = 0.04k_0$) que en el caso anterior. Ahora la transferencia de energía es *incompleta* porque cuando las oscilaciones de m_2 alcanzan su máxima amplitud m_1 está todavía oscilando con una amplitud grande, aunque menor que A . Se puede ver que el período π/ω_d del proceso de transferencia de energía es menor que en el caso anterior puesto que por la (6.144) $\omega_d(z = 3/10) > \omega_d(z = 1/2)$. Esto es razonable porque la tasa de transferencia de energía (que depende de k) es la misma en ambos casos pero la cantidad total de energía involucrada en la transferencia es menor cuando las masas son distintas.

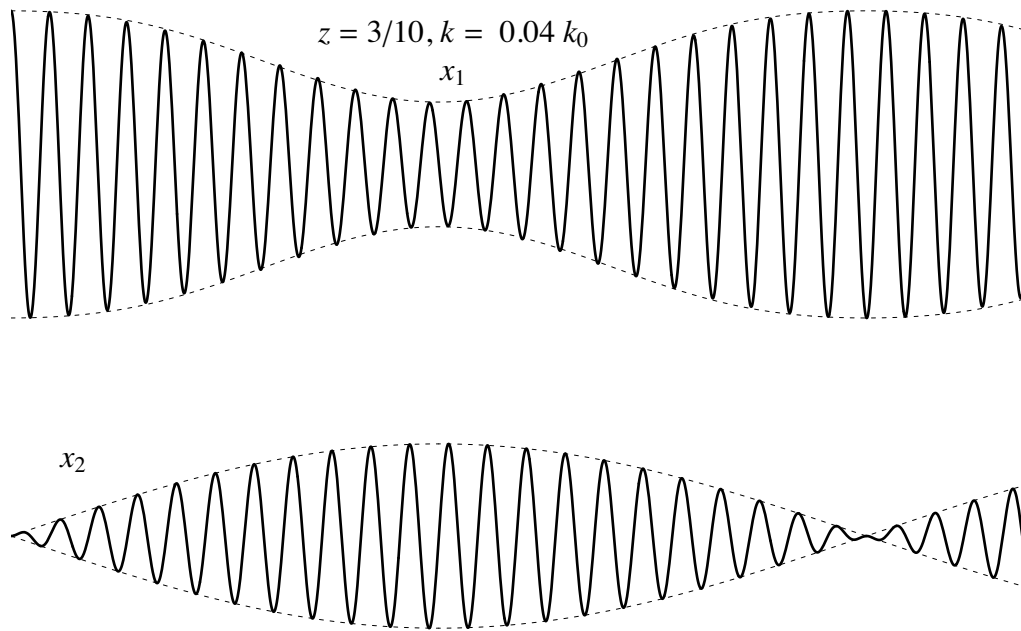


Fig. 6.19. Movimiento de dos osciladores de masas desiguales acoplados débilmente. En el instante inicial m_2 está en reposo y m_1 se ha apartado una distancia A del equilibrio.

En la Fig. 6.20 se muestran $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $m_2 = m_1$ ($z = 1/2$), pero con un acoplamiento más fuerte ($k = 0.4k_0$) que en el primer caso. Como las masas son iguales la transferencia de energía es *completa*, pero el período π/ω_d del proceso de transferencia de energía es mucho menor que antes porque el acoplamiento es más fuerte y la tasa de transferencia de energía es mayor.

Antes de concluir esta discusión de los osciladores acoplados conviene hacer un par de comentarios. El primero es que el presente tratamiento se puede generalizar para un número cualquiera n de osciladores cuyas masas y frecuencias son m_1, m_2, \dots, m_n y $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, acoplados entre sí. En este caso el espacio de configuraciones tiene n dimensiones, y se obtienen n modos propios diferentes con frecuencias $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(n)}$ (algunas de las cuales pueden ser iguales entre sí). El segundo es que el lector debe tener presente que el tratamiento de modos normales tiene una importante limitación, ya que se aplica solamente a osciladores *lineales*, y cuando los acoplamientos entre ellos son también *lineales*. Si uno o más de los osciladores no es lineal y/o si uno o más de los acoplamientos no es lineal el análisis de modos normales no se puede hacer y el problema es mucho más difícil de tratar ya que hay que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Generalmente sólo se pueden encontrar soluciones numéricas de tales sistemas, y aparecen fenómenos nuevos que no se presentan en el caso lineal.

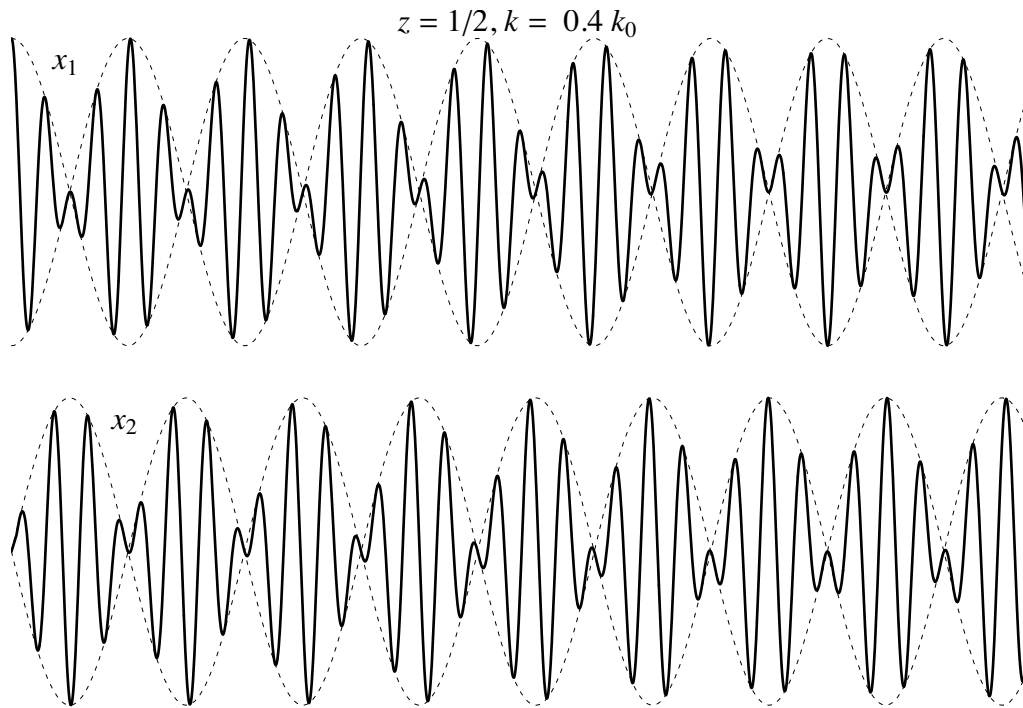


Fig. 6.20. Movimiento de dos osciladores de masas iguales acoplados fuertemente, cuando en el instante inicial uno de ellos (m_2) está en reposo en el punto de equilibrio mientras que el otro (m_1) se ha apartado una distancia A del equilibrio.

El columpio

Todo el mundo conoce el columpio, ese simple pero bonito entretenimiento de chicos y grandes y ha vivido la experiencia de precipitarse desde el punto más alto de la trayectoria y adquirir una velocidad vertiginosa para luego remontarse a las alturas. Todos hemos sentido la fascinante sensación de partir del reposo y gobernando a voluntad las oscilaciones alcanzar casi sin esfuerzo grandes alturas y velocidades en pocos vaivenes. Sin embargo muchos que han jugado con el columpio y conocen las leyes de la Mecánica no logran explicar fácilmente en que mecanismos físicos se funda la habilidad de los niños (y la suya propia). Vale la pena pues analizar el columpio para mostrar cómo se puede entender su funcionamiento en base a las Leyes de Newton y sin cálculos muy complicados. Hay dos aspectos diferentes en este problema, que conviene tratar por separado. El primero es cómo el niño hace oscilar el columpio a partir del reposo sin apoyarse en el suelo y sin que otro le de el empujón inicial. El segundo es como logra gobernar el movimiento del columpio y aumentar o disminuir a voluntad la amplitud de las oscilaciones, una vez que comenzó a oscilar.

Las criaturas aprenden por sí solas a columpiarse sin tocar el suelo y sin que otro lo empuje. Para entender como lo hacen es preciso prestar atención a sus movimientos. Consideremos, para fijar ideas, que el niño está en reposo sentado en el columpio (Fig. 6.21r). Para arrancar el niño mueve partes de su cuerpo en sentido más o menos horizontal: echa el torso hacia adelante y recoge las piernas (movimiento A, Fig. 6.21a) y luego echa el torso hacia atrás y estira las piernas (movimiento B, Fig. 6.21b). Con esto logra que el columpio se ponga a oscilar. El mismo efecto lo consigue si está de pie y sus movimientos son del mismo tipo pues consisten en echar hacia adelante la parte superior del cuerpo y hacia atrás la parte inferior, y al revés.

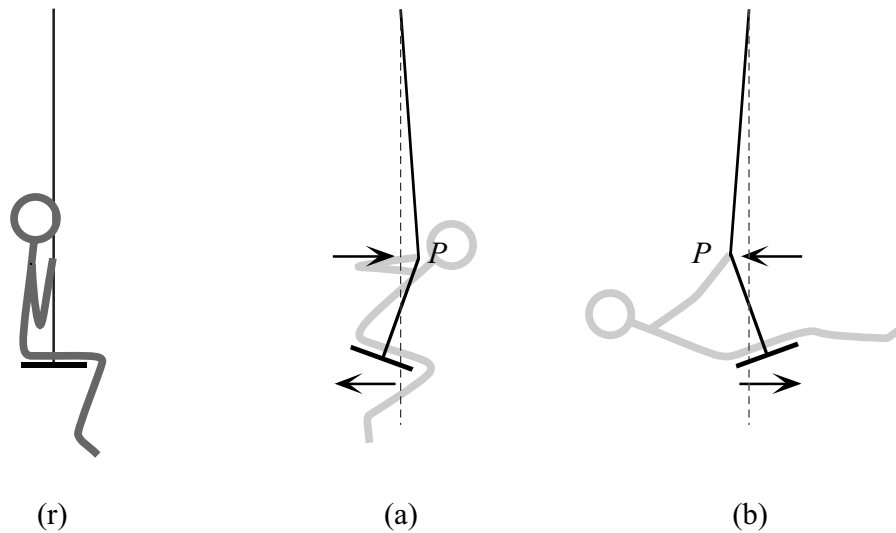


Fig. 6.21. Para empezar a columpiarse a partir del reposo (r) el niño echa el torso hacia adelante y recoge las piernas (a), luego echa el torso hacia atrás y estira las piernas hacia adelante (b). Así logra que el columpio comience a oscilar.

¿Porqué estos movimientos provocan la oscilación del columpio? Para entenderlo observemos la Fig. 6.21a. El punto P es el lugar donde las manos toman las cadenas que sostienen el columpio. Cuando el niño realiza el movimiento A la parte de abajo del columpio se va hacia atrás y la parte de arriba se va para adelante. En cambio cuando hace el movimiento B los desplazamientos de la parte superior e inferior del columpio son al revés (Fig. 6.21b). Vemos así que el sistema constituido por el niño y el columpio se asemeja aun *péndulo doble*, esto es un conjunto de dos péndulos uno colgado debajo del otro (Fig. 6.22a). Este interesante sistema mecánico fue estudiado hace casi tres siglos por Euler y Daniel Bernoulli y merece una breve discusión.

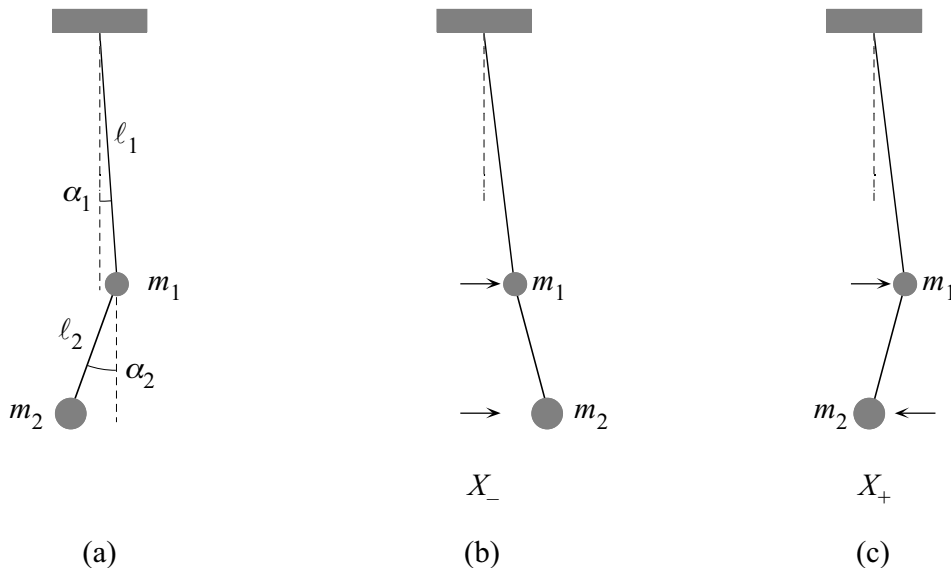


Fig. 6.22. Cuando el niño realiza los movimientos A o B el sistema se comporta como un péndulo doble (a). El péndulo doble tiene dos modos normales: en el modo de baja frecuencia X_- las masas se mueven (b) en el mismo sentido y en el modo de alta frecuencia X_+ lo hacen (c) en sentido opuesto.

El péndulo doble

No es difícil mostrar que las ecuaciones de movimiento del péndulo doble son

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_1 + \omega_1^2 \sin \alpha_1 + \mu(\ell_2 / \ell_1)[\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)] &= 0 \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2^2 \sin \alpha_2 + (\ell_1 / \ell_2)[\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)] &= 0\end{aligned}\quad (6.155)$$

donde las cantidades están definidas en la Fig. 6.22a y $\omega_1^2 = g / \ell_1$, $\omega_2^2 = g / \ell_2$, $\mu = m_2 / m$ ($m \equiv m_1 + m_2$). Este es un sistema de ecuaciones no lineales acopladas y su solución no es sencilla. Pero si α_1 y α_2 son muy pequeños podemos despreciar los términos cuadráticos $\dot{\alpha}_1^2$ y $\dot{\alpha}_2^2$, poner $\sin \alpha_{1,2} \approx \alpha_{1,2}$, $\cos \alpha_{1,2} \approx 1$, etc. y las (6.155) se reducen a

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_1^2 \alpha_1 + \mu(\ell_2 / \ell_1) \ddot{\alpha}_2 = 0 \quad , \quad \ddot{\alpha}_2 + \omega_2^2 \alpha_2 + (\ell_1 / \ell_2) \ddot{\alpha}_1 = 0 \quad (6.156)$$

Combinando entre sí las (6.156) este sistema se lleva a la forma más conveniente

$$(1 - \mu) \ddot{\alpha}_1 + \omega_1^2 (\alpha_1 - \mu \alpha_2) = 0 \quad , \quad (1 - \mu) \ddot{\alpha}_2 + \omega_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \quad (6.157)$$

que podemos escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} (1 - \mu) d^2 / dt^2 + \omega_1^2 & -\mu \omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & (1 - \mu) d^2 / dt^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.158)$$

El péndulo doble es un sistema de osciladores acoplados parecido a los que ya estudiamos, pues las (6.158) son del mismo tipo que las (6.113). Esto es razonable ya que cuando un péndulo oscila ejerce sobre el punto de suspensión una fuerza que varía al compás de las oscilaciones. Cuando el péndulo inferior está a la derecha de la vertical de su punto de suspensión esa fuerza tira del péndulo superior hacia la derecha y viceversa cuando el péndulo inferior está a la izquierda de esa vertical la fuerza tira del péndulo superior hacia la izquierda. Por la Tercera Ley el péndulo superior ejerce una fuerza igual y contraria sobre el inferior. Esto es lo que nos dicen las (6.158). Como antes para encontrar los modos normales buscamos soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \omega t \\ B \cos \omega t \end{pmatrix} \quad , \quad A, B = \text{cte.} \quad (6.159)$$

Sustituyendo (6.159) en (6.158) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 - (1 - \mu) \omega^2 & -\mu \omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 - (1 - \mu) \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (6.160)$$

Para que este sistema tenga soluciones no triviales ω debe ser una raíz de la ecuación

$$[(1 - \mu) \omega^2 - \omega_1^2][(1 - \mu) \omega^2 - \omega_2^2] - \mu \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \quad (6.161)$$

Desarrollando (6.161) se obtiene

$$(1 - \mu) \omega^4 - \omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \quad (6.162)$$

Esta ecuación bicuadrática tiene dos pares de raíces

$$\omega_{\mp}^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - \mu} \left[1 \mp \sqrt{1 - 4(1 - \mu) \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}} \right] \quad (6.163)$$

Es fácil verificar que ω_-^2 y ω_+^2 son siempre reales y positivas. Si $\ell_1 = \ell_2 \equiv \ell$ se tiene que $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0$ y entonces resulta

$$\omega_-^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \sqrt{\mu}} \quad , \quad \omega_+^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \sqrt{\mu}} \quad (6.164)$$

y de las (6.160) obtenemos

$$A_- = \sqrt{\mu} B_- \quad , \quad A_+ = -\sqrt{\mu} B_+ \quad (6.165)$$

En general de la (6.160) resulta

$$\begin{aligned} [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_-^2]A_- &= \mu\omega_1^2 B_- \quad \text{o bien} \quad \omega_2^2 A_- = [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2]B_- \\ [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2]A_+ &= \mu\omega_1^2 B_+ \quad \text{o bien} \quad \omega_2^2 A_+ = [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_+^2]B_+ \end{aligned} \quad (6.166)$$

Por lo tanto los modos propios son de la forma

$$X_- = \begin{pmatrix} [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2] \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ \omega_2^2 \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{pmatrix} \quad , \quad X_+ = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2] \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{pmatrix} \quad (6.167)$$

donde φ_- y φ_+ son constantes. Es fácil comprobar que se cumple siempre que

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_-^2 &> 0 \quad , \quad \omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2 > 0 \\ \omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2 &< 0 \quad , \quad \omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_+^2 < 0 \end{aligned} \quad (6.168)$$

Luego en el modo de baja frecuencia X_- ambas masas se mueven en el mismo sentido (Fig. 6.22b) mientras que en el modo de alta frecuencia X_+ oscilan en sentido opuesto (Fig. 6.22c). En general el movimiento del péndulo doble es una combinación lineal de X_- y X_+ de la forma

$$X = a_- X_- + a_+ X_+ \quad (6.169)$$

donde las constantes a_- y a_+ y las fases φ_- y φ_+ dependen de las condiciones iniciales.

El arranque del columpio

Volvamos ahora al arranque del columpio. El problema es complicado pues nuestro sistema no consiste de masas puntiformes y ni siquiera es un sólido rígido porque el cuerpo del niño es articulado. De hecho los cambios de configuración del mismo en los movimientos (a) y (b) de la Fig. 6.21 son esenciales para lograr el efecto deseado. Salta a la vista que la descripción exacta y rigurosa del arranque es una tarea virtualmente imposible.

Para simplificar al máximo el tratamiento vamos a usar un modelo muy sencillo, que aunque es grosero contempla el aspecto esencial del problema, esto es, el cambio de la configuración del

niño debido a las flexiones del torso y las piernas. Está claro que para lograr ese propósito el modelo tiene que consistir, como mínimo, de dos puntos materiales. Por consiguiente dividiremos el sistema (columpio + niño) en dos partes y a cada una de ellas la representaremos mediante un único punto material. Para fijar ideas consideremos la configuración A (Fig. 6.21a): en este caso la parte 1, cuya masa es m_1 , consiste de la cabeza, el torso y los brazos del niño (ver Fig. 6.23a, vamos a suponer que la masa de las cadenas es despreciable); sea l_1 la distancia entre el punto de suspensión S del columpio y el punto C_1 donde está concentrada m_1 (notar que l_1 no es la longitud de SP , es decir no es la longitud de la parte de las cadenas por encima de P). La parte 2 consiste del resto, o sea las piernas del niño y el asiento del columpio; indicaremos con m_2 su masa y con l_2 la distancia entre C_1 y el punto C_2 donde está concentrada m_2 . Para la configuración B (Fig. 6.21b) procederemos del mismo modo, pero está claro que ahora m_1 no está concentrada en C_1 sino en otro punto C'_1 y m_2 está concentrada en C'_2 y no en C_2 ; por lo tanto tendremos $l'_1 \equiv SC'_1 \neq l_1$ y $l'_2 \equiv C'_1C'_2 \neq l_2$ (Fig. 6.23c).

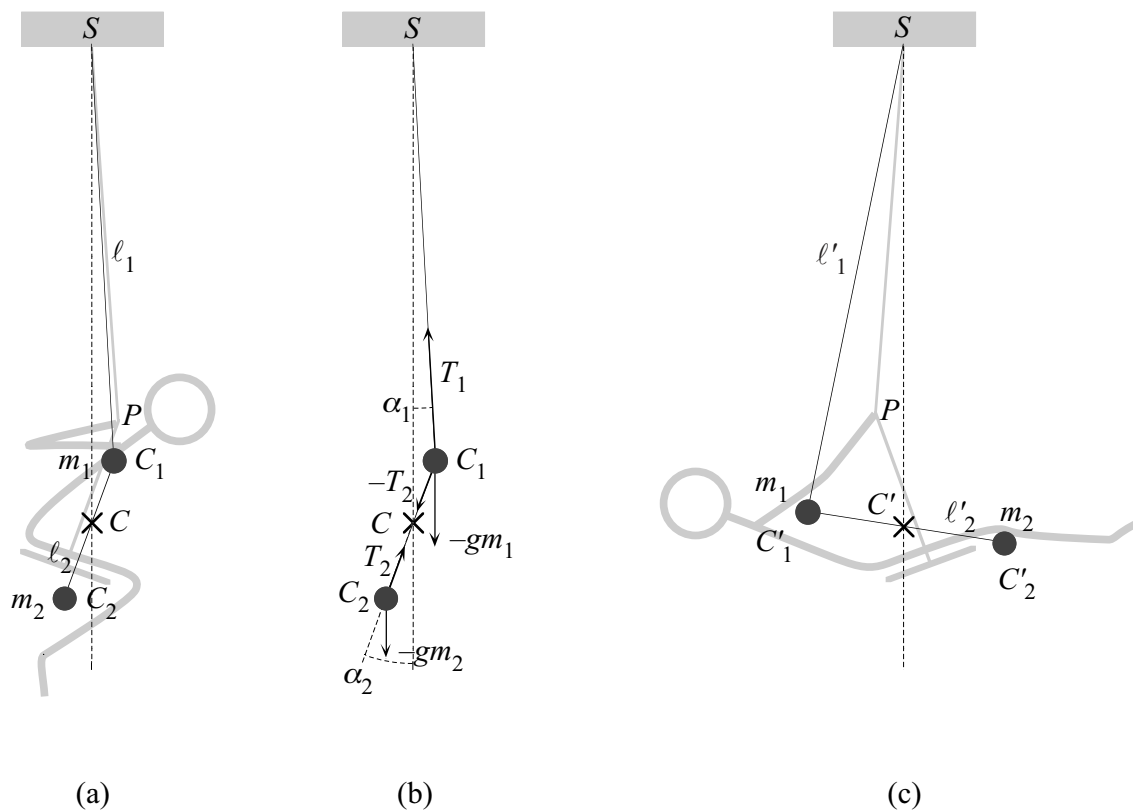


Fig. 6.23. El modelo para describir el arranque del columpio consiste en reemplazar el sistema por dos masas puntiformes m_1 y m_2 cuya posición depende de la configuración adoptada por el niño. En (a) mostramos la posición de m_1 , m_2 y del centro de masa C para la configuración A y en (b) representamos las fuerzas que actúan sobre m_1 y m_2 cuando el niño afloja los brazos después de haber adoptado la configuración A; en (c) mostramos la posición de m_1 , m_2 y C para la configuración B.

Mientras el niño mantiene (por ejemplo) la configuración A el sistema se puede tratar, dentro de las limitaciones del modelo, como un péndulo doble de masas m_1 , m_2 y longitudes l_1 , l_2 . Notar que α_1 y α_2 son los ángulos entre los SC_1 y C_1C_2 y la vertical y no tienen porqué coincidir con los ángulos entre la vertical y las partes de las cadenas por encima y por debajo de P .

Para que el columpio oscile es preciso que el centro de masa⁷ del sistema, que inicialmente está en reposo (Fig. 6.21r), se ponga a oscilar. Pero a primera vista no es evidente que esto se pueda lograr sin aplicar una fuerza externa y por el solo hecho de haber adoptado la configuración A.

Para ver que esto es posible conviene deducir la ecuación de movimiento del centro de masa del péndulo doble. Puesto que α_1 y α_2 son pequeños el movimiento del centro de masa (si lo hay) es horizontal. Sea entonces C el centro de masa del sistema m_1 , m_2 , y x_C su coordenada horizontal medida a partir de la vertical por S . Entonces

$$x_C = [m_1 \ell_1 \alpha_1 + m_2 (\ell_1 \alpha_1 + \ell_2 \alpha_2)] / m = \ell_1 \alpha_1 + \mu \ell_2 \alpha_2 \quad (6.170)$$

Por lo tanto

$$\ddot{x}_C = \ell_1 \ddot{\alpha}_1 + \mu \ell_2 \ddot{\alpha}_2 \quad (6.171)$$

Pero de las (6.157) resulta

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{\omega_1^2}{1 - \mu} (\mu \alpha_2 - \alpha_1) \quad , \quad \ddot{\alpha}_2 = \frac{\omega_2^2}{1 - \mu} (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (6.172)$$

y por lo tanto recordando que $\omega_1^2 = g / \ell_1$ y $\omega_2^2 = g / \ell_2$ obtenemos que

$$\ddot{x}_C = -g \alpha_1 \quad (6.173)$$

Esta es la ecuación de movimiento del centro de masa del péndulo doble. Este resultado se puede también obtener de inmediato considerando las fuerzas externas que actúan sobre el sistema pues $\ddot{x}_C = F_{e,x} / m$ donde $F_{e,x}$ es la componente horizontal de la suma de las fuerzas externas que actúan sobre m_1 y m_2 . Observando la Fig. (6.23b) vemos que la única fuerza externa con componente x no nula es la tensión $T_1 = mg$, cuya componente horizontal vale $-mg \alpha_1$. Luego aplicando la Segunda Ley obtenemos la (6.173).

Nuestro resultado muestra que cuando el niño adopta la configuración A, sobre el centro de masa actúa una fuerza $F = -mg \alpha_1$. Por lo tanto para mantener el columpio en la posición indicada en la Fig. 6.23a el niño tiene que ejercer con los brazos una fuerza igual y opuesta. Mientras hace fuerza el sistema queda en reposo en la configuración A, pero tan pronto afloja los brazos el centro de masa se acelera de acuerdo con la (6.173). Consideraciones análogas se pueden hacer para la configuración B. Este es el resultado crucial y muestra que basta adoptar la configuración A (o la B) y luego dejar al sistema en libertad de moverse para impartir una aceleración al centro de masa, con lo cual éste comenzará a oscilar.

Examinemos ahora el movimiento que así se produce. Desde luego se trata de una combinación lineal del tipo (6.169) de los modos propios X_- , X_+ , pero para entender mejor sus características conviene mirar el modelo del péndulo doble desde otro punto de vista. Desde el nuevo punto de vista el modelo describe (por supuesto en forma aproximada) el comportamiento del sistema

⁷ Se denomina baricentro o centro de masa del sistema m_1 , m_2 al punto C cuya posición está definida por $\mathbf{r} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / m$. El baricentro no es un punto material y no tiene porqué coincidir con un punto del sistema. Claramente la velocidad y la aceleración del centro de masa están dadas por $m \mathbf{v} = \mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ y $m \mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2}$, donde \mathbf{F}_{e1} y \mathbf{F}_{e2} son las fuerzas externas que actúan sobre m_1 y m_2 (ec. 4.18)). Para más detalles ver el Capítulo 8.

como si éste consistiera de un *único* punto material, el centro de masa C , cuya posición está determinada por su distancia ℓ_C desde el punto de suspensión y por el ángulo α_C entre SC y la vertical; pero ese punto material está dotado de un grado de libertad *interno*, descrito por la distancia ℓ_2 entre C_1 y C_2 y por el ángulo $\alpha_i \equiv \alpha_2 - \alpha_C$ entre C_1C_2 y SC . Esta forma de interpretar el modelo es equivalente a la imagen del péndulo doble, pero facilita la comprensión.

En tanto y en cuanto el niño no cambia su configuración y se deja oscilar pasivamente ℓ_C y ℓ_2 se mantienen constantes y el movimiento del sistema proviene solamente de las variaciones de α_C y α_i . Si α_1 , α_2 , y por lo tanto α_C , α_i son pequeños de modo que podemos aproximar los senos por los arcos y los cosenos por la unidad, se tiene entonces que

$$\ell_c = \ell_1 + \mu\ell_2 \quad , \quad x_c = \ell_c\alpha_c \quad (6.174)$$

y de la (6.170) y la definición de α_i obtenemos

$$\alpha_1 = \alpha_C - \frac{\mu\ell_2}{\ell_1}\alpha_i \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_C + \alpha_i \quad (6.175)$$

Usando estas relaciones las ecuaciones de movimiento del péndulo doble (6.157) se pueden escribir en términos de α_C y α_i en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_C + \omega_1^2 \frac{\ell_1}{\ell_C} \alpha_C - \omega_1^2 \frac{\mu\ell_2}{\ell_C} \alpha_i &= 0 \\ \ddot{\alpha}_i - \omega_1^2 \frac{\ell_1}{\ell_C} \alpha_C + \omega_1^2 \left[\frac{\mu\ell_2}{\ell_C} + \frac{\ell_C}{(1-\mu)\ell_2} \right] \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (6.176)$$

Las (6.176) son, por supuesto, equivalentes a las (6.157) pero tienen la ventaja que nos permiten entender como varían α_C y α_i en los modos X_- , X_+ . En términos de α_C y α_i los modos propios del péndulo doble se expresan como

$$\begin{pmatrix} \alpha_C \\ \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \cos \omega t \\ H \sin \omega t \end{pmatrix} \quad , \quad G, H = \text{cte.} \quad (6.177)$$

Sustituyendo en la (6.176) obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 \frac{\ell_1}{\ell_C} - \omega^2 & -\omega_1^2 \frac{\mu\ell_2}{\ell_C} \\ -\omega_1^2 \frac{\ell_1}{\ell_C} & \omega_1^2 \left[\frac{\mu\ell_2}{\ell_C} + \frac{\ell_C}{(1-\mu)\ell_2} \right] - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = 0 \quad (6.178)$$

La condición de compatibilidad de estas ecuaciones es por supuesto la (6.162), cuyas raíces son ω_- , ω_+ , dadas por (6.163), cosa que se puede verificar fácilmente. De la primera (o la segunda) de las (6.178) resulta que para los modos propios X_- , X_+ se cumple que

$$\frac{G_-}{H_-} = \frac{\omega_1^2 \mu \ell_2}{\omega_1^2 \ell_1 - \omega_-^2 \ell_C} \quad , \quad \frac{G_+}{H_+} = \frac{\omega_1^2 \mu \ell_2}{\omega_1^2 \ell_1 - \omega_+^2 \ell_C} \quad (6.179)$$

Es razonable suponer que en un columpio $\mu \approx 1/2$ y $\ell_1/\ell_2 \approx 5-10$. Tomando $\mu = 1/2$ y $\ell_1/\ell_2 = 7$ resulta

$$\omega_-/\omega_1 \approx 0.96 \quad , \quad \omega_+/\omega_1 \approx 3.88 \quad , \quad G_-/H_- \approx 15 \quad , \quad G_+/H_+ \approx -0.005 \quad (6.180)$$

Por lo tanto el movimiento del centro de masa (α_C) y el movimiento interno (α_i) están acoplados muy débilmente, de modo que X_- (para el cual las amplitudes de α_C y α_i son G_- y H_-) es básicamente un movimiento del *centro de masa* en el cual el grado de libertad interno juega un rol secundario pues $\alpha_i \ll \alpha_C$. En cambio el modo X_+ es esencialmente un movimiento *interno* porque la amplitud del movimiento de C es muy pequeña dado que $|\alpha_C| \ll |\alpha_i|$.

Es fácil verificar (aunque un tanto laborioso) que si el columpio está en reposo en la configuración A (o B) y en $t = 0$ el niño afloja los brazos, el movimiento resultante⁸ es de la forma $X = a_-X_- + a_+X_+$ con $a_-/a_+ \approx 0.075$ y que la amplitud del movimiento del centro de masa es del orden del valor inicial de α_1 y su frecuencia es menor pero cercana a ω_1 . La amplitud del movimiento interno es aproximadamente 6 veces la amplitud de α_C pero su frecuencia es mucho mayor (del orden de ω_+). En conclusión vemos que los movimientos iniciales del niño excitan el modo X_- y por lo tanto hacen oscilar el centro de masa y el columpio arranca.

La excitación paramétrica y la amplificación de las oscilaciones del columpio

Una vez aclarado el mecanismo del arranque vamos a ver de que manera el niño logra manejar a voluntad la amplitud de las oscilaciones. Para esto es preciso aumentar la amplitud del modo X_- que es el responsable del movimiento del centro de masa, y el niño consigue este resultado variando su configuración al compás de las oscilaciones de C , de modo de acercar o alejar dicho punto desde S . Estas variaciones se hacen con la frecuencia con la que oscila el centro de masa, que como hemos visto es muy diferente a la del modo X_+ . Por lo tanto a medida que se amplifica el modo X_- las oscilaciones de alta frecuencia que están presentes en el arranque pierden relevancia, se amortiguan y desaparecen dejando solamente las oscilaciones X_- . Puesto que el grado de libertad interno juega un rol secundario en ese modo podemos dejar de lado el modelo del péndulo doble y tratar el sistema como un péndulo simple cuya longitud ℓ es *variable* puesto que depende de la distancia entre C y S , que a su vez depende de la configuración que adopte el niño. Notar que cuando la amplitud de las oscilaciones se hace grande la aproximación de ángulos pequeños que hicimos para tratar el arranque deja de valer, luego para discutir la amplificación de las oscilaciones no podemos usar la imagen de los modos propios sino que se requiere un tratamiento no lineal. En resumidas cuentas, para estudiar la amplificación se puede tratar el sistema como un péndulo simple *no lineal* de longitud *variable*.

Veremos ahora que la variación de la longitud del péndulo produce una variación de la energía mecánica del sistema y por lo tanto un cambio de la amplitud de las oscilaciones. Para esto conviene estudiar el movimiento desde el referencial (no inercial) del columpio. Vamos a suponer que el niño se hamaca parado y para simplificar supondremos que toda la masa está concentrada en el centro de masa del sistema (niño + columpio). Sea ℓ la distancia entre el centro de masa y el eje de giro en la posición de piernas encogidas (punto 1 de la Fig. 6.24). En el referencial móvil la velocidad del columpio es nula, la energía es puramente potencial y proviene de la energía potencial gravitatoria

⁸ El movimiento de C es complicado. Es una superposición de oscilaciones de frecuencias ω_- y ω_+ en la cual hay una frecuencia dominante dada por $\omega_c^2 = g[m_1\ell_1 + m_2(\ell_1 + \ell_2)]/[m_1\ell_1^2 + m_2(\ell_1 + \ell_2)^2]$.

$$V_g = mg\ell(1 - \cos\alpha) \quad (6.181)$$

y de la energía potencial centrífuga⁹

$$V_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 \quad (6.182)$$

La energía mecánica total es entonces

$$E = V_g + V_c \quad (6.183)$$

En el referencial del columpio las fuerzas que actúan en la dirección de ℓ son

$$F_g = -\partial V_g / \partial \ell = mg \cos \alpha \quad (6.184)$$

que es la componente del peso en la dirección de ℓ y la fuerza centrífuga

$$F_c = \partial V_c / \partial \ell = m\ell\dot{\alpha}^2 \quad (6.185)$$

Ambas se equilibran, por supuesto, con la tensión de las cuerdas que sostienen el columpio. Cuando al llegar al punto más bajo de su trayectoria (punto 2 de la Fig. 6.24) el niño extiende las piernas el centro de masa de acerca al eje de giro y ℓ toma el valor

$$\ell' = \ell - \delta\ell \quad (6.186)$$

Para simplificar las cuentas vamos a suponer que $\delta\ell$ es pequeño y que el cambio de configuración es instantáneo. Notar que $\delta\ell > 0$ cuando ℓ se acorta. Al variar ℓ tanto F_g como F_c trabajan y por consiguiente V_g y V_c varían:

$$\delta V_g = F_g \delta\ell \quad , \quad \delta V_c = F_c \delta\ell \quad (6.187)$$

Ahora, en el punto 2 se tiene que $\alpha = 0$ y $\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}_{\max}^2 = 2g(1 - \cos\alpha_0)/\ell$, donde α_0 es la amplitud de la oscilación. Por lo tanto

$$\delta V_g = mg\delta\ell \quad , \quad \delta V_c = 2mg\delta\ell(1 - \cos\alpha_0) \quad (6.188)$$

y por consiguiente la variación de la energía mecánica es

$$\delta E' = mg\delta\ell[1 + 2(1 - \cos\alpha_0)] > 0 \quad (6.189)$$

Por supuesto las variaciones de V_g y V_c y por lo tanto de E provienen del trabajo muscular del niño. La variación δV_c implica que aumenta la energía cinética del columpio, esto es aumenta la velocidad y por ende la velocidad angular.

Al llegar al punto de máxima elongación $\alpha = \alpha_0$ (punto 4 en la Fig. 6.25) el niño flexiona las piernas y con eso aleja en $\delta\ell$ al centro de masa del eje de giro, volviendo a la distancia inicial. Pero ahora $\dot{\alpha} = 0$ y por lo tanto

⁹ La energía potencial centrífuga no es otra cosa que la energía cinética que se observa desde un referencial inercial.

$$\delta V_g = -mg\delta\ell \cos\alpha_0 \quad , \quad \delta V_c = 0 \quad (6.190)$$

y la variación de la energía mecánica es

$$\delta E'' = -mg\delta\ell \cos\alpha_0 < 0 \quad (6.191)$$

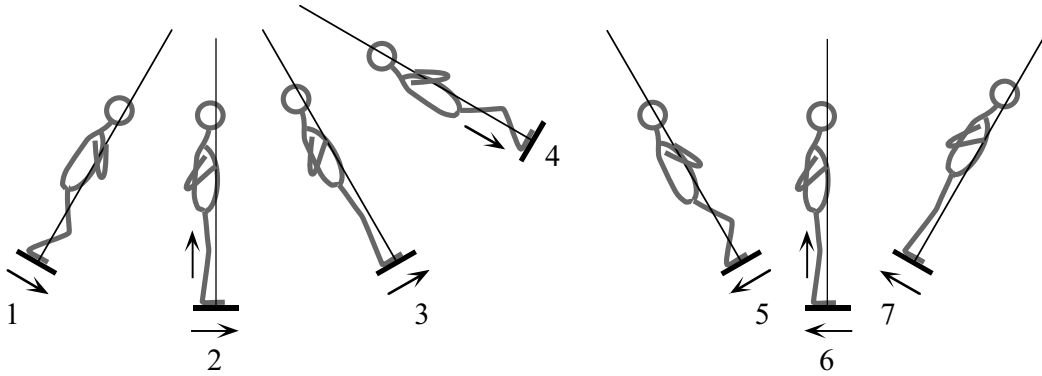


Fig. 6.24. Al estirar (2 y 6) y encoger (4) las piernas el niño acerca y aleja el centro de masa del sistema del eje de giro y así cambia la longitud del péndulo. De resultados de esto la energía mecánica del sistema (y por lo tanto la amplitud de las oscilaciones) varía.

Así el niño recuperó su configuración inicial, pero la energía sufrió un aumento neto dado por

$$\delta E = \delta E' + \delta E'' = 3mg\delta\ell(1 - \cos\alpha_0) \quad (6.192)$$

Esa es la ganancia de energía en la media oscilación hacia adelante (en la cual $\dot{\alpha} > 0$). Si se repiten los movimientos en la siguiente media oscilación cuando el columpio se mueve hacia atrás (puntos 5, 6 y 7 en la Fig. 6.24) se tendrá otro aumento igual de la energía mecánica. Por lo tanto en una oscilación completa el aumento de energía es

$$\Delta E = 2\delta E = 6mg\delta\ell(1 - \cos\alpha_0) \quad (6.193)$$

Como la energía mecánica total vale

$$E = mg\ell(1 - \cos\alpha_0) \quad (6.194)$$

resulta que la variación relativa de E es

$$\Delta E / E = 6\delta\ell / \ell \quad (6.195)$$

de manera que el proceso es muy eficiente, lo que explica porqué con pocos enviones se logran oscilaciones de gran amplitud. Este mecanismo de amplificación se llama *excitación paramétrica*, porque consiste en variar un parámetro (la longitud ℓ del péndulo). Cabe aclarar que la excitación paramétrica funciona solamente si el columpio está oscilando. No sirve para partir del reposo. Para eso es preciso recurrir al procedimiento que describimos antes. También conviene aclarar que el niño puede lograr la excitación paramétrica columpiándose en posición sentada, pero en este caso el desplazamiento del centro de masa es menor y por lo tanto la magnitud del efecto es también menor. Si el niño realiza los movimientos al revés, esto es si encoge las piernas cuando llega al punto 2 y las estira al llegar al punto 4 los signos de $\delta E'$, $\delta E''$ y ΔE se in-

vierten y por lo tanto el columpio pierde energía y disminuye la amplitud de las oscilaciones. Es así como con movimientos sencillos el niño controla a voluntad las oscilaciones del columpio. Con esto completamos nuestra discusión cualitativa. El tratamiento cuantitativo es, desde luego, muy complicado y no lo vamos a presentar. El lector interesado puede consultar los textos¹⁰.

Espacio de las fases

Hasta aquí consideramos solamente oscilaciones lineales (o débilmente no lineales, para cuyo tratamiento se puede usar el método de las pequeñas perturbaciones). En estos casos vimos que se puede siempre encontrar soluciones generales pues gracias a la linealidad de las ecuaciones del movimiento vale el principio de superposición, de modo que toda combinación lineal de soluciones es también solución. Sin embargo abundan en la práctica situaciones en las cuales las oscilaciones no son lineales. En esos casos el problema es mucho más difícil ya que no se pueden encontrar soluciones generales y la mayoría de las veces la solución se debe encontrar por integración numérica. Por este motivo las oscilaciones no lineales no se suelen tratar en los textos introductorios a pesar de la importancia del tema. Esta omisión podía ser aceptable en el pasado pero hoy es inadmisibles porque casi todo el mundo dispone de computadoras personales cuya potencia de cálculo permite encarar sin mucha dificultad este tipo de problemas. Es importante recordar que la física de los sistemas macroscópicos es esencialmente no lineal, y muchos fenómenos se pueden describir por medio de ecuaciones lineales sólo haciendo gruesas aproximaciones que valen solamente dentro de un ámbito muy restringido. Entonces si nos limitamos al estudio de estas últimas estamos perdiendo de vista aspectos muy importantes de la realidad. Por eso vamos a indicar la forma de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y luego trataremos algunos ejemplos para que se pueda apreciar la riqueza de fenómenos que aparecen, algunos de los cuales no tienen contraparte dentro del ámbito de los fenómenos lineales. Para tratar estos problemas conviene introducir el concepto de *espacio de las fases*.

Las ecuaciones de movimiento de todo sistema mecánico se pueden siempre escribir como un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias del primer orden en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= f_1(w_1, w_2, \dots, w_n) \\ \dot{w}_2 &= f_2(w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &\dots \\ \dot{w}_n &= f_n(w_1, w_2, \dots, w_n) \end{aligned} \quad (6.196)$$

El sistema (6.196) se dice *autónomo* porque la variable independiente (t) no aparece explícitamente como argumento de las funciones f_1, \dots, f_n . Por ejemplo, la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad (6.197)$$

se puede escribir en la forma (6.196) poniendo $w_1 \equiv x$, $w_2 \equiv v = \dot{x}$, luego $\dot{x} = \dot{w}_1 = w_2$ y se obtiene

¹⁰ Ver por ejemplo D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1971), N. Minovski, *Introduction to Non-Linear Mechanics* (J. W. Edwards, Ann Arbor, 1947), E. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies* (Dover, New York, 1960) y *Dynamics of a System of Rigid Bodies, Advanced Part* (Macmillan, London, 1930) y V. Haag, *Oscillatory Motions* (Wadsworth, Cal., 1962).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x - cv\end{aligned}\quad (6.198)$$

Este sistema de dos ecuaciones del primer orden es equivalente a la única ecuación del segundo orden (6.197). Del mismo modo la ecuación de movimiento de un oscilador forzado

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (6.199)$$

se puede llevar a la forma (6.196) poniendo $w_1 \equiv x$, $w_2 \equiv v = \dot{x}$, $w_3 \equiv t$ y queda

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_0^2 x - cv + f \cos \omega t \\ \dot{t} &= 1\end{aligned}\quad (6.200)$$

Las variables w_1, w_2, \dots, w_n se pueden interpretar como las coordenadas de un *punto* en un espacio de n dimensiones, que se denomina *espacio de las fases* del sistema. En el caso del oscilador amortiguado las coordenadas en el espacio de las fases son x, v y por lo tanto dicho espacio tiene dos dimensiones. En el caso del oscilador forzado las coordenadas son x, v, t y el espacio de las fases es tridimensional.

La solución del sistema (6.196) está dada por

$$\begin{aligned}w_1 &= F_1(w_{10}, w_{20}, \dots, w_{n0}, t) \\ w_2 &= F_2(w_{10}, w_{20}, \dots, w_{n0}, t) \\ &\dots \\ w_n &= F_n(w_{10}, w_{20}, \dots, w_{n0}, t)\end{aligned}\quad (6.201)$$

donde $w_{10} = w_1(t=0)$, $w_{20} = w_2(t=0), \dots$ son las condiciones iniciales. Las (6.201) definen una *curva* o *trayectoria integral* en el espacio de las fases que describe el movimiento.

Si en el problema que estamos considerando se cumple una ley de conservación, esto es si existe una constante de movimiento $C(w_1, w_2, \dots, w_n)$ cuyo valor es C , este hecho se traduce en que existe una relación entre las variables w_1, w_2, \dots, w_n de la forma

$$C(w_1, w_2, \dots, w_n) = C \quad (6.202)$$

Cuando esto ocurre las trayectorias integrales que representan los posibles movimientos del sistema están confinadas a la variedad de $n - 1$ dimensiones del espacio de las fases definida por la (6.202). Si hay varias constantes de movimiento C_1, C_2, \dots, C_j cuyos valores son C_1, C_2, \dots, C_j , se cumplirán j relaciones de la forma

$$C_i(w_1, w_2, \dots, w_n) = C_i \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (6.203)$$

y las trayectorias integrales están contenidas en la variedad de $n - j$ dimensiones definida por las (6.203). Luego la existencia de constantes del movimiento reduce las dimensiones de la variedad sobre la que se encuentran las curvas integrales.

El lector se preguntará para qué sirve este planteo. Hay tres razones por las cuales conviene escribir las ecuaciones del movimiento como un sistema de ecuaciones del primer orden:

- puede ayudar a encontrar una solución exacta del problema,

- la forma (6.196) se presta a argumentos geométricos en el espacio de las fases,
- finalmente, la forma (6.196) es la más conveniente para la integración numérica de las ecuaciones del movimiento (por ejemplo por medio del método de Runge-Kutta, que suele estar implementado en las aplicaciones que se disponen en las computadoras).

Si el espacio de las fases de nuestro problema tiene dos dimensiones las (6.196) se reducen a

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= f_1(w_1, w_2) \\ \dot{w}_2 &= f_2(w_1, w_2)\end{aligned}\quad (6.204)$$

Tomando el cociente entre estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{dw_2}{dw_1} = \frac{f_2(w_1, w_2)}{f_1(w_1, w_2)} \quad (6.205)$$

Esta ecuación se dice autónoma pues en ella no aparece t . Supongamos conocer la solución

$$w_2 = W_2(w_1) \quad (6.206)$$

de la (6.205) que corresponde a las condiciones iniciales w_{10} , $w_{20} = W_2(w_{10})$; entonces de la primera de las (6.204) podemos despejar

$$dt = \frac{dw_1}{f_1[w_1, W_2(w_1)]} \quad (6.207)$$

Integrando esta ecuación resulta

$$t(w_1) = t_0 + \int_{w_{10}}^{w_1} \frac{dw'_1}{f_1[w'_1, W_2(w'_1)]} \quad (6.208)$$

donde $w_{10} = w_1(t_0)$. Invertiendo la (6.208) se obtiene así

$$w_1 = w_1(t) \quad , \quad w_2 = W_2[w_1(t)] \quad (6.209)$$

que es la solución buscada. Entonces el problema de resolver el sistema (6.204) se reduce a encontrar la solución de la única ecuación diferencial del primer orden (6.205), luego de lo cual la solución buscada se obtiene por simple cuadratura.

Cuando el problema (6.204) cumple una ley de conservación $\mathcal{E} = E$ se tendrá que

$$\mathcal{E}(w_1, w_2) = E \quad (6.210)$$

y la solución de la (6.205) está dada en forma implícita por la (6.210). Así en un movimiento unidimensional bajo la acción de una fuerza conservativa $F(x) = -dV(x)/dx$ tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -F(x)/m\end{aligned}\quad (6.211)$$

Luego

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x)}{mv} \quad (6.212)$$

cuya solución es

$$v = W(x) = \pm\sqrt{2[E - V(x)]/m} \quad , \quad E = \text{cte.} \quad (6.213)$$

como se verifica fácilmente. Esta solución se puede obtener de la conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \quad (6.214)$$

Por lo tanto la conservación de la energía mecánica permite en este caso dibujar de inmediato las trayectorias integrales. Notar sin embargo que esto no alcanza para conocer la solución del problema pues para eso es preciso encontrar $x(t)$. De la (6.213) obtenemos

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx'}{W(x')} \quad (6.215)$$

Invertiendo la (6.215) obtenemos entonces la solución completa del problema en la forma

$$x = x(t) \quad , \quad v = W[x(t)] \quad (6.216)$$

Veamos ahora algunos ejemplos para familiarizarnos con el espacio de las fases.

El oscilador armónico lineal

Consideremos el oscilador armónico lineal que ya tratamos al comienzo de este Capítulo y que se describe por medio de las (6.198), que reproducimos aquí:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x - cv \end{aligned} \quad (6.217)$$

En ausencia de amortiguamiento ($c = 0$) se conserva la energía mecánica y por lo tanto

$$\omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 a^2 = 2E/m = \text{cte.} \quad (6.218)$$

que podemos escribir como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega a}\right)^2 = 1 \quad (6.219)$$

La (6.218) (o la (6.219)) es la ecuación de las trayectorias integrales (Fig. 6.25a).

En presencia de amortiguamiento no se conserva la energía mecánica y entonces para dibujar las curvas integrales es preciso integrar la ecuación autónoma

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\omega^2 x + cv}{v} \quad (6.220)$$

Esto simple aunque algo laborioso, pero nos podemos ahorrar el trabajo ya que conocemos la solución. Si el amortiguamiento es débil ($c < 2$) la solución $x(t)$ está dada por la (6.18), de la cual podemos obtener $v(t)$ derivándola respecto de t y entonces $x(t)$, $v(t)$ nos dan la trayectoria integral en forma paramétrica. Del mismo modo podemos obtener las trayectorias integrales para amortiguamiento crítico y amortiguamiento fuerte. Las curvas integrales para amortiguamiento débil son siempre espirales y para $t \rightarrow \infty$ llegan al origen; las curvas para amortiguamiento crítico y fuerte llegan también al origen para $t \rightarrow \infty$ pero sin dar vueltas alrededor de él¹¹. En la Fig. 6.23 se dan ejemplos de estas trayectorias, en todos los casos para la condición inicial $x(0) = a/\sqrt{2}$, $v(0) = -\omega a/\sqrt{2}$; con otras condiciones iniciales se obtienen curvas diferentes.

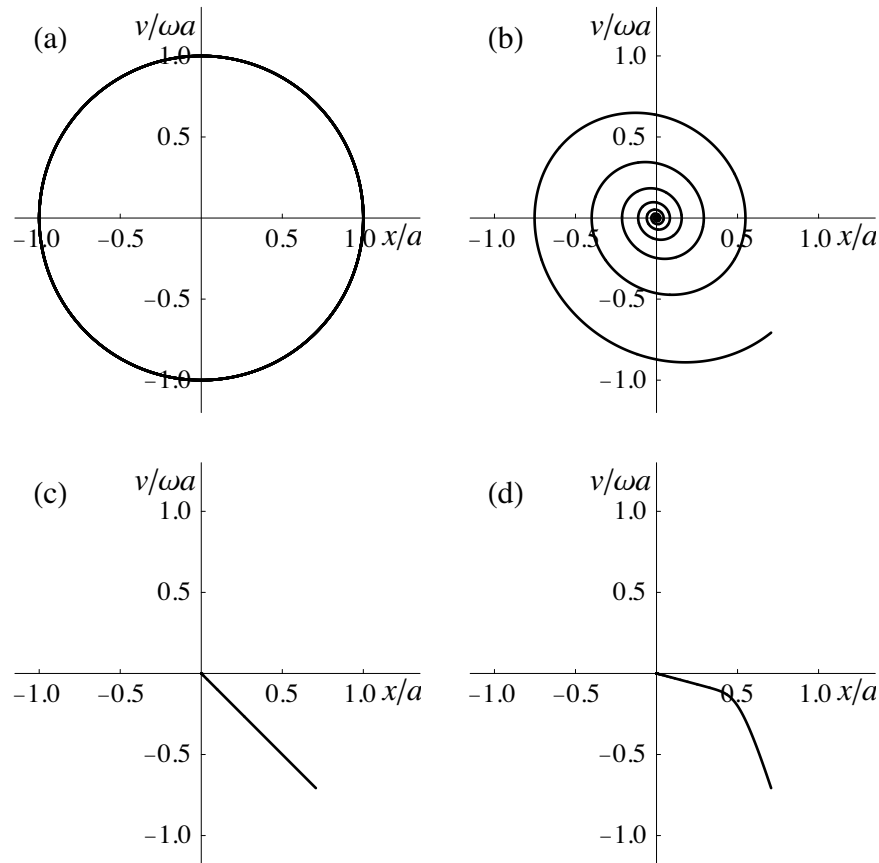


Fig. 6.25. Trayectorias integrales de un oscilador armónico sin amortiguamiento (a), con amortiguamiento débil (b), amortiguamiento crítico (c) y amortiguamiento fuerte (d).

Oscilador con amortiguamiento cuadrático

Si una masa sometida a la acción de un resorte se mueve en el seno de un fluido en régimen turbulento la fuerza de arrastre es $F_a = -\rho\dot{x}|\dot{x}|\ell^2$, donde ℓ es la dimensión lineal característica del cuerpo y ρ es la densidad del fluido. Ahora la ecuación de movimiento no es la (6.13) sino

$$\ddot{x} + q\dot{x}|\dot{x}| + \omega^2 x = 0 \quad , \quad q = \rho\ell^2 / m \quad (6.221)$$

¹¹ El origen del plano de fase es un punto singular de la (6.220). Su naturaleza depende de c , y determina el comportamiento de las curvas integrales en su entorno. En el caso $c=0$ el origen es un *centro*, para $c < 2$ es un *foco*, para $c > 2$ es un *nodo* cuyos ejes son $v = -(\gamma - \beta)x$ y $v = -(\gamma + \beta)x$ y para $c = 2$ es un *nodo logarítmico* cuyo único eje es $v = -\gamma x = -\omega x$.

Esta ecuación no lineal se debe integrar numéricamente. Para eso la escribimos en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x - qv|v|\end{aligned}\quad (6.222)$$

Podemos integrar este sistema con el método de Runge-Kutta. La solución para las condiciones iniciales $x(0) = a/\sqrt{2}$, $v(0) = -\omega a/\sqrt{2}$ se muestra en la Fig. 6.26a. Se ve que el movimiento es una oscilación cuyo amortiguamiento es menor a medida que crece t y disminuye la amplitud de las oscilaciones. Esto ocurre porque el arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad¹².

La trayectoria en el espacio de las fases se aprecia en la Fig. 6.26b. Es una espiral, pero diferente a la del amortiguamiento lineal débil ya que se acerca al origen mucho más lentamente.

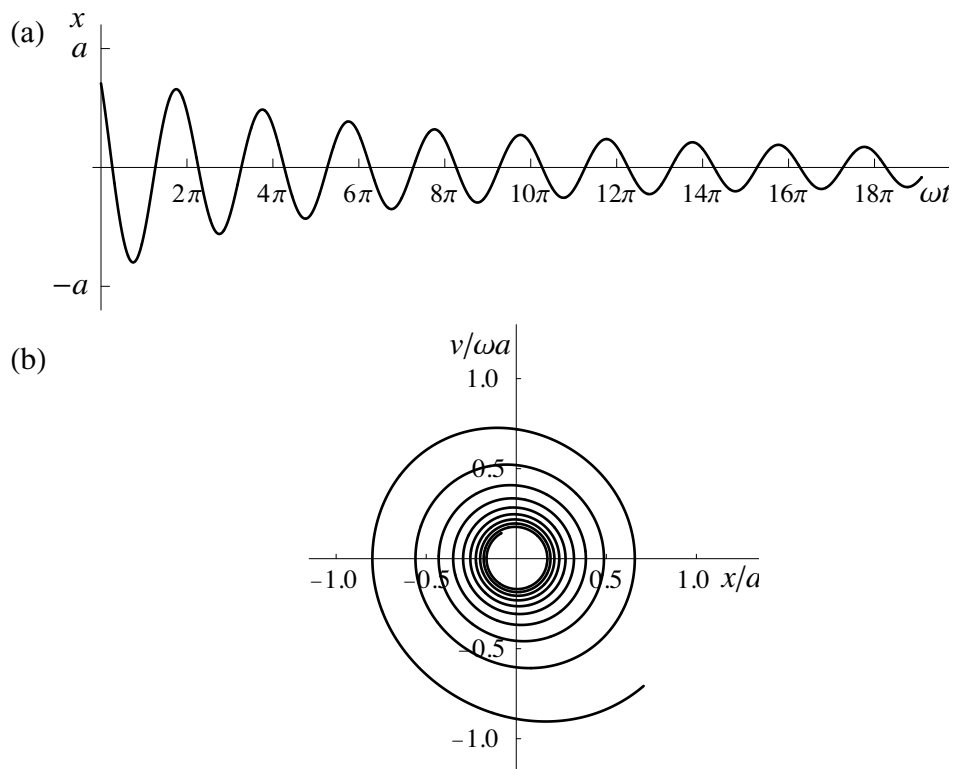


Fig. 6.26. Oscilador con amortiguamiento cuadrático: (a) desplazamiento, (b) trayectoria en el espacio de fases.

Oscilador con amortiguamiento friccional

Consideremos una masa apoyada sobre una superficie horizontal, que se desplaza bajo la acción de un resorte. La fuerza de rozamiento dinámico se opone al movimiento y provoca el amortiguamiento del mismo. La ecuación del movimiento es entonces

$$\ddot{x} + f \text{Sig}(\dot{x}) + \omega^2 x = 0 \quad , \quad f = \mu_d g \quad (6.223)$$

donde $\text{Sig}(\dot{x}) = 1$ si $\dot{x} > 0$, $\text{Sig}(\dot{x}) = -1$ si $\dot{x} < 0$ y $\text{Sig}(\dot{x}) = 0$ si $\dot{x} = 0$ y μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico. Podemos escribir la (6.223) en la forma equivalente

¹² Por supuesto cuando la velocidad es muy pequeña el arrastre deja de ser turbulento y entonces la (6.221) ya no describe correctamente el fenómeno.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \begin{cases} -\omega^2 x - f & , v > 0 \\ -\omega^2 x + f & , v < 0 \end{cases} \quad (6.224)$$

La ecuación de las trayectorias integrales en el espacio de las fases es entonces

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\omega^2 x + f}{v} \quad , v > 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\omega^2 x - f}{v} \quad , v < 0 \quad (6.225)$$

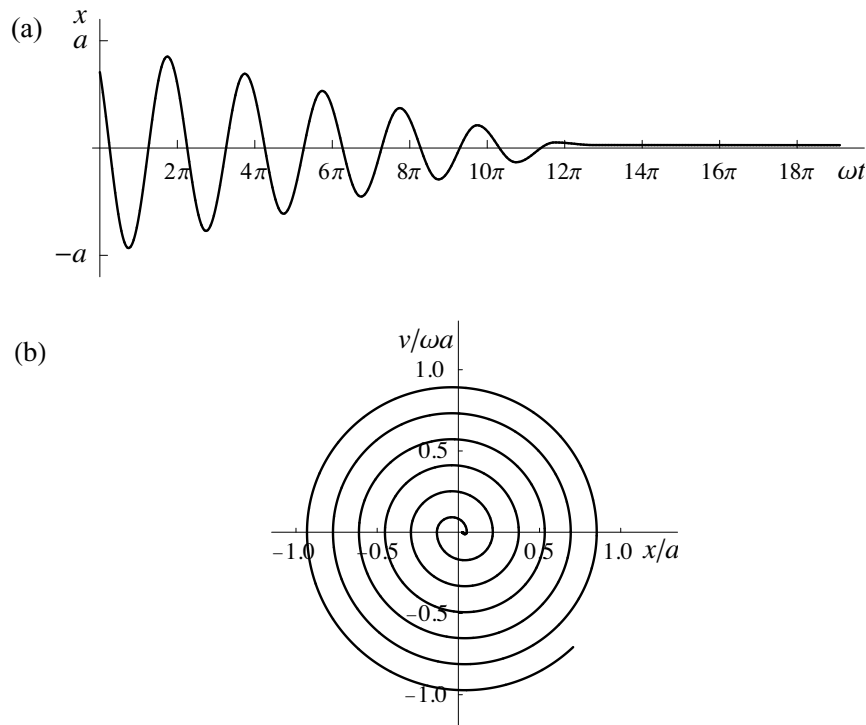


Fig. 6.27. Oscilador con amortiguamiento friccional: (a) desplazamiento, (b) trayectoria en el espacio de fases.

La solución de este problema se puede dar en forma cerrada¹³ pues es evidente que en el diagrama $(x/a, v/\omega a)$ las curvas integrales para $v > 0$ son semicircunferencias con centro en $x_- = -f/\omega^2$ mientras que para $v < 0$ son semicircunferencias con centro en $x_+ = +f/\omega^2$. La curva integral es entonces una espiral ya que el diámetro de sucesivas semicircunferencias disminuye en la cantidad $2f/\omega^2$ (Fig. 6.27b). Debido a esto la amplitud de las oscilaciones (Fig. 6.27a) disminuye linealmente con el tiempo. El movimiento cesa cuando la velocidad se anula para x tal que $|x| \leq x_0 \equiv \mu_e g / \omega^2 = \mu_e m g / k$, donde μ_e es el coeficiente de rozamiento estático y k la constante del resorte. La Fig. 6.27 se ha dibujado para el caso $\mu_e = \mu_d$ y corresponde a las condiciones iniciales $x(0) = a/\sqrt{2}$, $v(0) = -\omega a/\sqrt{2}$

¹³ Para abreviar no damos las fórmulas, que el lector puede encontrar en D. Quadling y A Ramsay, *Introduction to Advanced Mechanics* (Bell, London, 1962).

Movimientos de amplitud arbitraria del péndulo

El movimiento del péndulo se describe por medio de la ecuación no lineal

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (6.226)$$

Usando en vez de t la variable independiente $\tau = t(g/\ell)^{1/2}$ la (6.226) se escribe como

$$\ddot{\alpha} + \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (6.227)$$

donde los puntos indican derivadas respecto de τ . Con $y \equiv \dot{\alpha}$ llevamos la (6.227) a la forma

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= y \\ \dot{y} &= -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (6.228)$$

y eliminando τ entre estas ecuaciones obtenemos la ecuación autónoma

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{y} \quad (6.229)$$

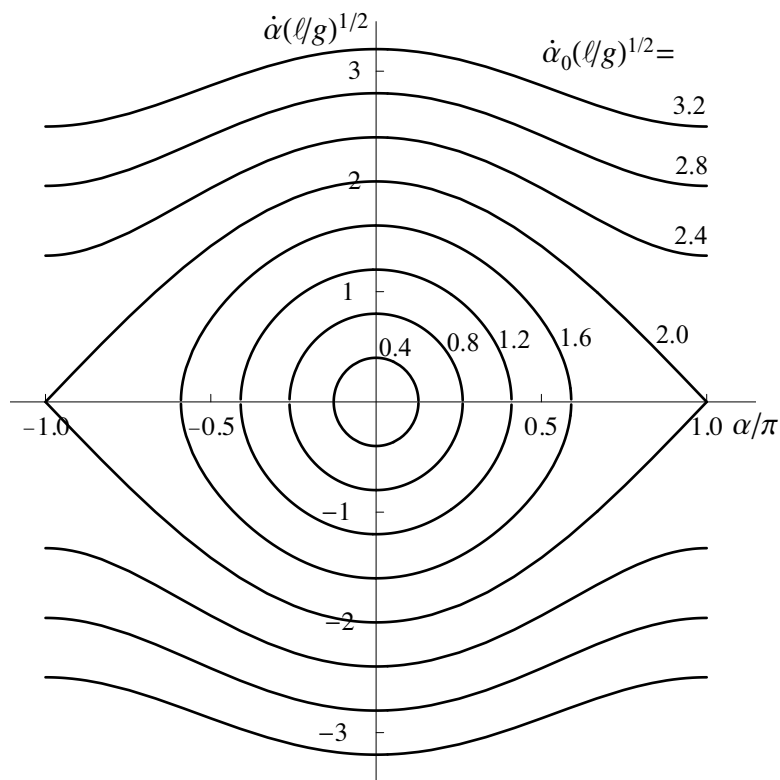


Fig. 6.28. Trayectorias en el espacio de las fases del péndulo para diferentes valores de la energía mecánica. Se ve que hay dos clases de movimientos: cuando $\dot{\alpha}_0 < 2\omega$ el movimiento es oscilatorio mientras que si $\dot{\alpha}_0 > 2\omega$ el movimiento es una rotación alrededor del punto de suspensión.

La (6.229) se integra de inmediato y da

$$y^2 = y_0^2 - 2(1 - \cos \alpha) \quad , \quad y_0^2 = \dot{\alpha}_0^2 = v_0^2 / g\ell \quad (6.230)$$

donde v_0 es la velocidad de la masa cuando $\alpha = 0$. Este resultado se podría haber obtenido de inmediato ya que el sistema es conservativo y la (6.230) no es más que la expresión de la conservación de la energía mecánica como el lector puede verificar fácilmente. En la Fig. 6.28 se pueden apreciar las curvas integrales dadas por la (6.230) para diferentes valores de y_0 , esto es de la energía. Se puede ver que hay dos clases de movimiento: si $y_0 < 2$ el movimiento es oscilatorio, con una amplitud α_0 dada por

$$\cos \alpha_0 = 1 - y_0^2 / 2 \quad (6.231)$$

mientras que si $y_0 > 2$ el movimiento no es oscilatorio y el péndulo gira¹⁴ siempre en el mismo sentido alrededor del eje de suspensión.

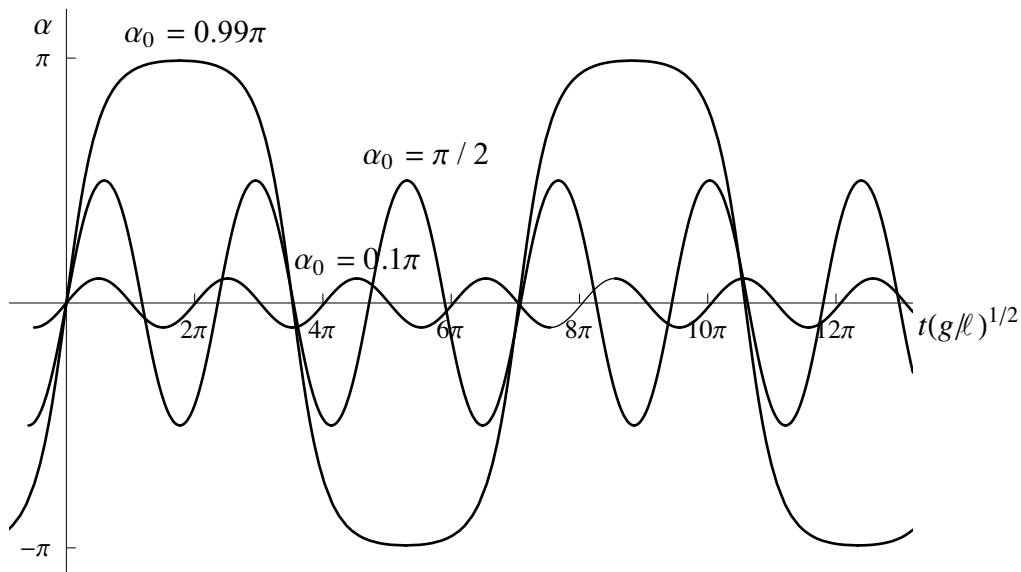


Fig. 6.29. Oscilaciones del péndulo para diferentes valores de la amplitud.

Conociendo la solución (6.230) de la ecuación autónoma, para obtener el movimiento del péndulo hace falta calcular la integral de la (6.228), esto es de

$$\tau = \tau_0 + \int_{\alpha(\tau_0)}^{\alpha(\tau)} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\cos \alpha' - \cos \alpha_0}} \quad (6.232)$$

La (6.232) se puede expresar en términos de ciertas funciones llamadas integrales elípticas, cuyas propiedades se pueden encontrar en los tratados¹⁵. En la Fig. 6.29 se muestran algunas soluciones para $y_0 < 2$. Se puede ver que las oscilaciones no son armónicas, salvo en el límite $\alpha_0 \rightarrow 0$, cuando las curvas integrales de la Fig. 6.28 tienden a ser circunferencias. El período de las oscilaciones crece con la amplitud y tiende al infinito para $\alpha_0 \rightarrow \pi$.

El valor del período está dado por

¹⁴ Desde luego estos resultados requieren que ℓ se mantenga constante, por lo tanto valen solamente si el péndulo consiste de una varilla rígida que puede girar alrededor del eje del cual está suspendido y no se aplica al caso en que la masa está suspendida de un hilo flexible.

¹⁵ Ver por ejemplo M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1970).

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} \quad (6.233)$$

y se muestra en la Fig. 6.30, donde se representa también el valor aproximado (6.99) que obtuvimos con la teoría de pequeñas perturbaciones. Se puede ver que (6.99) es una buena aproximación pues la diferencia con el valor exacto se aprecia en el gráfico recién para $\alpha_0 \geq 0.4\pi$.

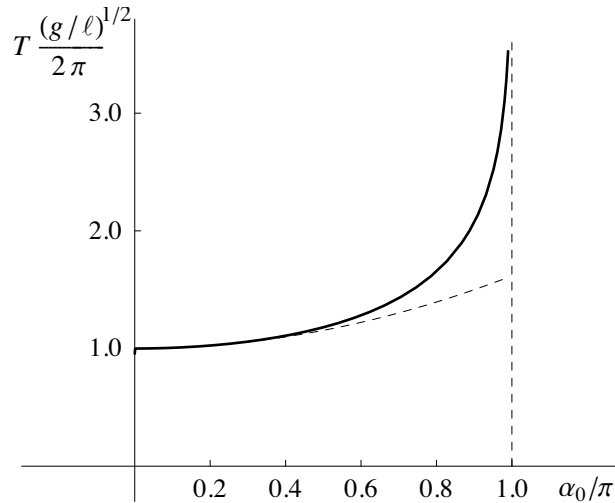


Fig. 6.30. Período del péndulo en función de la amplitud de las oscilaciones. Con línea de trazos se muestra el resultado aproximado (6.99).

Movimiento caótico de un oscilador forzado que rebota

Consideremos una masa m suspendida de un resorte cuya constante es k , que está sometida a una fuerza que varía sinusoidalmente con el tiempo y a una fuerza de arrastre proporcional a la velocidad $F_a = C\dot{x}$. La frecuencia ω de la fuerza excitadora puede ser igual o diferente de la frecuencia propia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador. Este sistema mecánico se puede implementar imponiendo al punto de suspensión x_s del resorte un movimiento oscilante $x_s = Fm^{-1}\omega^{-2} \cos(\omega t + \delta)$ con F , δ constantes (Fig. 6.31). Así, si describimos el movimiento en un referencial (no inercial) que se mueve junto al punto de suspensión, m está sometida a la fuerza ficticia $-m\ddot{x}_s = F \cos(\omega t + \delta)$. Si medimos la posición x de la masa a partir de la posición de equilibrio, tenemos el problema de oscilaciones forzadas que estudiamos al comienzo de este Capítulo, donde mostramos que después de un transitorio inicial se alcanza un régimen estacionario en el que la masa oscila con la frecuencia ω alrededor de $x = 0$, con una amplitud A y un desfase φ respecto de la fuerza excitadora dados por la ec. (6.44). La novedad es que ahora vamos a colocar en el camino de la masa una barrera rígida de masa infinita, de modo que al chocar con la misma la masa rebota elásticamente invirtiendo su velocidad. La barrera es solidaria con la suspensión del resorte y está ubicada en $x = x_b$. La presencia de la barrera hace que el problema sea no lineal y como veremos eso da lugar a un comportamiento muy complejo.

La ecuación del movimiento del oscilador con la barrera (denominado *oscilador de Bender*) es claramente

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t + \delta) \quad , \quad x \geq x_b \quad (6.234)$$

donde $c = C/m$ y $f = F/m$. La diferencia entre esta ecuación y la (6.30) es que la (6.234) vale solamente para $x \geq x_b$, es decir entre un rebote y el siguiente.

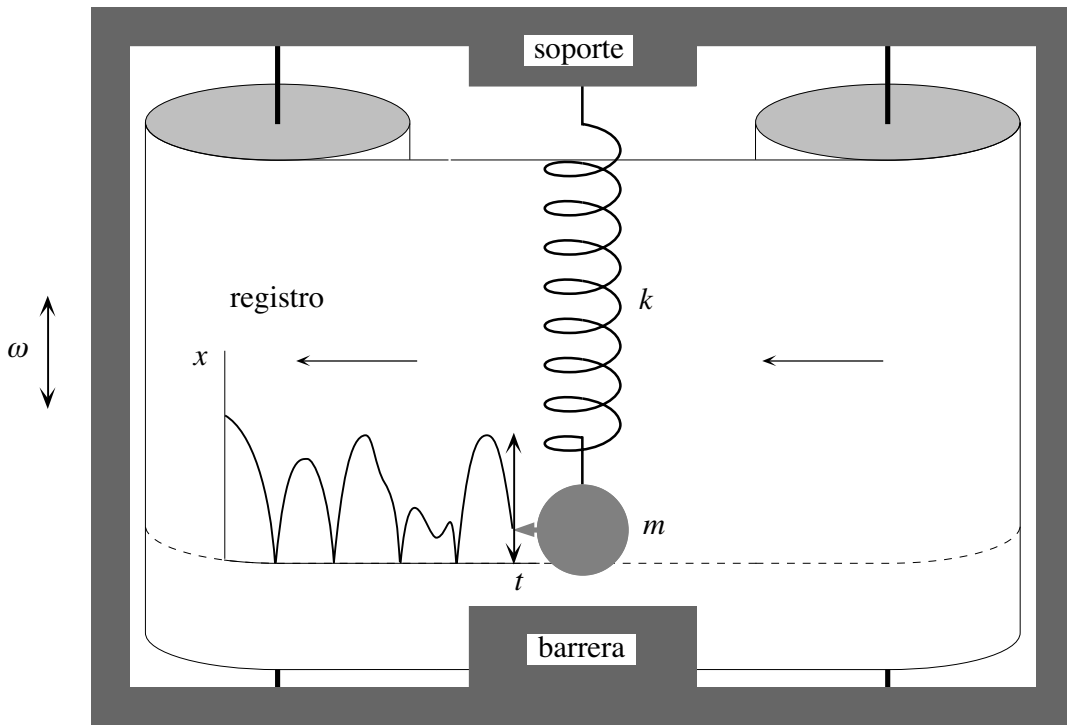


Fig. 6.31. Implementación del oscilador de Bender: el punto de suspensión oscila con la frecuencia ω y en el camino de la masa hay una barrera solidaria con el soporte del resorte, donde la masa rebota elásticamente invirtiendo su velocidad. La masa tiene una pluma que registra la posición $x(t)$ en una cinta de papel que se mueve horizontalmente.

Mientras $x > x_b$ el movimiento se puede describir analíticamente, pues la solución de la (6.234) a partir de condiciones iniciales arbitrarias de la forma

$$x = x_i > x_b \quad , \quad v = v_i \quad , \quad t = 0 \quad (6.235)$$

es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + e^{-ct/2} [a_1 \cos(\omega' t) + a_2 \sin(\omega' t)] \quad (6.236)$$

donde

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad , \quad \varphi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) + \delta \quad (6.237)$$

de acuerdo con las (6.44), y

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - c^2/4} \quad , \quad a_1 = x_0 - A \cos \varphi \quad , \quad a_2 = \frac{v_0 + ca_1/2 - A\omega \sin \varphi}{\omega'} \quad (6.238)$$

como resulta de (6.19) y (6.21). El primer término del miembro derecho de la (6.236) es la solución particular de la (6.234) que describe el régimen estacionario que se tendría si no existiera la

barrera mientras que el segundo término describe el transitorio que tiene lugar al comenzar el movimiento. Trataremos sólo el caso de amortiguamiento débil, esto es $c < 2\omega_0$.

La solución (6.236) permite describir el movimiento a partir del comienzo del fenómeno y hasta el primer rebote. Para arrancar el cálculo vamos a suponer que $\delta = 0$ en (6.234) y en (6.237) y que se cumplen las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 > x_b \quad , \quad v(0) = v_i = 0 \quad (6.239)$$

Llamaremos $x^{(0)}(t)$ a la correspondiente solución, que vale en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$, donde t_1 es el instante del primer rebote, definido por la condición

$$x^{(0)}(t_1) = x_b \quad (6.240)$$

El valor de t_1 se tiene que obtener numéricamente y es la menor de las raíces positivas de la ecuación trascendente (6.240). Conociendo t_1 podemos calcular la velocidad $v^{(0)}(t_1)$ de la masa cuando choca con la barrera y cambiarle signo para obtener las condiciones iniciales del movimiento después del rebote. Estas condiciones son, obviamente,

$$x(0) = x_b \quad , \quad v(0) = -v^{(0)}(t_1) \quad (6.241)$$

Usando estas condiciones iniciales en la (6.236), en la cual ahora tenemos que poner

$$\delta = \delta_1 = \omega t_1 \quad (6.242)$$

podemos obtener el movimiento $x^{(1)}(t)$ entre el primer rebote y el segundo rebote, que ocurre en el instante t_2 dado por la menor de las raíces positivas de la ecuación

$$x^{(1)}(t_2) = x_b \quad (6.243)$$

Podemos iterar este procedimiento y, en general, la solución $x^{(j)}(t)$ entre el j -ésimo rebote y el siguiente se obtiene de la (6.236) con las condiciones iniciales

$$x(0) = x_b \quad , \quad v(0) = -v^{(j-1)}(t_j) \quad (6.244)$$

y con

$$\delta = \delta_j = \omega t_j \quad (6.245)$$

donde t_j es la menor de las raíces positivas de la ecuación

$$x^{(j-1)}(t_j) = x_b \quad (6.246)$$

De esta manera podemos construir la solución como una sucesión de tramos $x^{(0)}(t)$, $x^{(1)}(t)$, ..., $x^{(j)}(t)$, ... y continuar así por la cantidad de tramos que se desee. En cada tramo la solución es analítica, pero para encontrar sus condiciones iniciales y su correspondiente fase inicial δ_j tenemos que resolver previamente la (6.246) para determinar la duración t_j del tramo precedente. El lector notará que estamos midiendo t a partir del último rebote. El tiempo t' transcurrido desde el comienzo del fenómeno está dado para cada tramo j por

$$t' = t + \sum_{i=0}^{i=j} t_i \quad (6.247)$$

También se debe observar que el sistema no llega *nunca* al régimen estacionario que se alcanzaría si no existiera la barrera, porque después de cada rebote comienza un nuevo transitorio que no se llega a amortiguar en el intervalo hasta el siguiente rebote.

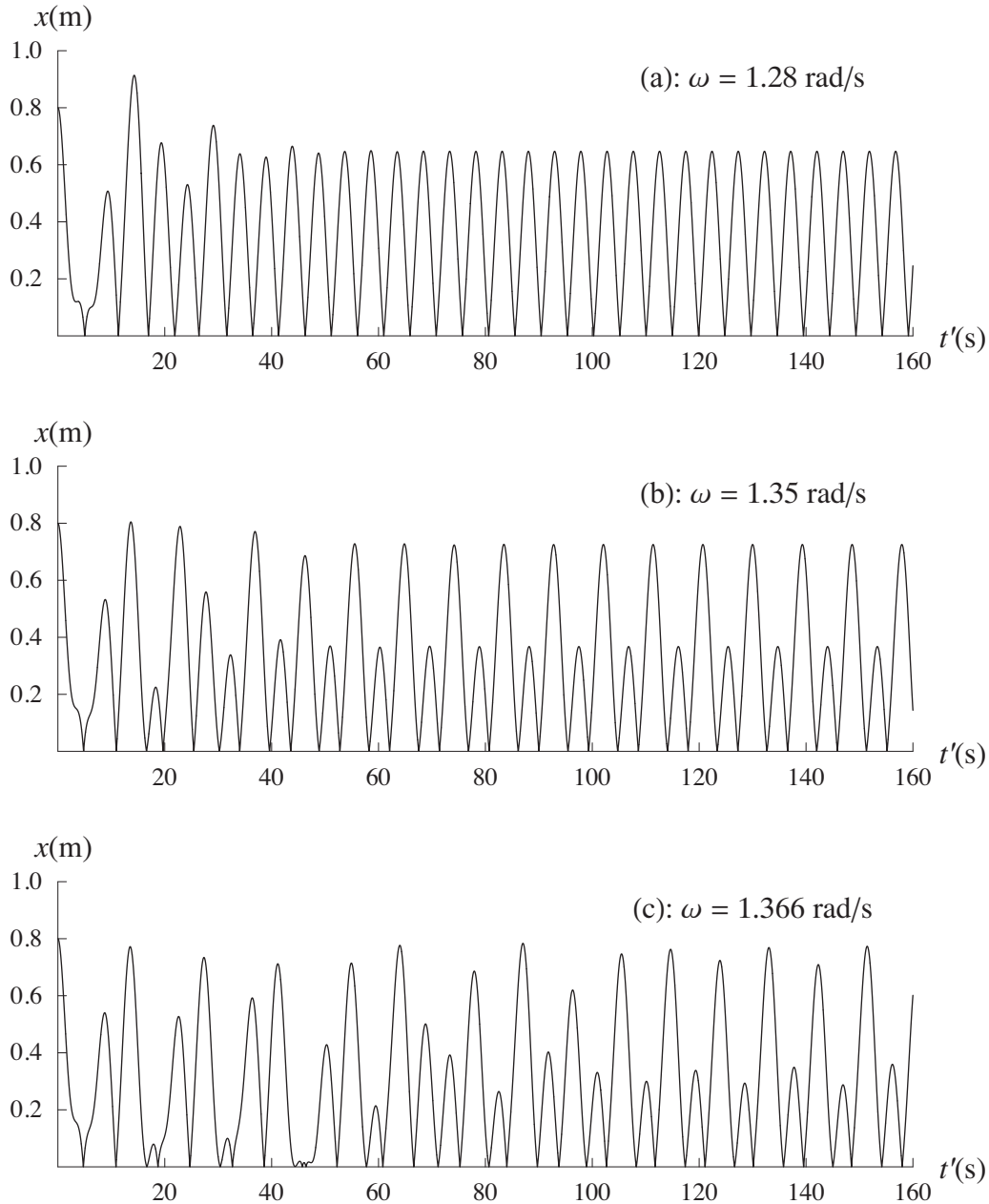


Fig. 6.32. Regímenes estacionarios del oscilador con barrera ($m = 4 \text{ kg}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $C = 1 \text{ Ns/m}$, $F = 1 \text{ N}$, $x_b = 0$, $x_0 = 0.8 \text{ m}$).

Para estudiar el fenómeno hay que considerar un número muy grande de rebotes y el cálculo se debe hacer por medio de una computadora. No entraremos en los detalles y nos limitaremos a mostrar los resultados. En todos los casos hemos supuesto $m = 4 \text{ kg}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $C = 1 \text{ Ns/m}$, $F = 1 \text{ N}$, con lo que $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$. Además se ha supuesto $x_b = 0$.

Duplicaciones del período y caos

Aquí no haremos un estudio completo¹⁶ del oscilador de Bender y nos limitaremos a reseñar algunos aspectos de las soluciones. En determinadas circunstancias el sistema tiende a un régimen estacionario de movimiento periódico. En la Fig. 6.32 se muestran algunas soluciones de este tipo, todas calculadas a partir de la condición inicial $x_0 = 0.8\text{m}$, $v_0 = 0$.

Para $\omega = 1.28\text{ rad/s}$ (Fig. 6.32a) se ve que a luego de $t' \approx 50\text{ s}$ (unos 10 tramos) se alcanza un régimen estacionario en que todos los tramos llegan a la misma altura. Este régimen estacionario es un movimiento periódico cuyo período $2\pi/\omega \approx 4.9087\text{ s}$, es igual al de la fuerza excitadora. Notar que este régimen difiere del que se tendría sin la barrera, pues su amplitud es 3.69 veces *mayor*. Esto se relaciona con que el movimiento está en fase con la fuerza excitadora, mientras que si no existiera barrera estaría casi en contrafase. Si aumentamos la frecuencia excitadora, cerca de $\omega = 1.32\text{ rad/s}$ aparece un nuevo régimen estacionario en el que m rebota a dos alturas diferentes. Esto se ve en la Fig. 6.32b, que corresponde a $\omega = 1.35\text{ rad/s}$. El movimiento es todavía periódico, pero ahora se necesitan *dos* tramos para completar un ciclo: en otras palabras hubo una *bifurcación* que produjo una *duplicación* del período. Cerca de $\omega = 1.37\text{ rad/s}$ ocurre una nueva bifurcación a partir de la cual el sistema requiere 4 tramos para completar un ciclo, como se ve en la Fig. 6.32c, calculada para $\omega = 1.366\text{ rad/s}$. Si se sigue aumentando ω aparecen más bifurcaciones que hacen que se requieran $2^n = 8, 16, 32, \dots$ tramos para completar un período (n es el orden de la bifurcación). Las sucesivas bifurcaciones ocurren para frecuencias cada vez más próximas, de modo tal que cerca de $\omega = 1.37\text{ rad/s}$ ha ocurrido un número infinito de bifurcaciones y el período es *infinito*. El movimiento se ha vuelto *caótico* y es aperiódico pues no se repite nunca. En la Fig. 6.33 se da un ejemplo calculado para $\omega = 1.41\text{ rad/s}$.

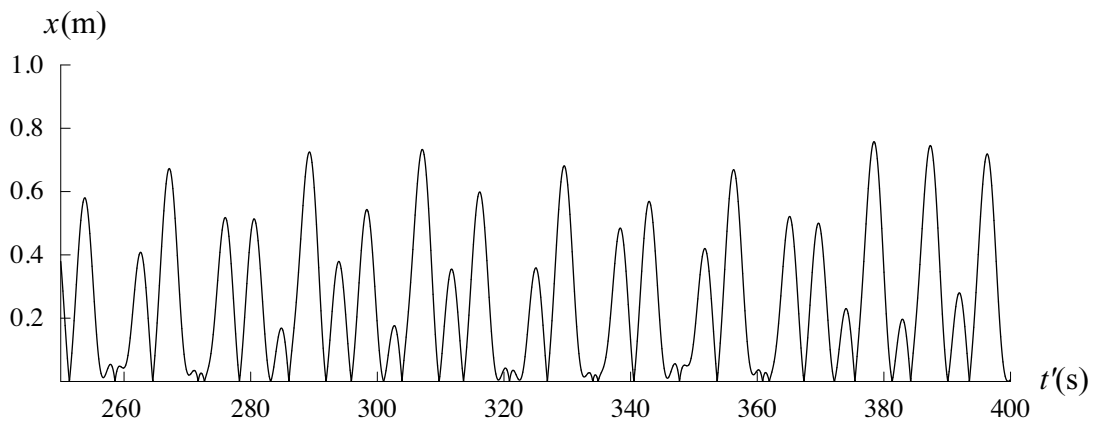


Fig. 6.33. Movimiento caótico ($\omega = 1.41\text{ rad/s}$, $x_0 = 1\text{ m}$).

En la Fig. 6.34 se muestran las trayectorias en el espacio de las fases de las soluciones para $\omega = 1.28, 1.35, 1.366$ y 1.41 rad/s , calculadas con la condición inicial $x_0 = 1\text{ m}$, $v_0 = 0$ (se descartaron los primeros 100 tramos para que desaparezca el efecto de las condiciones iniciales).

¹⁶ El lector puede encontrar un estudio detallado de este interesante problema en el artículo de J. S. Walker y T. Soule, *Chaos in a simple impact oscillator: the Bender bouncer*, Am. J. Phys. **64**(4), 397-409, 1996. Una versión en castellano casi idéntica se encuentra en J. S. Walker, *Caos: un desorden ordenado*, en el libro *Física para Científicos e Ingenieros* de P. A. Tipler, Editorial Reverté, 1999. Ver también *El oscilador forzado que rebota* (<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/caotico/caotico.htm#amplitud>) en la bonita página *Física con ordenador* de A. F. García.

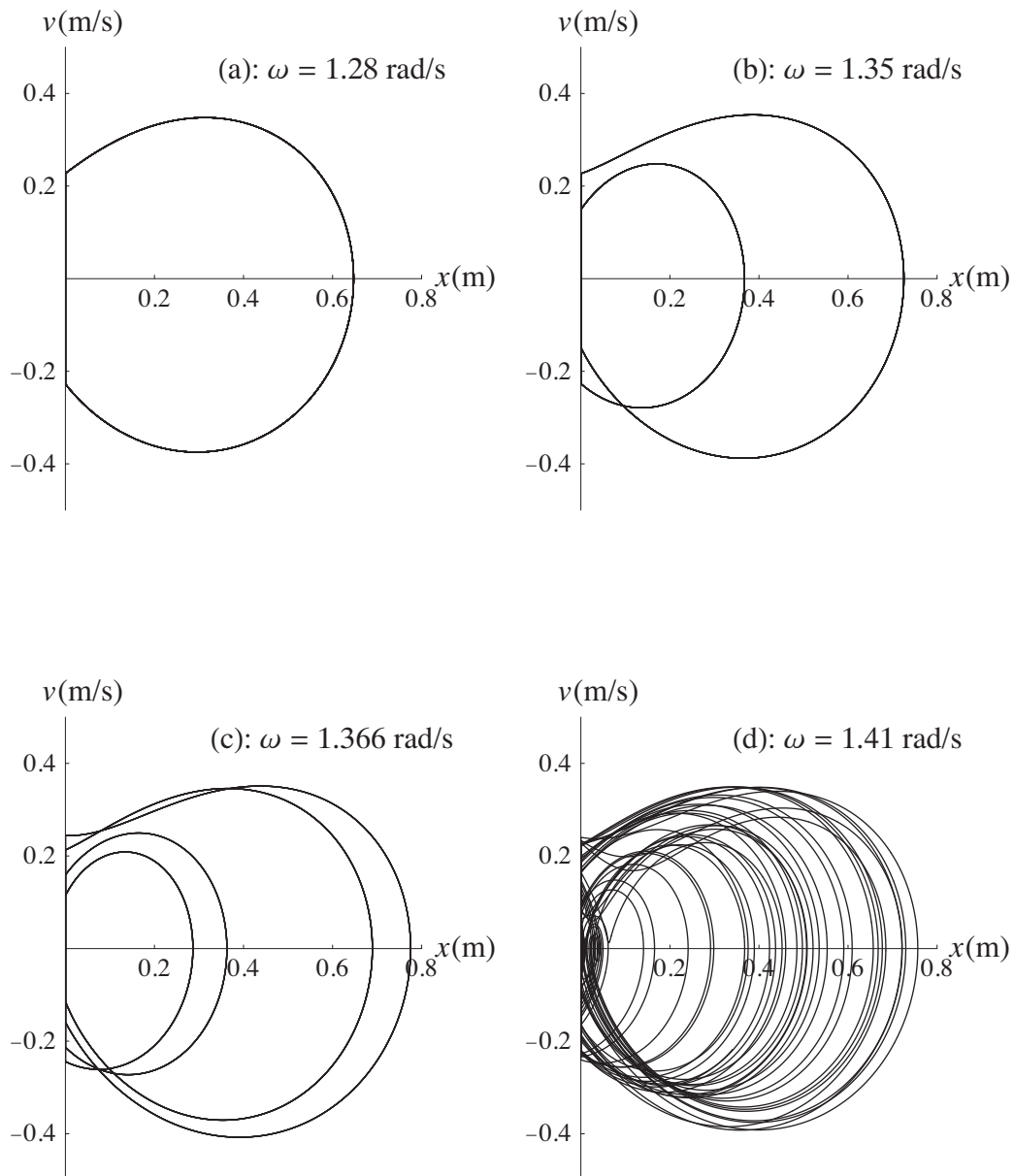


Fig. 6.34. Trayectorias en el espacio de las fases de las soluciones para $\omega = 1.28, 1.35, 1.366$ y 1.41 rad/s, calculadas con la condición inicial $x_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ (se descartaron los primeros 100 tramos para que desaparezca el efecto de las condiciones iniciales).

Característica del caos: extrema sensibilidad a las condiciones iniciales

En la Fig. 6.35a se muestran los primeros tramos de 6 soluciones para $\omega = 1.28$ rad/s y diferentes condiciones iniciales ($x_0 = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ y 0.01 m). Se ve que después de una decena de tramos todas estas soluciones coinciden, indicando que el régimen estacionario es *estable* y no guarda recuerdo de las condiciones iniciales.

El comportamiento de las soluciones caóticas es muy diferente. En la Fig. 6.35b se muestran 4 soluciones para $\omega = 1.41$ rad/s y $x_0 = 1, 1.0001, 1.00001$ y 1.000001 m. En contraste con lo que ocurre para $\omega = 1.28$ rad/s, estas soluciones comienzan a diferir muy rápidamente y se hacen completamente distintas, pese a que la diferencia entre las condiciones iniciales es muy pequeña. Esta extrema sensibilidad a las condiciones iniciales *define* el comportamiento caótico y tiene una consecuencia muy importante. En efecto, las condiciones iniciales no se pueden conocer con

precisión absoluta sino solamente dentro del margen de error de las medidas. Por precisas que éstas sean el error no es nulo y su efecto se amplifica exponencialmente lo que implica que *en presencia de caos el comportamiento del sistema en el largo plazo es impredecible*¹⁷. En términos cuantitativos, si la incerteza de la posición de la masa es del orden del diámetro de un núcleo atómico, bastarían pocos minutos de movimiento para que sea imposible predecir su posición.

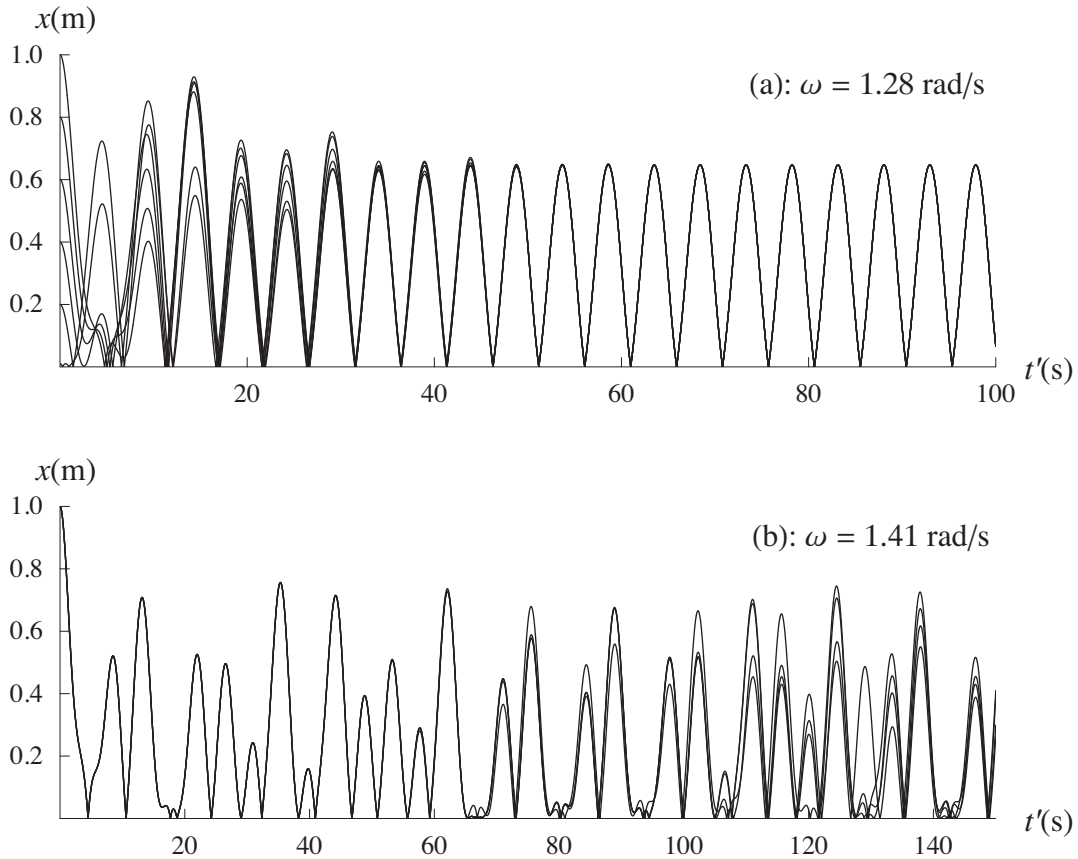


Fig. 6.35. (a) Soluciones periódicas para $\omega = 1.28 \text{ rad/s}$ y diferentes condiciones iniciales: después de pocos tramos las soluciones coinciden, indicando que el régimen estacionario es estable. (b) Soluciones caóticas para $\omega = 1.41 \text{ rad/s}$: las soluciones comienzan a diferir y pronto se hacen completamente distintas pese a que la diferencia entre las condiciones iniciales es muy pequeña.

Diagrama de bifurcaciones

Para apreciar como aparecen las bifurcaciones y el caos a medida que varía ω es preciso calcular muchas soluciones a partir del comienzo del fenómeno y seguir cada una de ellas hasta que se alcanza (si se alcanza) un régimen estacionario. El procedimiento consiste en calcular para cada solución un número N_c muy grande de tramos, de los cuales se descartan los primeros N_i para

¹⁷ Edward Lorenz fue el primero en poner en evidencia la imposibilidad de realizar pronósticos meteorológicos de largo plazo debido a la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Para describir esta circunstancia usó una metáfora: “es suficiente que una mariposa bata sus alas para cambiar para siempre la evolución del clima”. De ahí la denominación “efecto mariposa” que se da al hecho de que variaciones muy pequeñas de las condiciones iniciales pueden producir en el largo plazo grandes cambios del comportamiento del sistema.

estar seguros de haber alcanzado el régimen estacionario (si existe) y se examinan los $N = N_c - N_i$ siguientes. Así podemos encontrar las primeras n bifurcaciones para las cuales $2^n < N$. Sin embargo el procedimiento es laborioso e insume mucho tiempo de cálculo.

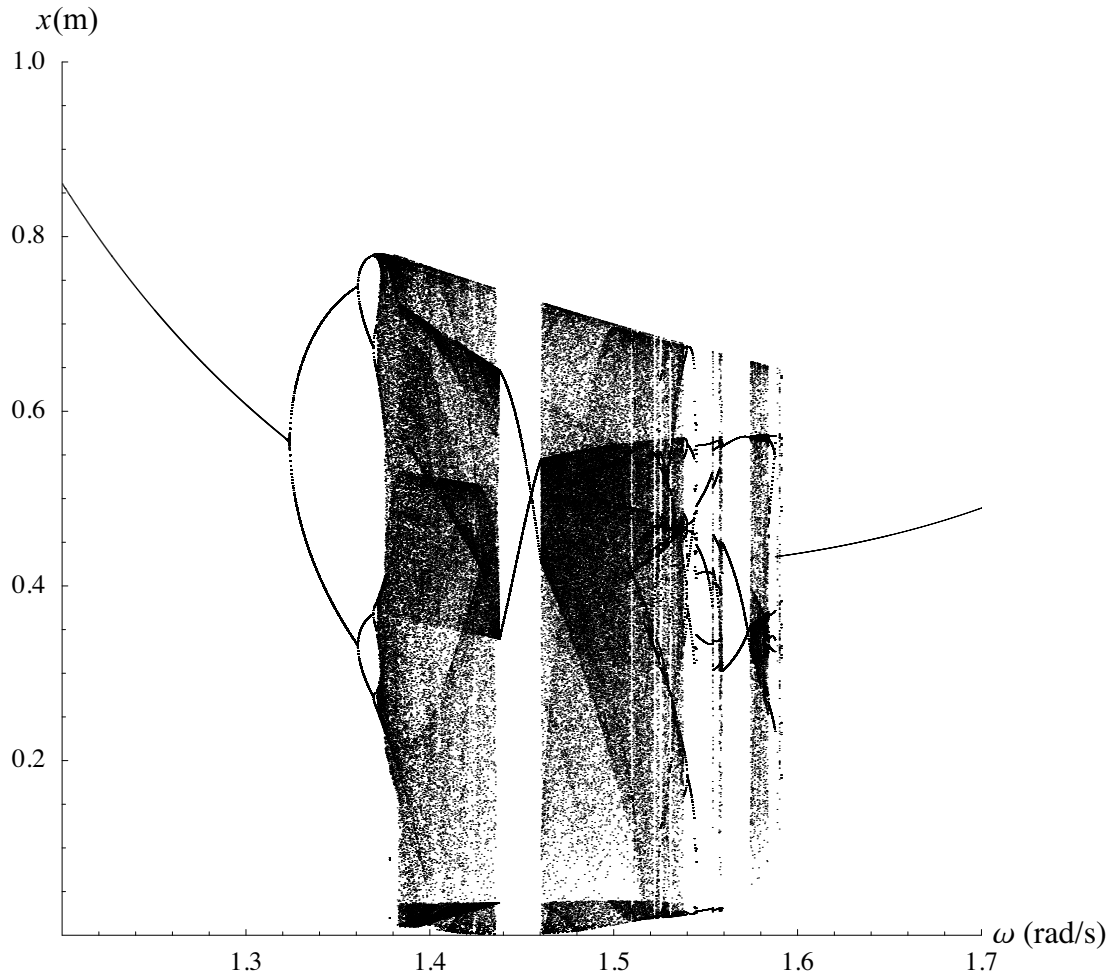


Fig. 6.36. Diagrama de bifurcaciones para el oscilador de Bender ($m = 4$ kg, $k = 1$ N/m, $C = 1$ Ns/m, $F = 1$ N, $x_b = 0$, $x_0 = 1$ m).

La Fig. 6.36 muestra el diagrama de bifurcaciones. Para cada ω se calcularon $N_c = 400$ tramos y se descartaron los primeros $N_i = 200$. La altura máxima¹⁸ de cada uno de los $N = 200$ tramos siguientes se representó con un punto en la figura. Una solución periódica como la de la Fig. 6.32a aparece entonces como un único punto en la Fig. 6.36. De igual modo dos puntos representan un régimen estacionario en el que m rebota a dos alturas diferentes, 4 puntos representan un régimen estacionario con 4 alturas diferentes y así sucesivamente. Si ω corresponde a una solución caótica todos los 200 tramos tienen alturas diferentes y por lo tanto aparecen como puntos distintos en el diagrama¹⁹. Con $N = 200$ se pueden así poner en evidencia las

¹⁸ El movimiento en un tramo puede ser complicado, con varios máximos y mínimos locales. Ignoramos estos detalles y tomamos en cuenta solamente el mayor de todos los máximos.

¹⁹ En realidad el diagrama no permite distinguir una solución caótica de una solución periódica cuyo período es muy largo (como la que resulta de bifurcaciones de orden $n \geq 7$). Para determinar si una solución es o no periódica es preciso verificar si es o no sensible a las condiciones iniciales.

bifurcaciones con $n \leq 7$ pues $2^7 = 128$. Se examinaron 2500 valores de ω en el intervalo $1.2 \leq \omega \leq 1.7 \text{ rad/s}$, separados por un paso $\delta\omega = 0.0002 \text{ rad/s}$, por un total de 10^6 tramos.

La Fig. 6.36 tiene una estructura muy complicada. Para $1.2 \leq \omega \leq 1.37 \text{ rad/s}$ se aprecia el movimiento periódico y las sucesivas bifurcaciones que llevan a los períodos 2, 4, 8, 16, etc. Entre $1.37 \leq \omega \leq 1.435 \text{ rad/s}$ hay una banda de movimiento caótico. Entre $1.435 \leq \omega \leq 1.46 \text{ rad/s}$ el movimiento tiene período 2. En el intervalo $1.46 \leq \omega \leq 1.537 \text{ rad/s}$ hay una banda de caos dentro de la cual se ven 4 ventanas angostas donde el movimiento es periódico. Entre $1.537 \leq \omega \leq 1.573 \text{ rad/s}$ el movimiento es periódico salvo por 3 intervalos muy angostos de caos. En el intervalo $1.573 \leq \omega \leq 1.585 \text{ rad/s}$ hay caos salvo algunas estrechas ventanas de movimiento periódico. A continuación se ve una banda de período 7 seguida por una angosta banda de caos. Finalmente a partir de $\omega \approx 1.59 \text{ rad/s}$ el movimiento es periódico (período 1). La estructura del diagrama es fascinante y en realidad es infinitamente compleja. Si se hace el cálculo con un $\delta\omega$ menor para ver qué ocurre en una escala más pequeña aparecen más y más bandas y ventanas de periodicidad y de caos, de escala cada vez menor. En la Fig. 6.37 se muestra el diagrama de bifurcaciones en el intervalo $1.5 \leq \omega \leq 1.6 \text{ rad/s}$, calculado con un paso $\delta\omega = 0.00005 \text{ rad/s}$. Se puede apreciar que se tornan visibles más bandas de caos y ventanas de periodicidad que no se ven en la Fig. 6.36. Si se calculara el diagrama con un paso aún menor aparecerían más detalles y así sucesivamente hasta el infinito.

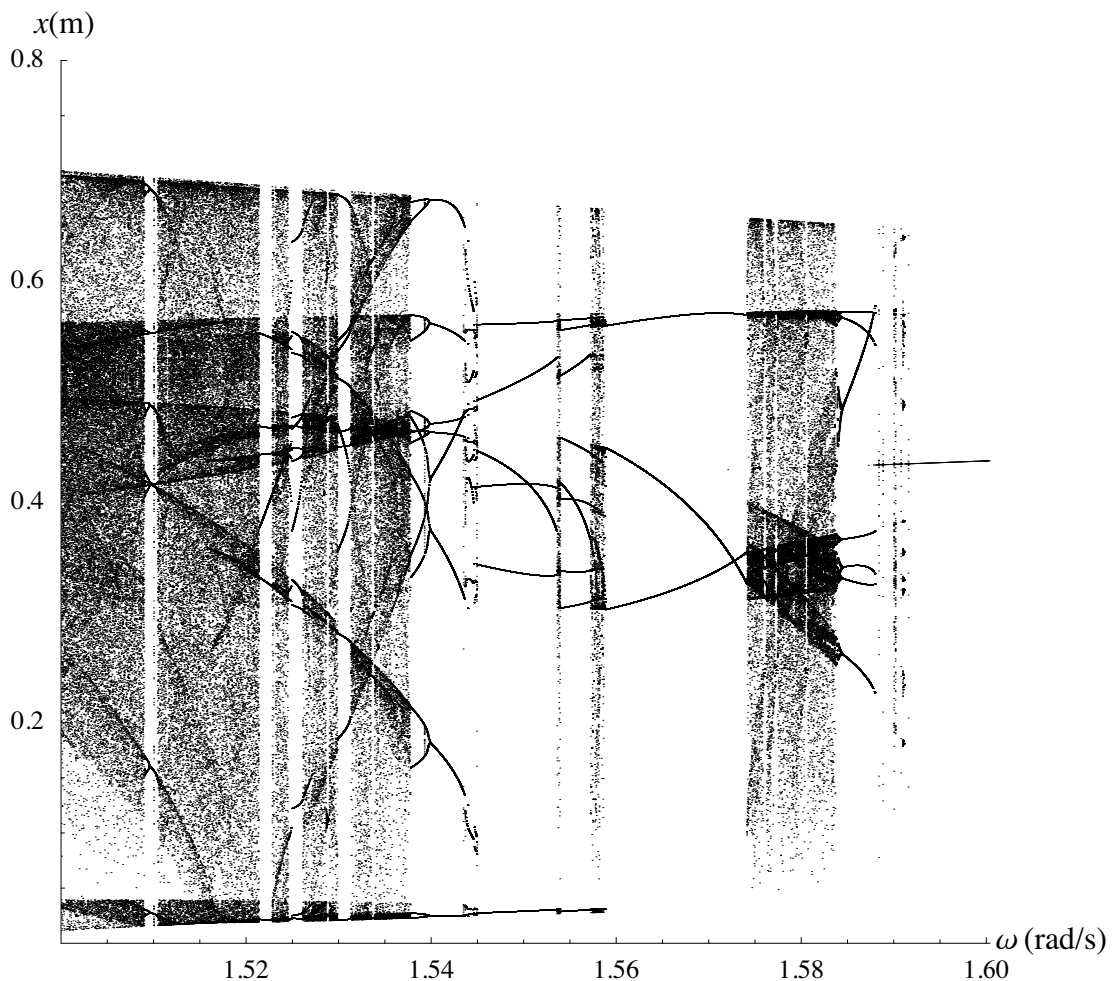


Fig. 6.37. Detalle del diagrama de bifurcaciones en el intervalo $1.5 \leq \omega \leq 1.6 \text{ rad/s}$.

Se debe notar que el movimiento caótico no es al azar. En las Figs 6.36 y 6.37 se ven claramente diferentes sombreados y estructuras regulares en las regiones de caos, que indican que ciertas alturas son más probables que otras. Nuestros diagramas abarcan solamente pequeños intervalos de ω . Si se extiende el cálculo a un intervalo mayor se encuentra que lo que ocurre en el intervalo $1.2 \leq \omega \leq 1.7$ rad/s se repite de manera parecida en los intervalos $2.2 \leq \omega \leq 2.7$ rad/s, $3.2 \leq \omega \leq 3.7$ rad/s, ..., etc.

Comentarios sobre el caos

El ejemplo que mostramos no es el único caso de caos. Por el contrario, se conocen numerosos sistemas mecánicos y no mecánicos en los que aparece caos, que incluyen péndulos forzados, sistemas de 3 o más cuerpos que se atraen gravitatoriamente, canillas que gotean, fluctuaciones de la población de una especie, circuitos eléctricos, sistemas biológicos, reacciones químicas, láseres y sistemas ópticos y muchos otros más²⁰. Es importante notar que el caos no proviene del azar, pues aparece en fenómenos cuyo comportamiento se describe mediante un algoritmo no ambiguo que para una condición inicial dada determina por completo la evolución del sistema. La aparición del caos se debe a la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, ya señalada al estudiar el oscilador de Bender. Esta extrema sensibilidad se da en muchísimos problemas.

La posibilidad del caos fue descubierta a fines del siglo XIX por el célebre matemático francés Jules-Henri Poincaré, pero pasó inadvertida hasta 1963, año en que Edward Lorenz publicó sus trabajos que mostraron la imposibilidad de hacer pronósticos meteorológicos de largo plazo debido a la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero el estudio del caos cobró gran desarrollo recién a partir de la llegada de computadoras poderosas que permiten realizar los extensos cálculos necesarios. Bien se puede decir, siguiendo al matemático James Yorke, que los físicos se habían acostumbrado a no ver el caos. En efecto, gran parte de la Física y de la Matemática consistió (y consiste) en plantear ecuaciones diferenciales y buscar sus soluciones. Las ecuaciones diferenciales describen la realidad como un continuo que varía suavemente de un lugar a otro y de un instante a otro, sin las interrupciones que vienen del empleo de grillas discretas y pasos temporales finitos. De esta forma a partir de Newton los científicos construyeron un vasto cuerpo de conocimiento sobre las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. No es exagerado decir que el Cálculo permitió obtener la mayoría de los éxitos de la Ciencia moderna y que es una de las más ingeniosas creaciones de la mente humana en el intento de modelar el mundo que nos rodea. Pero el científico que aprendió esta forma de describir la naturaleza puede perder de vista el hecho que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver en forma cerrada. Dice Yorke: “si se puede escribir la solución de una ecuación diferencial, necesariamente esa solución no es caótica pues se pudo escribir porque se encontraron invariantes (o sea magnitudes que se conservan como la energía, el momento angular, etc.): recién cuando se conoce un número suficiente de invariantes se puede escribir la solución. Pero precisamente eso excluye la posibilidad de caos”. Los problemas resolubles en este sentido son los que se encuentran tradicionalmente en los textos: son los problemas que “se portan bien” como lo hacen los problemas lineales. Frente a sistemas no lineales el científico a veces hace aproximaciones lineales o encuentra una solución en forma cerrada gracias a algún truco afortunado. Habitualmente los textos presentan solamente los pocos sistemas no lineales

²⁰ En el libro de James Gleick, *Chaos* (Penguin Books Ltd., 1988) se encuentra una presentación histórica y una discusión de nivel elemental del caos en la que se mencionan numerosos ejemplos. Lo recomendamos.

que se pueden atacar por medio de esas técnicas. Pero justamente esos problemas no tienen extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Por eso muy raramente se enseñan a los estudiantes los sistemas no lineales que dan lugar al caos.

Condiciones para la existencia de caos

No profundizaremos aquí el estudio de la dinámica no lineal y del caos. El lector puede consultar la extensa bibliografía del tema²¹. Pero antes de concluir conviene comentar brevemente algunos tópicos. Hay dos condiciones necesarias para la existencia de caos en sistemas cuyo comportamiento se describe por medio de ecuaciones diferenciales: (i) el sistema debe ser *no lineal* y (ii) su espacio de las fases debe tener como *mínimo tres dimensiones*. Más precisamente, si nuestro problema se describe por medio de un sistema autónomo de n ecuaciones diferenciales ordinarias del primer orden en el tiempo de la forma (6.196) y si existen j constantes del movimiento de la forma (6.203), de modo que las trayectorias integrales (6.201) están contenidas en la variedad de $n - j$ dimensiones definida por las (6.203), la condición necesaria (ii) para la existencia de caos es que

$$n - j \geq 3 \quad (6.248)$$

Por ejemplo, las ecuaciones de Euler que describen las rotaciones libres de un cuerpo rígido (ver el Capítulo 10) tienen la forma

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= (B - C)yz \\ B\dot{y} &= (C - A)zx \\ C\dot{z} &= (A - B)xy \end{aligned} \quad (6.249)$$

donde A, B, C son constantes y x, y, z son las componentes del vector velocidad angular en el sistema de ejes principales de inercia fijo al cuerpo. El espacio de las fases de este sistema autónomo no lineal tiene $n = 3$ dimensiones. Pero es fácil verificar que existe la integral primera

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = \text{cte.} \quad (6.250)$$

Por lo tanto $j = 1$ y $n - j = 2$. Luego las trayectorias integrales están contenidas en la variedad de 2 dimensiones (que es un elipsoide) dada por (6.250). Por lo tanto no se cumple la condición (6.248) y por consiguiente las rotaciones libres de un cuerpo rígido no pueden ser caóticas.

Consideremos en cambio las oscilaciones de amplitud arbitraria de un péndulo cuyo punto de suspensión oscila verticalmente con la frecuencia Ω y la amplitud A (como en el caso del oscilador de Bender). La ecuación del movimiento se obtiene generalizando la (6.226) y es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{A\Omega^2}{\ell} \cos \Omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (6.251)$$

²¹ Ver por ejemplo D. Acheson, *From Calculus to Chaos* (Oxford Univ. Press, 1997) y H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich y M. M. Sushchik, *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists*, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 53 (World Scientific Pub. Co., Singapore, 1993). En R. C. Hilborn y N. B. Tufillaro, *Resource Letter: ND-1: Nonlinear Dynamics*, Am. J. Phys. **65**(9), 822-834 (1997) hay una extensa lista bibliográfica.

donde incluimos el término lineal de amortiguamiento $Kd\theta/dt$ para simular el efecto del arrastre viscoso. Con el cambio de variable $t = \tau(\ell/g)^{1/2}$ la (6.251) se escribe en la forma

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + (1 + a\omega^2 \cos\omega t)\sin\theta = 0 \quad (6.252)$$

donde un punto indica derivación respecto de τ , $a = A/\ell$, $\omega = \Omega(\ell/g)^{1/2}$ y $k = K(\ell/g)^{1/2}$. La (6.251) equivale el siguiente sistema autónomo de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= y \\ \dot{y} &= -ky - (1 + a\omega^2 \cos\omega\tau)\sin\theta \\ \dot{\tau} &= 1 \end{aligned} \quad (6.253)$$

Este sistema es tridimensional ($n = 3$) y no lineal. Pero a diferencia del caso anterior no tiene una integral primera, de modo que $j = 0$. En consecuencia $n - j = 3$, lo que nos dice que un péndulo forzado puede tener movimiento caótico, como efectivamente ocurre.

Rutas al caos

La investigación ha mostrado que el comportamiento de los sistemas no lineales sigue unos pocos patrones universales. Típicamente los sistemas que pueden tener caos lo exhiben para ciertos intervalos de los parámetros relevantes (llamados *parámetros de control*) pero no para otros. Claramente es importante averiguar cómo aparece y desaparece el caos a medida que varía un parámetro de control. Esto es lo que se llama “ruta al caos”.

Una de esas rutas es la secuencia de duplicaciones del período que se aprecia en el diagrama de bifurcaciones (Fig. 6.36). Muchos otros fenómenos además del oscilador de Bender llegan al caos por esa misma ruta y todos lo hacen del mismo modo. Si indicamos con α_n el valor del parámetro de control α ($\alpha \equiv \omega$ en el caso del oscilador de Bender) para el cual ocurre la bifurcación de orden n que hace que el período comprenda 2^n tramos, se puede mostrar que para $n \rightarrow \infty$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}} = F = 4.6692... \quad (6.254)$$

El número F se llama *razón universal de Feigenbaum* porque es el mismo para todas las secuencias de duplicación de períodos (con ciertas limitaciones que no comentaremos aquí).

En las Figs. 6.36 y 6.37 se observan otras rutas al caos. Por ejemplo cerca de $\omega = 1.59$ rad/s hay una brusca transición en la que se pasa directamente de una oscilación de período 1 al caos. La investigación ha demostrado que la transición al caos puede ocurrir según *tres* patrones básicos. Uno es la secuencia de duplicaciones del período ya comentada. Las otras dos se llaman *intermitencia* y *cuasiperiodicidad*. No vamos a discutir aquí estas rutas al caos y remitimos el lector interesado a la bibliografía ya citada.

El hecho que fenómenos muy diferentes se comportan del mismo modo es muy interesante porque permite usar los resultados obtenidos en un experimento para entender aspectos de fenómenos que aparentemente no están relacionados. Por este motivo la investigación de los sistemas no lineales tiene características interdisciplinarias y multidisciplinarias.

Implicaciones del caos

El célebre matemático, astrónomo y físico francés Pierre-Simon, marqués de Laplace expresó que: "... una inteligencia que lograra abarcar todos los movimientos de los cuerpos del Universo, desde los más grandes hasta los átomos más pequeños, podría predecir con certeza el futuro: nada se le escaparía y todo estaría presente ante su vista ...". Esta afirmación expresa el optimismo que provenía de los formidables éxitos de la Mecánica Newtoniana, en particular en sus aplicaciones al movimiento de los cuerpos celestes (tema en el que Laplace realizó importantísimas contribuciones alrededor de la teoría de perturbaciones de las órbitas planetarias) y del hecho que las ecuaciones de Newton son determinísticas, en el sentido que su solución está unívocamente determinada por las condiciones iniciales.

La existencia del caos da por tierra con este tipo de expectativas ya que muestra que en la mayoría de los sistemas mecánicos (incluso algunos muy sencillos) se presenta caos y es imposible predecir el comportamiento de los mismos en el largo plazo²². Este hecho, a primera vista sorprendente en una teoría determinística cual es la Mecánica Newtoniana, es una consecuencia de la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales que proviene de la no linealidad y por mucho tiempo pasó desapercibido para la mayoría de los científicos. Es importante que el lector lo tenga presente.

²² En particular no se sabe si el movimiento de los planetas del Sistema Solar es estable, como creía haber demostrado Laplace.