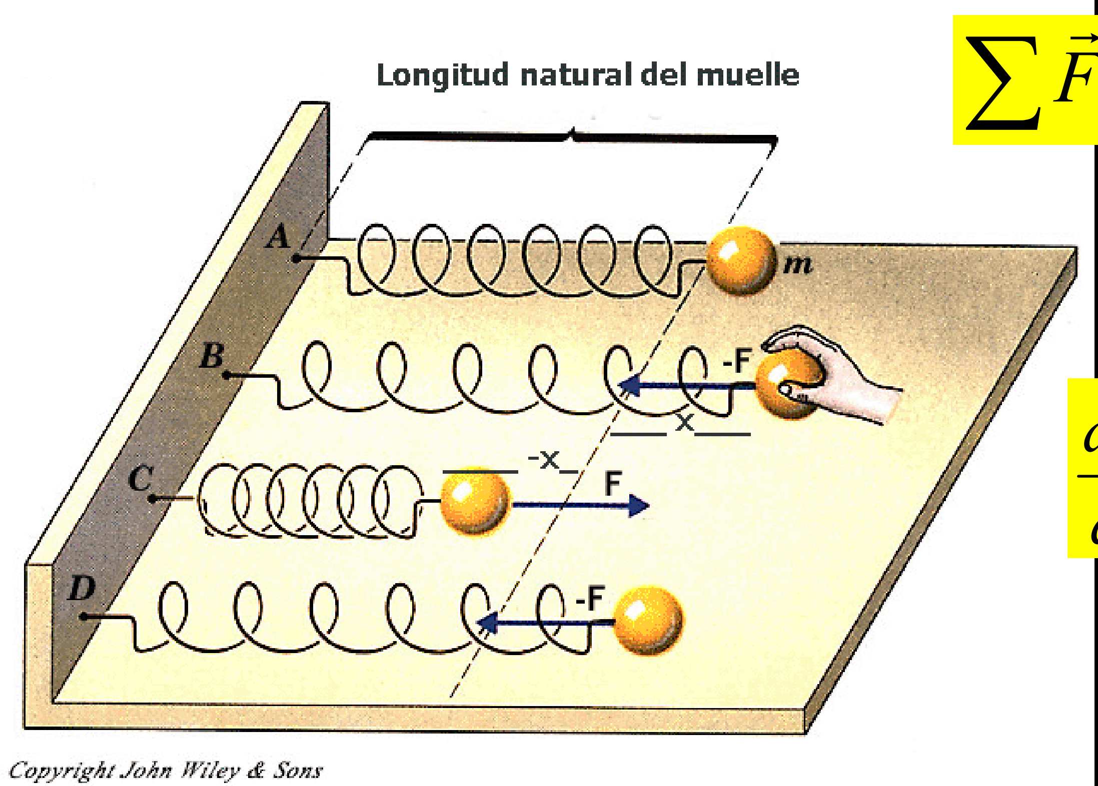
Dinámica

V. Movimiento oscilatorio

Movimiento Armónico Simple (MAS)

Estiramiento de un muelle y ley de Hooke



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

II Ley de Newton

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0, \quad w^2 = \sqrt{k/m}$$

Solución

$$x(t) = A\cos(wt + \delta)$$

Amplitud

frecuencia

Movimiento Armónico Simple (MAS)

- Solución oscilante

$$x(t) = A\cos(wt + \delta)$$

- Frecuencia

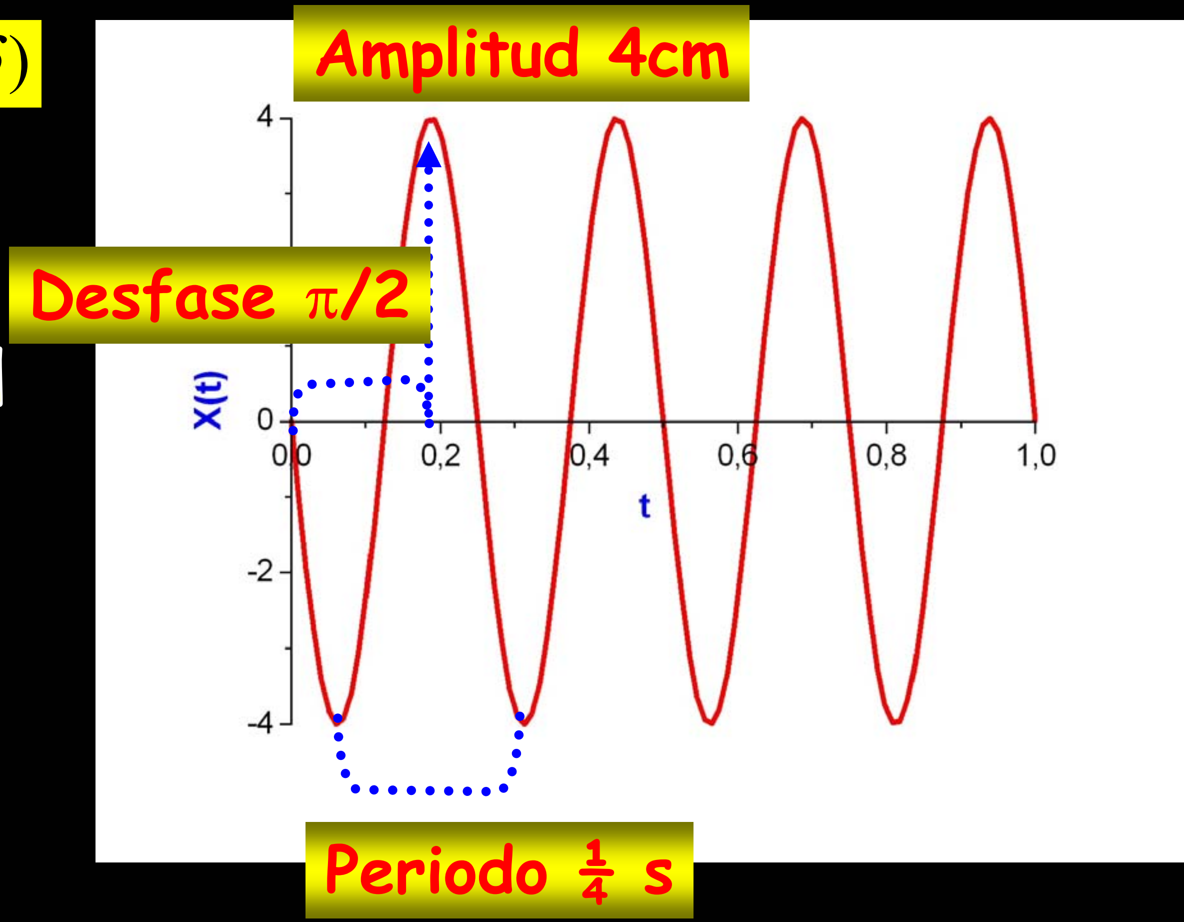
  w= [rad/s],

  w= 2π f, f=[Hz]

- Periodo

  T=2π/w

- Desfase δ



Datos obtenidos de condiciones iniciales

Aproximación parabólica del potencial

- Desarrollo en serie de Taylor de la función energía potencial (sistema de dos cuerpos) en torno al mínimo r_0 , $U'(r_0)=0$

$$U(r) = U(r_0) + U'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}U''(r_0)(r - r_0)^2 + \ldots$$

$$U(r) = U_0 + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

$$k = U''(r_0)$$

- Solución oscilante para la distancia interatómica r(t)

$$r(t) = A\cos(wt + \delta)$$

$$w = \sqrt{k/\mu}$$

Masa reducida

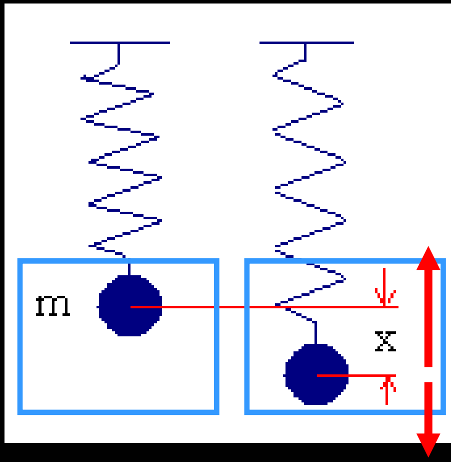
Movimiento oscilatorio con amortiguación

- Fuerza de amortiguamiento que se opone al movimiento, proporcional a la velocidad.
- Segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Fuerza elástica

Fuerza amortiguadora



-kx

-bv

- Ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

$$\gamma = b\big/2m$$ Amortiguación

$$w_0^2 = \sqrt{k\big/m}$$ Frecuencia propia

Movimiento oscilatorio con amortiguación. Soluciones

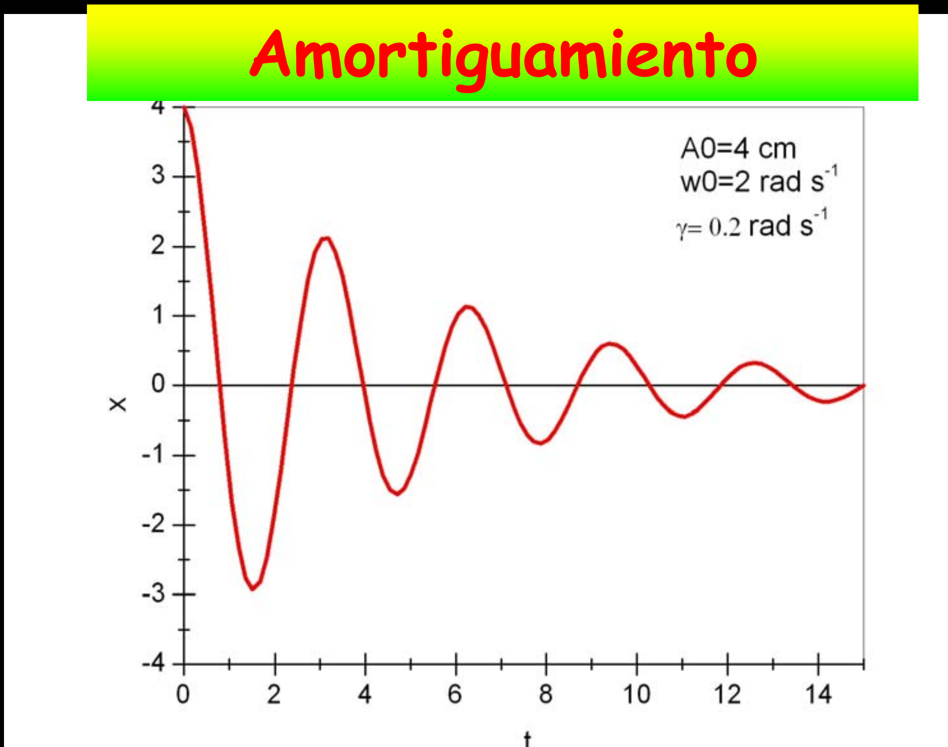
- Amortiguamiento: oscila con una frecuencia

$w^2 = w_0^2 - \gamma^2$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(wt + \delta)$$

- La amplitud decrece exponencialmente

$$A e^{-\gamma t}$$



Movimiento oscilatorio con amortiguación. Soluciones

- Amortiguamiento crítico: solución no oscilante

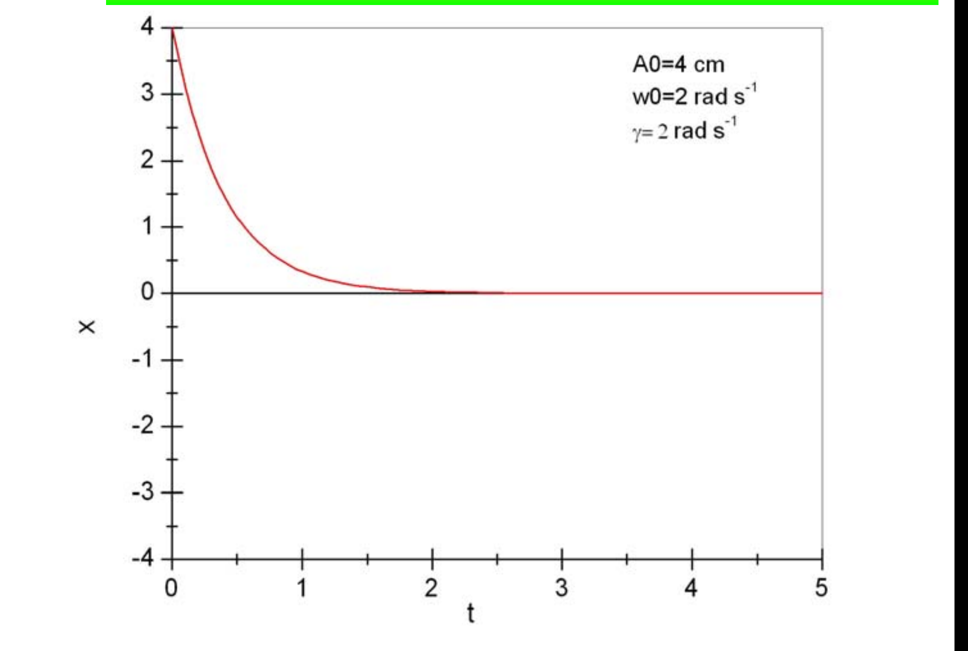
$w^2=w_0^2-\gamma^2=0$

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t}\cos\delta$$

- La amplitud decrece exponencialmente

$$A\,e^{-\gamma t}$$

Amortiguamiento crítico



Movimiento oscilatorio con amortiguación. Soluciones

- Sobreamortiguamiento: solución no oscilante

$w^2 = w_0^2 - \gamma^2 < 0$

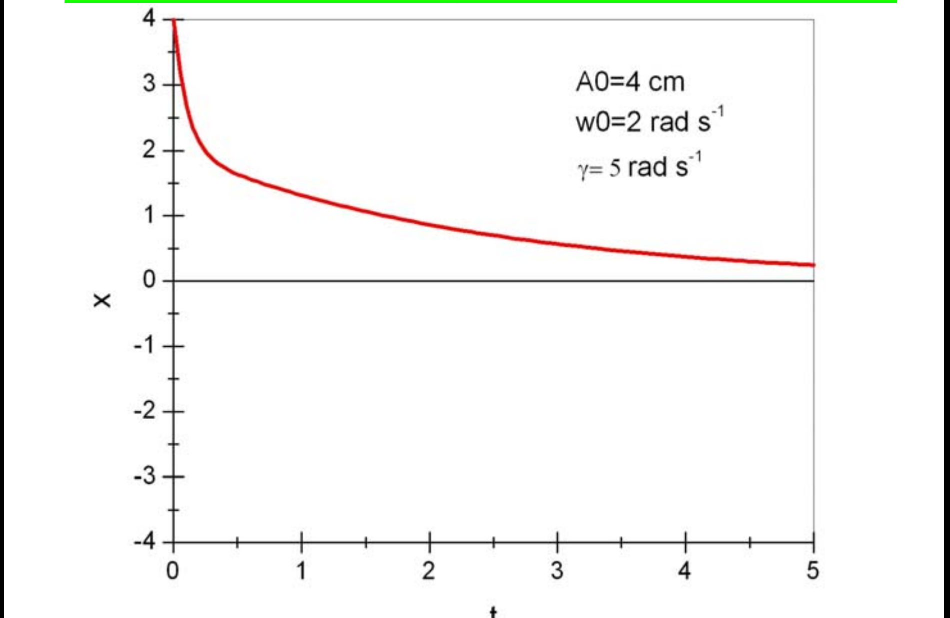
$$\widehat{w}^2 = \gamma^2 - w_0^2$$

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t}\,Ch(\widehat{w}t + \delta)$$

- La amplitud decrece exponencialmente

$$A\,e^{-\gamma t}$$

Sobreamortiguamietno



Movimiento oscilatorio forzado con amortiguación

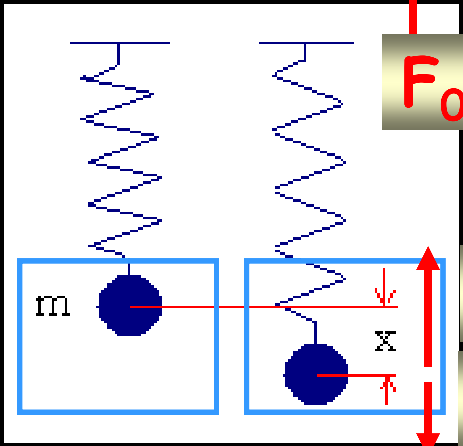
- Fuerza externa oscilante + fuerza amortiguadora que se opone al movimiento.
- Segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o\cos(w_f t)$$

Fuerza elástica

Fuerza amortiguadora

Fuerza externa



$F_0\cos(w_f t$

-kx

-bv

- Ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = \frac{F_o}{m}\cos(w_f f)$$

$$\gamma = b/_{2m}$$ Amortiguació

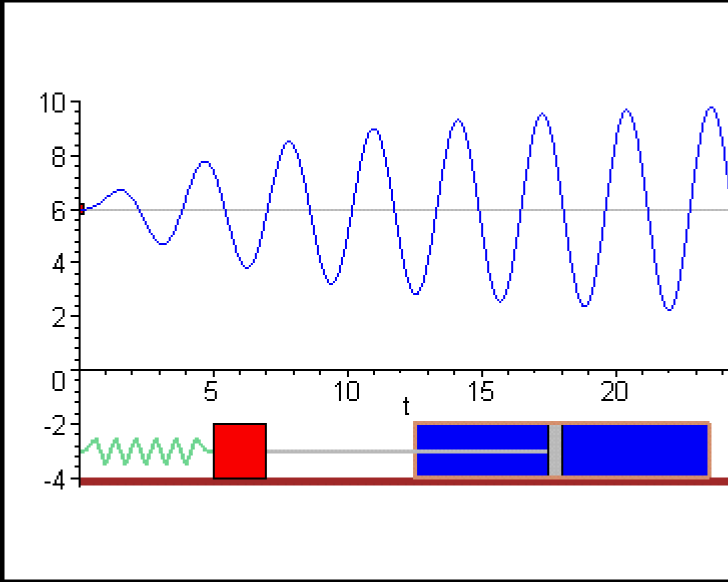
$$w_0^2 = \sqrt{k/_m}$$ Frecuencia propia

Movimiento oscilatorio forzado con amortiguación. Solución

- Solución general = Solución transitoria + solución permanente.
  - Transitoria→Se anula para tiempos largos.
    - Solución de la ecuación sin término independiente

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+w_0^2x=0$$

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(wt+\delta)$$



  - Permanente: solución particular de la ecuación completa → No se anula en tiempos largos

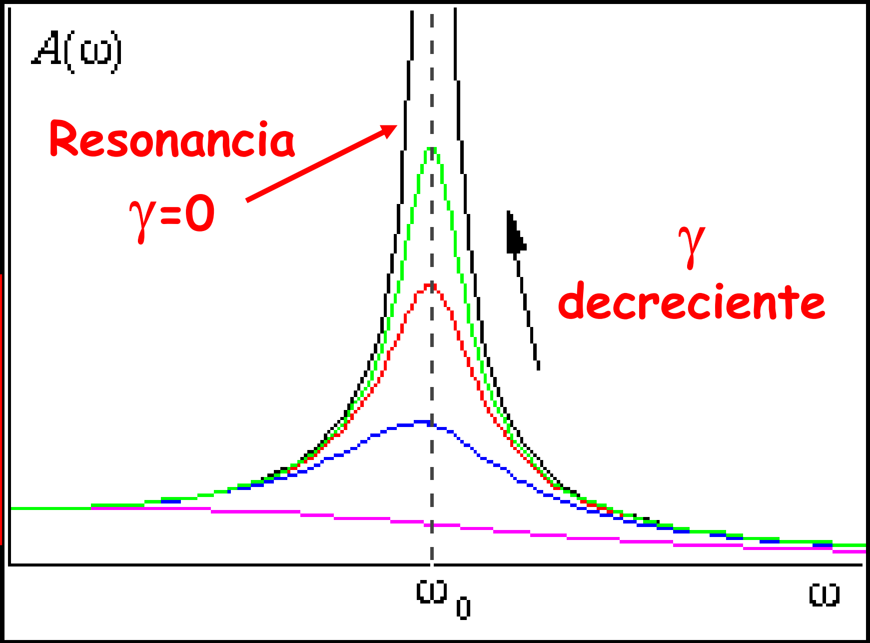
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+w_0^2x=\frac{F_o}{m}\cos(w_f f)$$

Movimiento oscilatorio forzado con amortiguación. Solución permanente

- Oscila con la frecuencia de la fuerza externa
- Pueden darse fenómenos de resonancia cuando la amplitud sea máxima→ Energía máxima

$$x(t) = A\cos(w_f t)$$

$$A(w_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w_f^2 - w_0^2)^2 + 4w_f^2\gamma^2}}$$



Superposición de MAS

- Movimientos en la misma dirección y con la misma frecuencia

$$x_1(t) = A_1 \cos(wt + \delta_1)$$

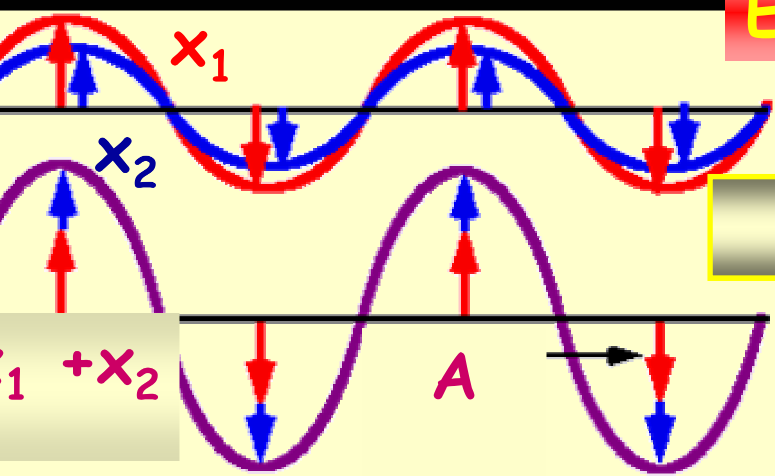
$$x_2(t) = A_2 \cos(wt + \delta_2$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(wt + \alpha)$$

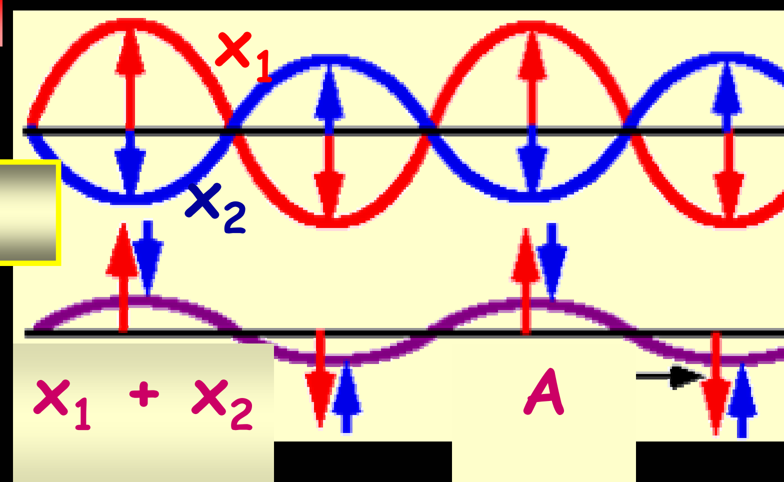
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_2 \cos$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\delta_1 + A_2 \sin\delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2}$$

Ejemplos



$A_1 = A_2$



$_1 - \delta_2 = 0$ En fase

$\delta_1 - \delta_2 = \pi$, En oposición de fase

Superposición de MAS

- Movimientos en la misma dirección con diferente frecuencia

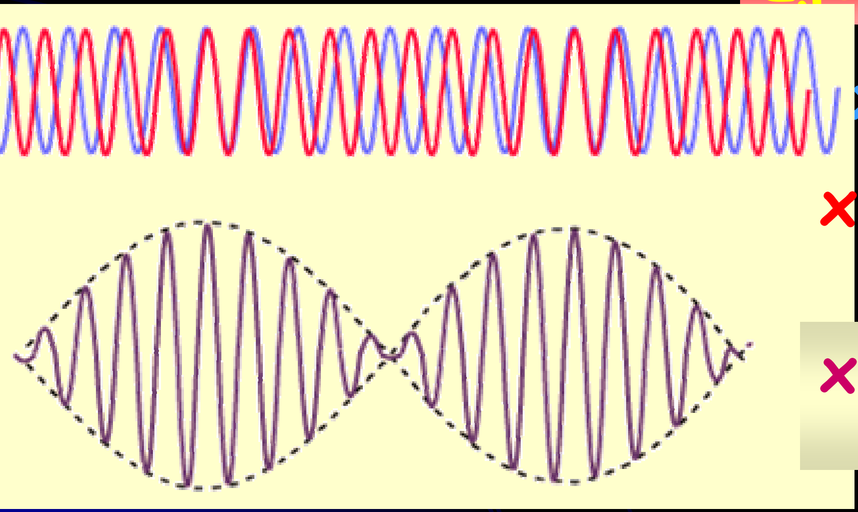
$$x_1(t) = A\cos(w_1 t)$$

$$x_2(t) = A\cos(w_2 t)$$

$$x = x_1 + x_2 = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{w_1 - w_1}{2}\right)\cos\left(\frac{w_1 + w_1}{2}\right)$$

Ejemplo

$A_1 = A_2$



x_1

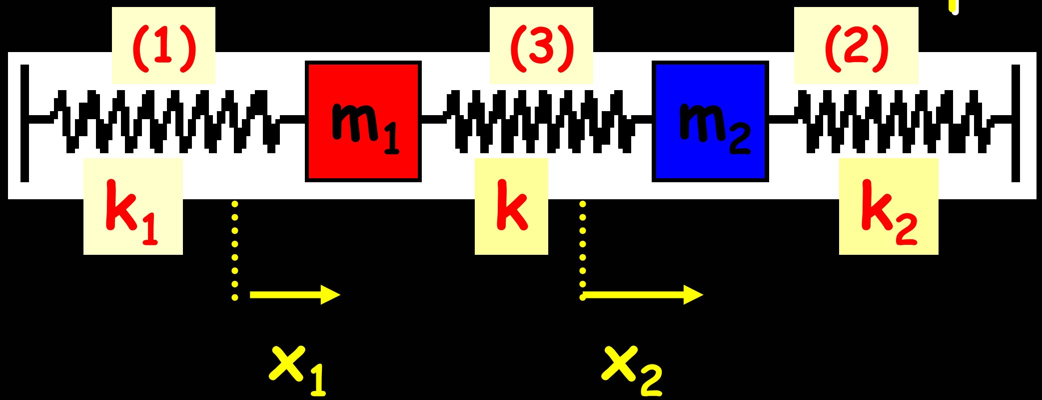
x_2

Modulación de ondas

$x_1 + x_2$

Osciladores acoplados (1)

- No tienen movimientos independientes.



Estiramientos

Muelle 1 → x_1

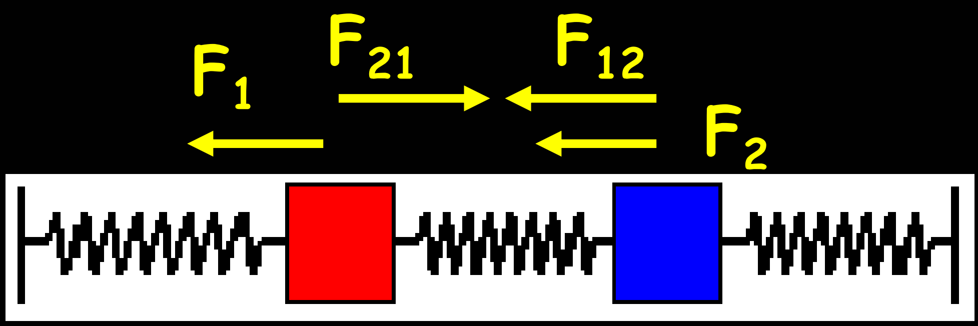
Muelle 2 → $-x_2$

Muelle 3 → $x_2 - x_1$

- Ecuaciones

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$



Osciladores acoplados (2)

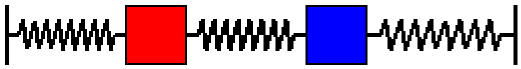
Resolución para $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k)x_1 + kx_2$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -(k_1 + k)x_2 + kx_1$$

La solución general es una combinación de los modos normales de oscilación

Solución General

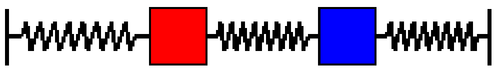


Osciladores acoplados (3)

Modo Asimétrico $x_1 = x_2$ → Se mueven en fase

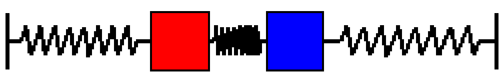
$$x_1^a = A_1^a \cos(w_a t + \alpha)$$

$$x_2^a = A_2^a \cos(w_a t + \alpha)$$



$$w_a = \sqrt{k_1 / m}$$

Modo Simétrico $x_1 = -x_2$ → Se mueven en oposición de fase



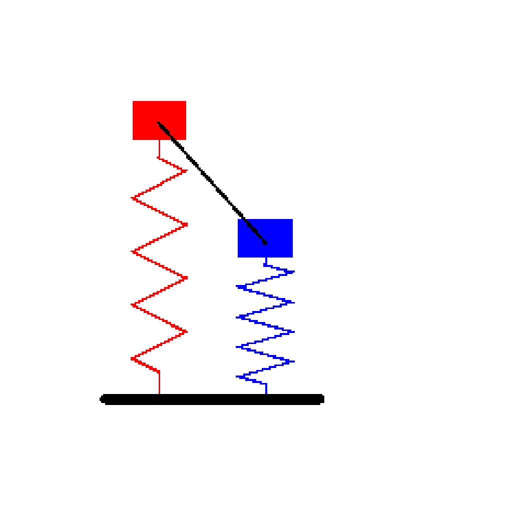
$$x_1^s = A_1^s \cos(w_s t + \alpha)$$

$$x_2^s = -A_2^s \cos(w_s t + \alpha)$$

$$w_s = \sqrt{\frac{k_1 + k}{m}}$$

Osciladores acoplados (4)

Solución General



$$x_1 = A_1^s \cos(w_s t + \alpha) + A_1^a \cos(w_a t + \alpha)$$

$$x_1 = A_2^s \cos(w_s t + \alpha) + A_2^a \cos(w_a t + \alpha)$$

$$x_1 = 2A\cos\left(\frac{w_s - w_a}{2} t\right)\cos\left(\frac{w_s + w_a}{2} t\right)$$

$$x_1 = 2A\sin\left(\frac{w_s - w_a}{2} t\right)\sin\left(\frac{w_s + w_a}{2} t\right)$$

Hay un intercambio de energía