Tangente y normal a una curva. Plano tangente y recta normal a una superficie.
Uso del asistente matemático derive 5

(Comprobación a través del asistente matemático Derive5 de la obtención de las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a una curva; la recta normal y el plano tangente a una superficie en un punto)

Antonio MAZÓN ÁVILA
Juan PÉREZ ROJAS

Introducción
En el trabajo se muestra la importancia que tiene el asistente matemático Derive 5 para visualizar conceptos tridimensionales, los cuales se imparten de forma abstracta en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la matemática, estas representaciones resultan muy difícil a mano, por lo que generalmente el estudiante no puede observar el resultado obtenido, dificultando con esto la interrelación del sujeto con el objeto de trabajo, cuestión esta de suma importancia en la obtención de nuevos conocimientos.

Desarrollo
Se define por curva del espacio a la función vectorial

$$r: A \to \Re^3; \quad A \subset \Re, \ t \in \Re$$

$$t \to r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

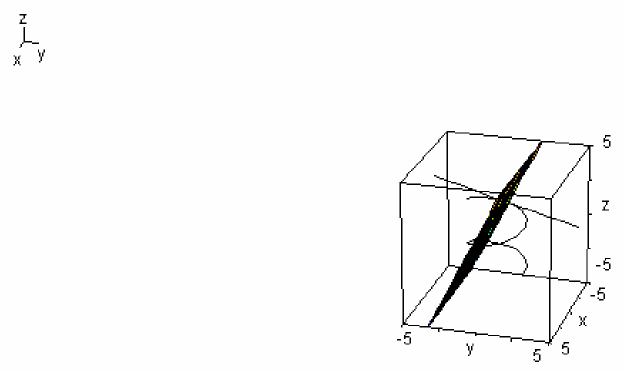
donde x(t),y(t),z(t) son funciones escalares de una variable real, esta curva se puede expresar en forma paramétrica por las ecuaciones x=x(t), y=y(t), z=z(t).Si eliminamos el parámetro t considerando las tres ecuaciones entonces se puede expresar la curva como la intersección de dos superficies, a esta forma se le denomina implícita.

La curva r (t) es derivable en t_0 si y sólo si x (t), y(t), z(t) son derivables en t_0 y en este caso $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Esta representa geométricamente un vector tangente a la curva r (t) en el punto t_0. Este vector tangente está asociado a la recta tangente a la curva en un punto.

Se define como plano normal a una curva en un punto como aquel plano que es normal al vector tangente a la curva en dicho punto, este vector tangente esta asociado a la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto, por ejemplo: Determine la ecuación de la recta tangente y el plano normal a la curva, x= 2cost, y = 2sent, z= $\frac{1}{2}t$ en el punto P(-2, 0, $\frac{\pi}{2}$). Escribamos la curva en forma vectorial para encontrar el vector director de la recta r (t) = (2cost, 2sent, $\frac{1}{2}t$), done $r'(t)=(-2sent, 2\cos t, \frac{1}{2})$ y t = π , evaluando en la derivada tendremos $r'(\pi)=(-2sen\pi, 2\cos\pi, 1/2)=$ (0, -2, ½) = (a_1, a_2, a_3), estas son las coordenadas del vector director de la recta. La ecuación de la misma es la siguiente: x = -2, y = -2t, z = $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}t$. Esta ecuación es tangente a la curva en el punto P.

Para hallar la ecuación del plano partimos de su forma general
$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, donde las coordenadas del vector normal esta dado por (A, B, C) = $r'(\pi)=(0,-2,\frac{1}{2})$, entones sustituyendo en la ecuación se obtiene z = 4y+ $\frac{\pi}{2}$.

La gráfica de estos conceptos en un mismo sistema tridimensional resulta muy difícil a mano, para una representación precisa necesitamos emplear la tecnología, en particular utilizaremos el asistente matemático Derive 5



Se define por superficie a la función vectorial
r : A$\rightarrow \Re^3$, A$\subset\Re^2$; (u, v) $\in\Re^2$
(u, v)$\rightarrow r(u,v)=$(x (u, v), y(u, v), z(u, v)) donde x(u, v), y(u, v) y z(u, v) son funciones escalares de dos variables. Esta superficie se puede expresar en forma paramétrica por x = x(u, v), y = y (u, v), z = z(u, v) , también una superficie se puede representar en forma explícita (la ecuación que representa la función está resuelta con respecto a una de las variables), por ejemplo z = f(x, y) y en forma implícita cuando la ecuación no está resuelta con respecto a ninguna de las variables, por ejemplo f(x, y, z) = 0

Si la superficie se expresa en forma vectorial entonces el vector normal en punto P de la superficie se puede calcular por la expresión n = $(\frac{\partial r}{\partial u} X \frac{\partial r}{\partial v})_P$ y si la superficie viene expresada en forma implícita, n = $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})_P$

Halle el plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ de tal modo que sea paralelo al plano x- y +2z = 0

La ecuación del elipsoide está en forma implícita entonces el gradiente de f (x, y, z) = $x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$ en el punto P es $(2x, 4y, 2z)_P = n$ y como el plano tangente es paralelo al plano x- y +2z = 0, los vectores normales a dichos planos son paralelos, estableciéndose el sistema de ecuaciones

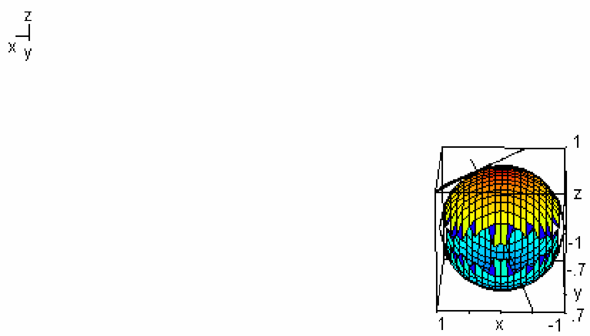
$$\begin{cases}(2x,4y,2z)=\lambda(1,-1,2)\\ x^2+4y^2+z^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=\lambda\\ -4y=\lambda\\ 2z=\lambda\end{cases} \Rightarrow$$ 2x= -4y =z, sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación del elipsoide la transformamos en una ecuación de una variable $(\frac{z}{2})^2 + 2(-\frac{z}{4})^2 + z^2 = 1$, cuya solución utilizando el Derive 5 es

z = $\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$ la cual permite obtener las coordenadas de los puntos

P_1 $(\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, 2\sqrt{\frac{2}{11}})$ y P_2 ($-\sqrt{\frac{2}{11}}, +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, -\sqrt{\frac{2}{11}}$). Si tomamos como vector normal a (1, -1, 2) y los puntos anteriores se obtienen las ecuaciones de los planos siguientes : x-y +2z = $\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$ y si consideramos el punto P_1 podemos escribir que la ecuación paramétrica de la recta normal al el elipsoide en P_1 es:

X = $\sqrt{\frac{2}{11}}$ +t , y = $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$ -t , z = $2\sqrt{\frac{2}{11}}$ +2t.

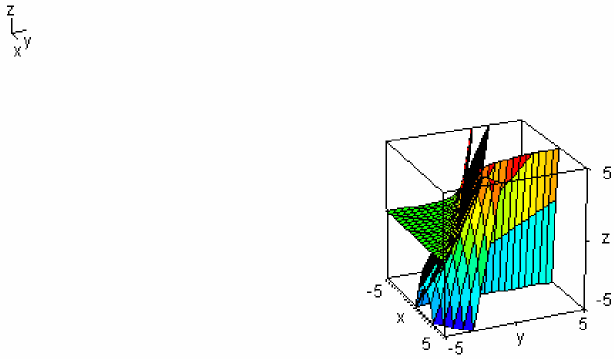
Utilizando el Derive 5, podemos representar estos tres conceptos en un mismo sistema tridimensional.



A continuación veamos otro ejemplo en que la representación grafica resulta también extremadamente complicada sin utilizar el asistente.

Mostrar que x+2y-lnz+4 =0 y x^2-x y-8x+z+5 = 0 tienen el mismo plano tangente en el punto Q (2, -3, 1)
Si f(x, y, z) = x+2y-lnz+4 =0 y G(x, y, z) = x^2-x y-8x+z+5 = 0
GRAD(x + 2·y - LN(z) + 4) , es (1, 2, -1/z) evaluado en P se obtiene (1, 2, -1) y el GRAD(x^2 - x·y - 8·x + z + 5) es [2·x - y - 8, -x, 1] y evaluado en el punto P se obtiene [-1, -2, 1], donde se obtiene para los dos vectores normales y el punto P la ecuación del plano x+2y-z = -5.

Representando las dos superficies y el plano tangente en el Derive 5 tendremos:



Conclusiones

Con el uso del Derive 5

- Se proporciona un medio de visualización para los conceptos tridimensionales, facilitando una relación activa entre estos y los estudiantes. Lo anterior contribuye a que la enseñanza de la matemática sea más significativa y duradera.
- Se permite condensar una gran cantidad de información en una sola imagen comprensible.
- Los estudiantes pueden comprobar gráficamente los resultados obtenidos algebraicamente. A partir de estos se puede hacer visible el movimiento del pensamiento matemático de lo concreto a lo abstracto y en una cualidad mayor de lo abstracto a lo concreto.

Bibliografía.

A, García, 1995. Nuevas tecnologías y enseñanza de la Matemática.

M. Krasnov. Curso de Matemáticas Superiores, Tomo I Y II, 1990.

Pérez. P, 1996. Matemática asistida por ordenadores. Cálculo infinitesimal. Universidad Politécnica de Valencia. SPUPV, 96. 416.

Valido González, Iván. Propuesta de un asistente didáctico para la enseñanza de las integrales con el empleo de un asistente matemático. Tesis de Maestría. La Habana, Cuba, 1997.

Wainer H: 1992. Uderstanding Grapas and tables. Educational Researcher. Vol. 21, pp. 14- 23

Antonio Mazón Ávila
an@mat.upr.edu.cu
Master en Ciencias de la Educación
Jefe del colectivo de Matemática para ciencias técnicas
en la Universidad de Pinar del Río, Cuba

Juan Pérez Rojas
jperez@mat.upr.edu.cu
Master en Ciencias de la Educación
jefe del Departamento de matemática
de la Universidad de Pinar del Río, Cuba