Cálculo para la ingeniería
Tomo II

Salvador Vera

9 de enero de 2005

Índice general

Capítulo 7

Series Numéricas

7.1. El signo del sumatorio: Sigma Σ

La suma de n términos consecutivos se representa de la siguiente forma:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Límite superior
Límite inferior
Índice

El índice del sumatorio puede ser cualquier letra, normalmente se utilizan las letras i, j, k, n; pero no puede coincidir con los límites de la suma. Así,

$$a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{k=3}^{n} a_k \neq \sum_{n=3}^{n} a_n$$

Nota: El límite inferior del sumatorio no tiene por qué ser 1, sino que puede ser cualquier número entero inferior al límite superior

Ejemplo 7.1. *Expresar en notación sumatorio las siguientes sumas:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{i=1}^{6} i = \sum_{n=1}^{6} n$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \sum_{n=3}^{7} n^2 = \sum_{i=3}^{7} i^2 = \sum_{i=2}^{6} (i+1)^2$$

$$\frac{1}{n}(1^2+1) + \frac{1}{n}(2^2+1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2+1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(i^2+1)$$

Ejemplo 7.2. *Sacar los dos primeros términos de los siguiente sumatorios*

$$\sum_{n=1}^{100} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{(n+5)!}$$

Solución. Si sacamos los dos primeros términos del sumatorio, el nuevo sumatorio deberá comenzar a partir del tercero. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} a_n &= a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{100} a_n \\ \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{(n+5)!} &= \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \sum_{n=3}^{100} \frac{1}{(n+5)!}\end{aligned}$$

7.1.1. Propiedades del sumatorio

1. Una constante puede sacarse factor común.

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Es constante cualquier número o cualquier letra que no coincida con el índice. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} n \cdot a_i = n \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ya que, $na_1 + na_2 + \cdots + na_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

2. El sumatorio de una suma se puede descomponer en dos sumatorios

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. La suma de una constante equivale a sumar n veces la constante.

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ veces}} = nc$$

Así, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{5} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 5 = 10 \\ &\sum_{i=1}^{5} 2 = 2 \sum_{i=1}^{5} 1 = 2 \cdot 5 = 10 \\ &\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \big[a_i = 2\big] = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \\ &\qquad = 2 \cdot 5 = 10\end{aligned}$$

4. En un sumatorio, la expresión del término general no es única, sino que se puede modificar, en función de los límites del índice. Así,

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$$

En general

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} a_i = \sum_{i=n_0+k}^{n_1+k} a_{i-k}$$

5. Se suele utilizar la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

Ejercicios propuestos de la sección 7.1. Sumatorio

Soluciones en la página 161

7.1.1. Calcular las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}(2n+3)$

7.2. Series numéricas. Definiciones

Definición 7.1 (Serie). *Dada la sucesión numérica infinita:*

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \quad donde \quad a_n = f(n)$$

se llama serie numérica a la suma indicada de los infinitos términos de dicha sucesión.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos de la serie y a_n se denomina término general.

Son ejemplos de series las siguientes sumas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$ Serie de los números naturales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$ Serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$ Serie armónica, generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$ Serie geométrica

Definición 7.2 (Suma parcial). *Se llama suma parcial n-sima a la suma de los n primeros términos de la serie*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

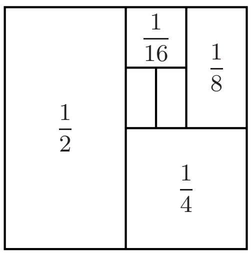
Y, en general, $S_n = S_{n-1} + a_n$

Ejemplo 7.3. *Sumar gráficamente la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Solución. Se trata de hacer la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Consideremos, para ello, un cuadrado de lado unidad. Tendremos que sumar: la mitad del cuadrado, la cuarta parte, la octava parte, etc. Si seguimos el proceso, *al final*, tendremos el cuadrado completo.



En consecuencia, para sumar una serie:

1. Se realizan las sumas parciales de manera progresiva,
2. por paso al límite se calcula la suma total

Definición 7.3 (Convergencia y Suma de la serie). *Una serie se dice convergente si la sucesión formada con sus sumas parciales $\{S_n\}$ es convergente. Se llama suma de la serie al límite de la sucesión formada con sus sumas parciales.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Por el contrario, si la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ no tiene un límite finito, entonces se dice que la serie es divergente. (Se distinguen las series divergentes infinitas, cuando el límite es infinito; de las oscilante, cuando el límite no existe).

Nota: Si la serie es convergente tenemos:

$$\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\} \to S$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definición 7.4 (Resto de la serie). *Se llama resto de la serie a la suma indicada de los términos de la serie desde un lugar en adelante.*

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

Se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots =$$
$$= \underbrace{[a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n]}_{S_n} + \underbrace{[a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots]}_{R_n} = S_n + R_n$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n$$

Si la serie converge, la diferencia entre la suma total S y la suma parcial S_n da el resto n-simo de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \Rightarrow R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En este caso, el resto n-simo representa el error que se comete al aproximar la suma *total* de la serie por la suma *parcial* de los n primeros términos.

Proposición 7.1. *Si la serie es convergente, entonces el resto n-simo tiende a cero.*

$$\sum a_n \ \textit{Conv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Demostración. $\sum a_n$ Conv. $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_n = S - S_n \\ S_n \to S \end{array} \right.$, de donde,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0 \quad \square$$

7.2.1. Convergencia y suma de la serie aplicando la definición

El problema fundamental de la teoría de las series consiste en estudiar la convergencia. Si la serie es convergente, entonces es sumable, en consecuencia se intenta sumarla con exactitud y, si esto no es posible, se calcula el valor aproximado de la suma, sumando los primeros términos. En este caso habrá que indicar el error cometido en la aproximación; o bien, sumaremos más o menos términos en función del error permitido.

Ejemplo 7.4. *Estudiar la convergencia de las siguientes series y sumarlas cuando sean convergentes.*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}, \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}2^k, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solución. Aplicando, en cada caso, la definición, resulta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+\cdots$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 1 \\ S_2 = 1-1=0 \\ S_3 = 1-1+1=1 \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \{S_n\} = \{1,0,1,0,1,0,\dots\} \to \text{No tiene límite} \\ \quad\text{Luego, la serie no es convergente, y,} \\ \quad\text{en consecuencia, no se puede sumar.} \\ \quad\text{(Diverge por Oscilación).} \end{array}$$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2^k = 1+4+8+16+\cdots$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 1 \\ S_2 = 1+4=5 \\ S_3 = 1+4+8=11 \\ \vdots \\ S_n = 1+4+8+16+\cdots+2^n \to +\infty \end{array}\right\} \text{La serie es divergente}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$$\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{1}{2} \\ S_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{2+1}{4} = \dfrac{3}{4} \\ S_3 = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{6+1}{8} = \dfrac{7}{8} \\ S_4 = \dfrac{7}{8}+\dfrac{1}{16} = \dfrac{14+1}{16} = \dfrac{15}{16} \\ \vdots \\ S_n = \dfrac{2^n-1}{2^n} \end{array}$$

Parece que $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$, entonces, tendría que ser $S_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$
En efecto,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

luego la expresión supuesta para S_n es correcta. En consecuencia,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$$

Nota: Para demostrar que la expresión dada a S_n es correcta hemos utilizado el método de inducción; basado en el axioma de inducción de los números naturales.

Axioma de inducción. Supongamos que el conjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ posee las siguientes propiedades:

1°) $1 \in M$,
2°) si $m \in M$, entonces $m + 1 \in M$;

entonces el conjunto M contiene todos los números naturales: $M = \mathbb{N}$.

Principio de inducción. Sea P_n una proposición acerca del entero n. Si:

1°) P_1 es verdadera,
2°) P_{k+1} es verdadera siempre que P_k es verdadera;

entonces P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

La justificación es la siguiente: por la condición 1, se tiene que P_1 es verdadera; entonces, aplicando la condición 2 (con $k = 1$) se tiene que P_2 es verdadera. Del mismo modo, si se aplica nuevamente la condición 2 con $k = 2$, se tiene que P_3 es verdadera; y así sucesivamente. El procedimiento se puede aplicar de manera indefinida.

Al aplicar el principio de inducción matemática se siguen los tres pasos siguientes:

1°) Se prueba que P_n es verdadera cuando $n = 1$.
2°) Se supone que P_n es verdadera cuando $n = k$ y se deduce que P_n es verdadera cuando $n = k + 1$.
3°) Se concluye, por el principio de inducción matemática, que P_n es verdadera para toda n.

Ejemplo 7.5. *De la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se sabe que la sucesión de las sumas parciales* $\{S_n\}$ *viene definida por:*

$$S_n = \frac{2n + 3}{n + 4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hallar:

(a) *El término general an de la serie.*
(b) *El carácter y la suma de la serie.*

Solución. (a) El primer término de la serie a_1 coincide con S_1, luego:

$$a_1 = S_1 = 1$$

El resto de los términos, para $n \geq 2$, se obtienen de la diferencia:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

Nótese que, en este caso, el primer término no sigue la regla general, es decir, la serie propuesta vendrá dada por la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

(b) La serie converge, ya que se puede calcular su suma.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+4} = 2$$

7.2.2. Dos series notables

Definición 7.5 (Serie geométrica). *Se llaman series geométricas aquellas series en las que cada término (salvo el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada razón:*

$$a_{n+1} = r \cdot a_n$$

Es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots =$$

$$= a_0 + r \cdot a_0 + r^2 \cdot a_0 + \cdots + r^n \cdot a_0 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$$

Teorema 7.1. *La serie geométrica es convergente para $|r| < 1$ y su suma es*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = a_0 \sum_{n00}^{\infty} r^n = \frac{a_0}{1-r}$$

Para $|r| \geq 1$ la serie geométrica es divergente.

Definición 7.6 (Serie armónica). *Se llama serie armónica a la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Y, en general, se llaman series armónicas (generalizadas) a las que son del siguiente tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad \textit{para} \quad p > 0$$

(a estas series también se les llama p-series).

Teorema 7.2. *La serie armónica es convergente para $p > 1$ y divergente para $p \geq 1$.*

Ejemplo 7.6. *Demostrar que la serie armónica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *es divergente.*

Solución. Agrupando los términos (hasta las potencias de 2), se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \geq \\ &\geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots = +\infty\end{aligned}$$

Nota 1: Otra manera de demostrarlo es la siguiente. En la serie armónica tenemos que

$$\begin{aligned}S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \\ \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Con lo cual resulta que, en la serie armónica, se tiene

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$

Ahora bien, si una serie es convergente, ha de ser $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. En efecto,

$$\sum a_n \text{ Conv.} \Rightarrow \sum a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0$$

En consecuencia, si la serie armónica fuera convergente se tendría la siguiente contradicción:

- Por ser convergente: $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$
- Por la propiedad anterior $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \dfrac{1}{2}$

de donde resultaría $o \geq 1/2$, que es absurdo.

Nota 2: La serie armónica diverge al infinito con mucha lentitud. Para obtener una suma parcial que pase de 20 hay que sumar más de 250 mil millones de términos.

7.2.3. Teoremas de convergencia

Teorema 7.3 (Convergencia del resto). *Si una serie converge, entonces cualquiera de sus restos también converge. Y si uno de los restos converge entonces toda la serie converge.*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ convergente} \Leftrightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \text{ convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{convergente} \quad \Leftrightarrow \quad R_n \quad \text{convergente}$$

Es decir, la convergencia de una serie no se altera si se le suprimen los n primeros términos.

Nota: (Observaciones sobre el resto de la serie).

- Si dos series tienen los mismos términos, desde un lugar en adelante, entonces, o las dos convergen o las dos divergen. Es decir, las dos series tienen el mismo carácter.

$$\exists k \,/\, \forall n > k, a_n = b_n \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$$

En efecto, al ser

$$\begin{aligned} \sum a_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots) \\ \sum b_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_l + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots) \end{aligned}$$

se tiene,

$$S_n - S'_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - b_1 - b_2 + \cdots - b_l = N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n + N$$

- Se pueden cambiar, suprimir o añadir un número finito de términos sin alterar la convergencia o divergencia de una serie (aunque el valor concreto de la suma de la serie sí cambia).

Ejemplo 7.7. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos convergente. Hallar el carácter de la serie:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}}$

Solución. Sea R_n^* el resto de orden n de la nueva serie. Se tiene:

$$R_n^* = \frac{a_{n+1}}{R_n} + \frac{a_{n+2}}{R_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{R_{n+2}} + \cdots > \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots}{R_n} = \frac{R_n}{R_n} = 1$$

Como el resto R_n^* no converge a cero, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}}$ no es convergente, y al ser de términos positivos, es divergente.

Teorema 7.4 (Producto por un número). *La convergencia de una serie no se altera si todos sus términos se multiplican por un mismo número distinto de cero, además dicho número se puede sacar factor común.*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ convergente } \Leftrightarrow r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \cdots \text{ convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r \cdot a_n) = r \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demostración. Si la serie es convergente, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} k a_n &= \lim_{n\to\infty} (k a_1 + \cdots + k a_n) = \lim_{n\to\infty} k(a_1 + \cdots + a_n) = \\ &= k \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 7.5 (Suma de series). *La suma término a término de dos series convergentes es otra serie convergente, y su suma coincide con la suma de las sumas de las dos series sumandos.*

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ convergente}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ convergente}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \textit{ convergente}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\end{array}\right.$$

Si alguna de las dos series anteriores no es convergente entonces el teorema no es aplicable. En tal caso sólo podemos afirmar que la suma término a término de una serie convergente con otra divergente es divergente, mientras que la suma término a término de dos series divergentes puede dar convergente o divergente, según los casos.

Nota 1: Esquemáticamente, lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

Con±Con=Con
Con±Div=Div
Div±Div=?

Nota 2: La igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r\cdot a_n)=r\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

se cumple siempre, sean a_n y b_n, convergentes o divergentes. Sin embargo, la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

en estricto sentido, solamente se cumple cuando a_n y b_n, son ambas convergentes.

Teorema 7.6 (Criterio del término general para la divergencia). *Si una serie converge, entonces su término general tiende a cero.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

A este teorema también se le conoce como criterio necesario de convergencia o *condición necesaria*. El recíproco no es cierto, ya que existen series cuyo término general tiende a cero y, sin embargo, son divergentes, como, por ejemplo, la serie armónica. Por lo tanto, éste es un criterio para la divergencia y no para la convergencia, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente}$$

Más exactamente podemos decir,

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\\ \text{ó}\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \text{ No definido}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente}$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ no nos da ninguna información sobre la convergencia de la serie.

Ejemplo 7.8 (Aplicando la condición necesaria). *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n-5n^2} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2$$

Solución. Aplicando el criterio del término general, resulta:

$$\begin{aligned}
(i)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{ Divergente}\\
(ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3}{4n-5n^2} = \frac{-1}{5} \neq 0 \Rightarrow \text{ Divergente}\\
(iii)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} n^2 = \text{ No definido} \Rightarrow \text{ Divergente}
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.9. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+5n-1} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7n-3}{n+1}$$

Solución. Las tres son divergentes. En efecto:

$$\begin{aligned}
(i)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+5n-1} = \frac{2}{3} \neq 0\\
(ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0\\
(iii)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7n-3}{n+1} = \infty \neq 0
\end{aligned}$$

7.2.4. La serie geométrica

Una serie se llama geométrica si cada término, menos el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, llamada razón.

$$a_{n+1} = r \cdot a_n$$

Por costumbre, el sumatorio de la serie geométrica se suele comenzar por cero (para tener n en el exponente, en vez de $n-1$). Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots = a_0+a_0r+a_0r^2+\cdots+a_0r^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$$

7.2.5. Convergencia y suma de la serie geométrica

Si una serie geométrica es convergente, entonces, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_0 r^n = 0$$

Ahora bien,

$$\lim_{n\to\infty} a_0 r^n = \begin{cases} \left.\begin{array}{cl} \pm\infty & \text{si } |r| > 1 \\ a_0 & \text{si } r = 1 \\ \text{No def.} & \text{si } r = -1 \end{array}\right\} |r| \geq 1 \text{ Divergente} \\ \\ \quad 0 \qquad\quad \text{si } |r| < 1 \text{ Puede ser convergente} \end{cases}$$

Suma de la serie geométrica

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n \\ -rS_n &= -a_0 r - a_0 r^2 - a_0 r^3 - \cdots - a_0 r^{n+1} \end{aligned}$$

$$S_n - rS_n = a_0 - a_0 r^{n+1}$$

de donde,

$$S_n = \frac{a_0 - a_0 r^{n+1}}{1-r}$$

En consecuencia, para $|r| < 1$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 - a_0 r^{n+1}}{1-r} \overset{|r|<1}{=} \frac{a_0 - 0}{1-r} = \frac{a_0}{1-r}$$

De donde se concluye que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{Divergente} & \text{si } |r| \geq 1 \text{ y } a_0 \neq 0 \end{cases}$$

Nota 1: Si $a_0 = 0$, es evidente que la serie es convergente, puesto que en este caso todos sus término son nulos, y su suma será cero.

Nota 2: Lo que caracteriza a la serie geométrica es que su término general, mediante alguna transformación, se pueda expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(r\right)^n$$

n en el exponente
La razón
Una constante que puede ser 1 (no aparecería)

Ejemplo 7.10. *Estudiar el carácter de las siguientes series, y, en su caso, obtener su suma.*

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \qquad c)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \qquad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Solución.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ r = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1/9 \\ r = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right\} = \frac{1/9}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1/9}{4/3} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1/2 \\ r = 1/2 \end{array}\right\} = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Ejemplo 7.11. *Estudiar el carácter de las siguientes series, y, en su caso, obtener su suma.*

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}}{7^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{e}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{1-n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

Solución.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ r = \dfrac{8}{7} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Divergente}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{e}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{e}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ r = \dfrac{-3}{e} < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Divergente}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \left\{\begin{array}{c} a_0 = e/\pi \\ r = e/\pi \end{array}\right\} = \frac{e/\pi}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{e/\pi}{\frac{\pi-e}{\pi}} = \frac{e}{\pi-e}$$

Ejemplo 7.12. *Estudiar el carácter de las siguientes series, y, en su caso, obtener su suma.*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{-n}-7^{-n}\right) \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n+3^n}{5^n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7\cdot 5^n+3\cdot 11^n}{13^n}$$

Solución.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{-n}-7^{-n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}=\frac{1/5}{1-\frac{1}{5}}-\frac{1/7}{1-\frac{1}{7}}=$$
$$=\frac{1/5}{4/5}-\frac{1/7}{6/7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3-2}{12}=\frac{1}{12}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n+3^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{1}{1-\frac{2}{5}}+\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{1}{4/5}+\frac{1}{3/5}+\frac{1}{2/5}=\frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=$$
$$=\frac{15+20+30}{12}=\frac{65}{12}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 5^n+3\cdot 11^n}{13^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(7\left(\frac{5}{13}\right)^n+3\left(\frac{11}{13}\right)^n\right)=\frac{7}{1-\frac{5}{13}}+\frac{3}{1-\frac{11}{13}}=$$
$$=\frac{7}{8/13}+\frac{3}{2/13}=\frac{91}{8}+\frac{39}{2}=\frac{91+156}{8}=\frac{247}{8}$$

Ejemplo 7.13. *Hallar el número racional representado por el número decimal periódico:* $0.\widehat{5}$.

Solución. El número $0.\widehat{5}$ lo podemos expresar de la siguiente forma

$$0.\widehat{5}=0{,}555\ldots=0{,}5+0{,}05+0{,}005+\cdots=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\cdots=$$
$$=\left\{\begin{array}{c}a_0=5/10\\ r=1/10\end{array}\right\}=\frac{5/10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5/10}{9/10}=\frac{5}{9}$$

Ejemplo 7.14. *Hallar la suma de la serie:*

$$4-6+\pi+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Solución. Separando los tres primeros términos, resulta

$$S=\left(4-6+\pi\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=-2+\pi+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=$$
$$=-2+\pi+\frac{1}{1/2}=-2+\pi+2=\pi$$

7.2.6. Agrupación y descomposición de términos

Agrupación de términos

Proposición 7.2. *Si una serie es convergente o divergente al infinito, entonces su carácter no varía si se van sustituyendo varios términos consecutivos por su suma.*

Demostración. Sea la serie $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Sus sumas parciales son

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \quad\vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

Por otro lado, si agrupamos los términos, resulta

$$\begin{array}{rcccccccc} S' = & (a_1 + \cdots + a_i) & + & (a_{i+1} + \cdots + a_j) & + & (a_{j+1} + \cdots + a_k) & + \cdots \\ = & a'_1 & + & a'_2 & + & a_3 & + \cdots \end{array}$$

Sus sumas parciales son

$$\begin{array}{l} S'_1 = a'_1 = S_i \\ S'_2 = a'_1 + a'_2 = S_j \\ S'_3 = a'_1 + a'_2 + a'_3 = S_k \\ \quad\vdots \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ S \qquad\qquad\qquad\qquad S \end{array}$$

Luego las sumas parciales de ambas series tienen el mismo límite. □

En las series oscilante no se pueden agrupar los términos.
En efecto, consideremos la serie oscilante

$$S = 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$$

Según agrupemos los términos obtenemos una serie convergente con suma 0, o con suma 3. Así,

$$S' = (3 - 3) + (3 - 3) + (3 - 3) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$
$$S'' = 3 + (-3 + 3) + (-3 + 3) + \cdots = 3 + 0 + 0 + \cdots = 3$$

Descomposición de términos

Los términos de una serie no se pueden descomponer en suma de varios términos. Por ejemplo, si descomponemos la serie convergente

$$S = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

obtenemos una serie oscilante. Así,

$$S' = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \text{oscilante}$$

De la misma forma, si descomponemos la serie convergente

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

obtenemos la siguiente serie oscilante

$$S' = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \cdots = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + \cdots = \text{oscilante}$$

Reordenación de términos

Los términos de una serie no se pueden reordenar de manera arbitraria. Por ejemplo, si consideramos la serie alternada

$$S = 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots = \text{Oscilante}$$

Al reordenar sus términos podemos obtener una serie divergente al $+\infty$:

$$S' = 3 + 3 - 3 + 3 + 3 - 3 + \cdots = +\infty$$

y reordenándolos de otra manera una serie divergente al $-\infty$.

$$S'' = 3 - 3 - 3 + 3 - 3 - 3 + \cdots = -\infty$$

Series de términos positivos

Si todos los término que intervienen, –los existentes y los que se obtienen–, son positivos, entonces se pueden *agrupar*, *descomponer* o *reordenar*, sin que cambie el carácter de la serie ni el valor de la suma (El problema en las transformaciones de las series está en los términos negativos).

Nota: No debe confundirse la agrupación y descomposición de términos de una serie con la suma de series o la descomposición de una serie en suma de varias.

Ejercicios propuestos de la sección 7.2. Definiciones

Soluciones en la página 161

7.2.1. De la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se sabe que la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ viene definida por:

$$S_n = \frac{3n+2}{n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hallar:

(a) El término general an de la serie.
(b) El carácter y la suma de la serie.

7.3. Criterios de convergencia

7.3.1. Series de términos positivos (no negativos)

Lema 7.1 (Acotación de la sucesión de sumas parciales). *Si todos los términos de una serie son positivos (salvo quizás los primeros).*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$$

Entonces, si la sucesión de las sumas parciales está acotada la serie será convergente, y si no está acotada, será divergente.

Demostración. En efecto, al ser los términos positivos, la sucesión de las sumas parciales será monótona creciente.

$$\left.\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & S_1 + a_2 \\ S_3 & = & S_2 + a_3 \\ & \vdots & \\ S_n & = & S_{n-1} + a_n \\ & \vdots & \end{array}\right\} \quad S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

Por lo tanto, si dicha sucesión está acotada, tendrá limite finito, y, en consecuencia, la serie será convergente, y si no está acotada, su límite será infinito, y, en consecuencia, la seria será divergente. $\square$

Teorema 7.7 (Criterio de comparación). *Si los términos de una serie de términos no negativos son menores o iguales que los términos correspondientes de otra serie, entonces, si converge la segunda serie también converge la primera y si diverge la primera también diverge la segunda.*

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \sum b_n \ \textit{convergente} \Rightarrow \sum a_n \ \textit{convergente} \\ \sum a_n \ \textit{divergente} \Rightarrow \sum b_n \ \textit{divergente} \end{cases}$$

Demostración. $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n \leq S'_n$, de donde,

$$\sum b_n \text{ Conv} \Rightarrow S'_n \text{ Acot} \Rightarrow S_n \text{ Acot} \Rightarrow \sum a_n \text{ Conv}$$
$$\sum a_n \text{ Div} \Rightarrow \sum b_n \text{ Div (ya que si fuera Convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ Conv)} \ \square$$

Nota: El criterio sigue siendo válido aunque los primeros términos no cumplan la relación $a_n \leq b_n$, siempre que se cumpla desde un lugar en adelante.

Ejemplo 7.15. *Estudiar la convergencia de las siguientes series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}-1} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$$

Solución. Se trata de comparar la serie dada con una serie conocida. Normalmente compararemos con la serie geométrica o con la serie armónica.

a) $2^n + 1 > 2^n \Rightarrow \dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$ (serie geométrica Con.)$\Rightarrow$ Convergente

b) La comparación $2^{n-1} - 1 < 2^{n-1}$, no conduce a ningún resultado, ya que nos da una serie mayor que una convergente que puede ser convergente o divergente. Comparamos, entonces, con otra serie. Así, para n grande

$$2^{n-1} - 1 > 2^{n-2} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}-1} \leq \frac{1}{2^{n-2}} \text{ (geométrica Con.)} \Rightarrow \text{Convergente}$$

c) $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$ (armónica Div.)$\Rightarrow$ Divergente

d) Tenemos que $n! > 2^{n-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 2^{n-1} &= 2 \cdot \quad 2 \quad \cdot \quad 2 \quad \cdots 2 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ (geométrica Conv.)} \Rightarrow \text{Convergente}$$

e) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^n \alpha \leq 1$, resulta

$$\frac{\operatorname{sen}^n \alpha}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \text{ (geométrica Conv.)} \Rightarrow \text{Convergente}$$

Teorema 7.8 (Criterio de Condensación de Cauchy). *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente de términos no negativos, entonces las siguientes series tienen el mismo carácter.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

Demostración. Agrupemos los términos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de dos formas diferente: En primer lugar, en bloques que terminen en los términos de índice potencia de dos; y, en segundo lugar, en bloque que comienzan en dichos términos. Así,

$$(a_1) + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n =$$
$$= (a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots$$

Como la sucesión es decreciente, en cada paréntesis, el primer término es el mayor y el último el menor. Sustituyamos, en los paréntesis de la izquierda, cada término por el menor (el último); y, en la derecha, cada término por el mayor (el primero). En consecuencia, resultará,

$$(a_1) + (a_2) + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq$$
$$\leq (a_1) + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + \cdots$$

De donde,

$$a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

y multiplicando y dividiendo por 2, en la parte de la izquierda, resulta

$$\frac{1}{2}(2a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

que se puede expresar de la siguiente forma,

$$\frac{1}{2}\left(a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

En consecuencia, aplicando el criterio de comparación, las dos serie tienen el mismo carácter. $\square$

Ejemplo 7.16. *Estudiar la convergencia de las series armónicas generalizadas o p-series,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p > 0$$

según los distintos valores de p.

Solución. Aplicando el criterio de condensación de Cauchy, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{p-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k}$$

Luego la serie armónica (p-serie) es equivalente a una serie geométrica de razón $r = (\frac{1}{2})^{p-1}$. En consecuencia será:

- Convergente, si $r < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1 \Rightarrow 2^{p-1} > 1 \Rightarrow p - 1 > 0 \Rightarrow p > 1$
- Divergente, si $r \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2^{p-1}} \geq 1 \Rightarrow 2^{p-1} \leq 1 \Rightarrow p - 1 \leq 0 \Rightarrow p \leq 1$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{Convergente, si } p > 1 \\ \text{Divergente, si } p \leq 1 \end{cases}$$

El resultado puede recordarse con el gráfico 7.1

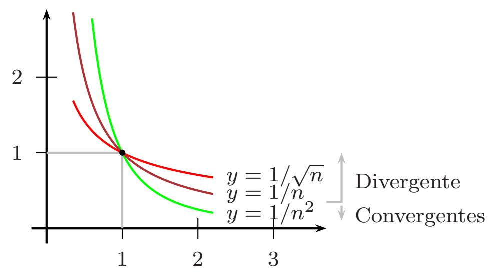


Figura 7.1: Convergencias de las p-series

Ejemplo 7.17. *Estudiar la convergencia de las siguientes series:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

Solución. Comparando las series dadas con las p-series, resulta,

a) $n(n+1)(n+2) > n^3 \Rightarrow \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} < \dfrac{1}{n^3}$ (armónica Conv.)

$\Rightarrow$ Convergente.

b) La desigualdad $1+\sqrt{n} > \sqrt{n}$, no conduce a ningún resultado. Aplicamos, entonces

$$1+\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ (armónica Div.)} \Rightarrow \text{Divergente}$$

c) Teniendo en cuenta que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n+1}{2}n = \frac{n^2+n}{2} > \frac{n^2}{2}$, resulta

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n} < \frac{2}{n^2} \text{ (armónica Con.) } \Rightarrow \text{Convergente}$$

Ejemplo 7.18. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2}$$

Solución. Las tres series son de términos no negativos y, por tanto, les podemos aplicar cualquiera de los criterios de convergencia.
(i) Teniendo en cuenta que $\ln n < n$ resulta la desigualdad:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \qquad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

Y como la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces también diverge la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, y, aplicando el criterio de comparación, la serie dada también es divergente.
(ii) Teniendo en cuenta que $0 \leq sen^2 n \leq 1$ resulta la desigualdad:

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Luego la serie dada es una serie de términos no negativos, y como la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, aplicando el criterio de comparación, la serie dada también es convergente.
(iii) Teniendo en cuenta que $-1 \leq \operatorname{sen}^3(n+1) \leq 1$ resulta la desigualdad:

$$0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2} < \frac{3}{2^n}$$

Y como la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, también converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

y por lo tanto, aplicando el criterio de comparación la serie dada también es convergente.

Teorema 7.9 (Criterio de comparación de infinitésimos). *Si los términos generales de dos series de términos positivos son infinitésimos del mismo orden, entonces las dos series tienen el mismo carácter (es decir convergen simultáneamente o divergen simultáneamente).*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\left\{\begin{array}{c}k\neq\infty\\ k\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\sum a_n\sim\sum b_n$$

Nota 1: Para que una serie converja su término general tiene que tender a cero, es decir, ha de ser un infinitésimo. Dos infinitésimos son del mismo orden cuando el límite de su cociente es un número finito distinto de cero.

Demostración. Sea $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\left\{\begin{array}{c}k\neq\infty\\ k\neq 0\end{array}\right\}$ Entonces será siempre posible encontrar dos números fijos p y q tales que

$$p<k<q\Rightarrow p<\frac{a_n}{b_n}<q,\ \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

de donde,

$$pb_n<a_n<qb_n$$

Y, en consecuencia,

$$\begin{array}{l}\sum b_n \text{ Conv. } \Rightarrow\sum qb_n \text{ Conv. } \Rightarrow\sum a_n \text{ Conv.}\\ \sum b_n \text{ Div. } \Rightarrow\sum pb_n \text{ Div. } \Rightarrow\sum a_n \text{ Div.}\end{array}$$

□

Nota 2: El problema, en la práctica, estará en determinar un infinitésimo del mismo orden que el que tenemos. Para ello habrá que aprender a seleccionar la parte principal del término general de la serie. Al final, siempre habrá que comprobar que el límite del cociente de ambos términos generales es finito y distinto de cero.

Ejemplo 7.19. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}\qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}\qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+\operatorname{sen}^2 n^3}$$

Solución. Las tres series son de términos no negativos, luego les podemos aplicar cualquiera de los criterios de convergencia.
(i) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{n+1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$$

Y como la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también diverge la serie dada.

No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

(ii) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n}$$

Y como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también converge la serie dada.
No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - n} : \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = 1 \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

(iii) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{1}{2^n - 1 + \operatorname{sen}^2 n^3} \sim \frac{1}{2^n}$$

Y como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también converge la serie dada.
No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \operatorname{sen}^2 n^3} : \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1 + \operatorname{sen}^2 n^3} = 1 \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7.20. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n + \ln n} \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n}{n^4 + \sqrt{n}} \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n^3 + 5) \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{n^2 \cdot 3^n}$$

Solución. Las tres series son de términos no negativos, luego les podemos aplicar cualquiera de los criterios de convergencia.
(i) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{1}{2n + \ln n} \sim \frac{1}{n}$$

Y como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también diverge la serie dada.

No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+\ln n} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+\ln n} = \frac{1}{2} \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

(*ii*) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{3n^2+n}{n^4+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

Y como la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también converge la serie dada.
No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{n^4+\sqrt{n}} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n^3}{n^4+\sqrt{n}} = 3 \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

(*iii*) Buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$\frac{(7n^3+5)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n}}{n^2\cdot 3^n} \sim \frac{n^3\frac{1}{n}}{n^2\cdot 3^n} = \frac{1}{3^n}$$

Y como la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también converge la serie dada.
No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7n^3+5)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n}}{n^2\cdot 3^n} : \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7n^3+5)\frac{1}{n}}{n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+5}{n^3} = 7 \begin{cases} \neq \infty \\ \neq 0 \end{cases}$$

Para que una serie converja su término general tiene que tender a cero, es decir, ha de ser un infinitésimo. Dos infinitésimos son del mismo orden cuando el límite de su cociente es un número finito distinto de cero. En particular, dos infinitésimos equivalentes son del mismo orden, ya que el limite de su cociente es la unidad, por lo tanto podemos enunciar el siguiente criterio consecuencia del anterior.

Teorema 7.10 (Criterio de infinitésimos equivalentes). *Si los términos generales de dos series de términos positivos son infinitésimos equivalentes entonces las dos series tienen el mismo carácter (es decir convergen simultáneamente o divergen simultáneamente).*

$$a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \sim \sum b_n$$

Ejemplo 7.21. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\ (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\ (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\ (\text{IV})\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$$

Solución. Aplicando infinitésimos equivalentes, resulta:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ luego la serie es convergente.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ luego la serie es divergente.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergente.

(IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Divergente

Nota: Se han aplicado los siguientes infinitésimos para $z \to 0$:

$$\operatorname{sen} z \sim z \qquad \operatorname{arc\,sen} z \sim z \qquad 1-\cos z \sim z^2/2 \qquad \ln(1+z) \sim z$$

Teorema 7.11 (Criterio del cociente. D' Alembert). *Dada una serie de términos positivos, si existe el límite* $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = \ell$*, entonces esta serie converge cuando* $\ell < 1$ *y diverge cuando* $\ell > 1$*. Si* $\ell = 1$ *el criterio no decide sobre la convergencia de la serie*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n \ \textit{convergente} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n \ \textit{divergente} \\ \ell = 1 \Rightarrow \ \textit{duda} \end{cases}$$

Podemos afinar un poco más en el criterio y resolver parte de la duda. Si $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = 1^+$ entonces la serie es divergente. Es decir la duda se resuelve sólo por el lado de la divergencia. Aunque la indeterminación suele resolverse por el criterio de Raabe.

Demostración. Sea $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$. Entonces siempre es posible encontrar un número r tal que $\ell < r < 1$, de manera que, para n suficientemente grande, se tenga

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

De donde,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< ra_n \\ a_{n+2} < ra_{n+1} &< r^2a_n \\ a_{n+3} < ra_{n+2} &< r^3a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

de donde resulta,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < a_n\left(r + r^2 + r^3 + \cdots\right)$$

Luego el resto n-simo de la serie dada es convergente por estar mayorado por una serie geométrica convergente (de razón $r < 1$), y, en consecuencia, la serie dada es convergente.

Por otro lado, si $\ell > 1$, (o incluso $\ell = 1^+$). Entonces siempre será posible encontrar un número r tal que $\ell \geq r \geq 1$, de manera que, para n suficientemente grande, se tenga

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$$

De donde,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq r a_n \\ a_{n+2} \geq r a_{n+1} &\geq r^2 a_n \\ a_{n+3} \geq r a_{n+2} &\geq r^3 a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

de donde resulta,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geq a_n\Big(r + r^2 + r^3 + \cdots\Big)$$

Luego el resto n-simo, R_n, de la serie dada es divergente por estar minorado por una serie geométrica divergente (de razón $r \geq 1$), y en consecuencia, la serie dada es divergente. $\square$

Ejemplo 7.22. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} =$
$\displaystyle = \frac{1}{2} < 1$ luego la serie dada es convergente.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} : \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} =$
$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2} = 0 < 1$ luego la serie dada es convergente.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n(n+1)n!} =$
$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ luego la serie dada es divergente.

Ejemplo 7.23. *Estudia, según los valores del parámetro p, el carácter de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n n!}{n^n} \qquad p > 0$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{p^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{p^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p^n p(n+1)n!n^n}{p^n n!(n+1)^n(n+1)}=\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{p\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{p}{e}\end{aligned}$$

Con lo cual resulta:

Si $p/e<1\Leftrightarrow p<e$ la serie dada es convergente.
Si $p/e>1\Leftrightarrow p>e$ la serie dada es divergente.
Si $p/e=1\Leftrightarrow p=e$ el criterio no decide.

Si $p=e$ resolvemos la duda teniendo en cuenta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{e}{e^-}=1^+\Rightarrow\text{ la serie es divergente}$$

Ejemplo 7.24. *Estudiar la convergencia de la siguiente serie, para los distintos valores de r.*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^r}$$

Solución. Consideremos las siguientes situaciones:

– Para $r<0$, la serie es divergente. En efecto aplicando el criterio del término general, se tiene que $a_n\to\infty\neq 0$.

– Para $0<r\leq 1$, aplicando el criterio de comparación, se tiene que la serie es divergente por ser mayorante de una serie armónica divergente (p-serie con $p\leq 1$). En efecto, para n grande tenemos,

$$\ln n<n\Rightarrow(\ln n)^r<n^r\Rightarrow\frac{1}{(\ln n)^r}>\frac{1}{n^r}$$

– Para $r>1$, aplicamos: primero, el criterio de condensación de Cauchy, y después, el criterio del cociente; con lo que resulta:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^r}\sim\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{\left(\ln 2^n\right)^r}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n\,\ln 2)^r}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^r(\ln 2)^r}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^r(\ln 2)^r}:\frac{2^n}{n^r(\ln 2)^r}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^r(\ln 2)^r}{2^n(n+1)^r(\ln 2)^r}=\\&=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^r=2\cdot 1^r=2>1\end{aligned}$$

luego la serie es divergente.

Teorema 7.12 (Criterio de la raíz. Cauchy). *Dada una serie de términos no negativos, si existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$*, entonces esta serie converge cuando* $\ell < 1$ *y diverge cuando* $\ell > 1$*. Si* $\ell = 1$ *el criterio no decide sobre la convergencia de la serie.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow \begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergente} \\ \ell = 1 \Rightarrow \text{ duda} \end{cases}$$

Demostración. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Entonces siempre es posible encontrar un número r tal que $\ell < r < 1$, de manera que, para n suficientemente grande, se tenga

$$\sqrt[n]{a_n} < r$$

De donde,

$$a_n < r^n$$

de donde resulta que la serie dada es convergente por estar mayorado por una serie geométrica convergente (de razón $r < 1$).

Por otro lado, si $\ell > 1$, (o incluso $\ell = 1^+$). Entonces siempre será posible encontrar un número r tal que $\ell \geq r \geq 1$, de manera que, para n suficientemente grande, se tenga

$$\sqrt[n]{a_n} \geq r$$

De donde,

$$a_n \geq r^n$$

de donde resulta que la serie dada es divergente por estar minorado por una serie geométrica divergente (de razón $r \geq 1$), y en consecuencia, la serie dada es divergente. □

Ejemplo 7.25. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Solución. Aplicando el criterio de la raíz, resulta:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0 < 1$ luego la serie dada es convergente.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1$ luego la serie dada es convergente.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{2} > 1$ luego la serie es divergente.

Ejemplo 7.26. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$$

Solución. Aplicando el criterio de la raíz, resulta:

(*i*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \dfrac{1}{2^{1+0}} = \dfrac{1}{2} < 1$
luego la serie dada es convergente.

(*ii*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(-1)^n+3}}{2^{\frac{n+1}{n}}} = \dfrac{1}{2} < 1$
luego la serie es convergente.

Nota: Aunque pudiera pensarse que el criterio de Cauchy y el de DÁlembert son equivalentes ya que se cumple la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sin embargo, esto no es enteramente cierto, ya que esa igualdad se cumple siempre que el 2º límite exista; pero puede que no exista el límite del cociente y sí el de la raíz.

Lema 7.2 (Criterio de comparación del cociente). *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos tales que, desde un lugar en adelante, la razón de cada término al anterior en la primera serie a_{n+1}/a_n se conserva menor que la correspondiente razón de la segunda serie b_{n+1}/b_n. Entonces, si $\sum b_n$ es convergente, también lo es $\sum a_n$; y si $\sum a_n$ es divergente, también lo es $\sum b_n$. Es decir,*

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow \begin{cases} \sum b_n \text{ Conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ Conv.} \\ \sum a_n \text{ Div.} \Rightarrow \sum b_n \text{ Div.} \end{cases}$$

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que la desigualdad se cumple para todos los valores de n. Será,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a_2}{a_1} < \dfrac{b_2}{b_1} \\ \dfrac{a_3}{a_2} < \dfrac{b_3}{b_2} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{multiplicando miembro a miembro, se tiene} \\ \qquad \dfrac{a_2}{a_1}\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_2}{b_1}\dfrac{b_3}{b_2}\cdots\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \\ \text{y simplificando, resulta} \\ \qquad \dfrac{a_{n+1}}{a_1} < \dfrac{b_{n+1}}{b_1} \Rightarrow a_{n+1} < \dfrac{a_1}{b_1}\, b_{n+1} \end{array}$$

Es decir, $a_{n+1} < k\, b_{n+1}$, de donde, aplicando el criterio de comparación, queda demostrado el lema. □

Teorema 7.13 (Criterio de Raabe). *Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

Entonces la indeterminación puede resolverse con el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = R \Rightarrow \begin{cases} R < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergente} \\ R > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente} \\ R = 1 \Rightarrow \text{ duda} \end{cases}$$

Obsérvese que la comparación con la unidad es contraria a los dos casos anteriores.

Demostración. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ell < 1$, (o incluso $\ell = 1^-$). Entonces, para n suficientemente grande, se tendrá

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$$

De donde,

$$1-\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Es decir,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/n}{1/(n-1)}$$

de donde resulta que la serie dada es divergente por estar minorada, en el cociente, por una serie armónica divergente ($b_n = 1/(n-1)$).

Por otro lado, si $\ell > 1$. Entonces siempre será posible encontrar un número r tal que $\ell > r > 1$, de manera que, para n suficientemente grande, se tenga

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > r \Rightarrow 1-\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1-\frac{r}{n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^r$$

De donde,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = \frac{(1/n)^r}{(1/(n-1))^r}$$

de donde resulta que la serie dada es convergente por estar mayorada por una serie armónica (p-serie) convergente ($b_n = \dfrac{1}{(n-1)^r}$, con $r > 1$). $\square$

Nota: Se ha utilizado la siguiente desigualdad

$$1-\frac{r}{n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^r$$

que se deduce del hecho de que en el desarrollo de Taylor de $(1-1/n)^r$ se tiene,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^r = 1-\frac{r}{n}+\frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{-1}{n}\right)^2+\cdots$$

y para $r > 1$, el tercer término del desarrollo es positivo. Luego, para n suficientemente grande, queda determinada la desigualdad.

Ejemplo 7.27. *Estudiar el carácter de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}\right)^2$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n+3)}\right)^2 : \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}\right)^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$$

Luego el criterio del cociente no decide sobre la convergencia. Aplicamos, entonces, el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{(3n+3)^2-(3n+1)^2}{(3n+3)^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{18n+9-6n-1}{(3n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+8n}{9n^2+18n+9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1$$

Luego la serie es convergente.

Ejemplo 7.28. *Estudiar el carácter de la serie, para los distintos valores de a:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}{(n+1)!} : \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a+n+1}{n+1} = 1$$

Luego el criterio del cociente no decide sobre la convergencia. Aplicamos, entonces, el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a+n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1-1-1-1}{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-a}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-an}{n+1} = -a$$

De donde, se tiene

– Para $-a > 1 \Rightarrow a < -1$ la serie es convergente.

– Para $-a < 1 \Rightarrow a > -1$ la serie es divergente.

– Para $-a = 1 \Rightarrow a = -1$ el criterio no decide, pero, en este caso, al tener el valor de a, para estudiar la convergencia basta con sustituir en la serie. Así,

– Para $a = -1$, se tiene $a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n = 0 + 0 + \cdots = 0 \Rightarrow$ la serie es convergente.

Ejemplo 7.29. *Estudiar el carácter de la serie:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \qquad \textit{siendo } a>0$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)}}{a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}}=\lim_{n\to\infty}a^{-1/n}=a^0=1$$

Luego el criterio del cociente no decide sobre la convergencia. Aplicamos, entonces, el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-a^{-1/n}\right)=\lim_{n\to\infty}-n\left(a^{-1/n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}-n\left(\frac{-1}{n}\ln a\right)=\ln a$$

De donde, se tiene

– Para $\ln a>1\Rightarrow a>e$ la serie es convergente.

– Para $\ln a<1\Rightarrow a<e$ la serie es divergente.

– Para $\ln a=1\Rightarrow a=e$ el criterio no decide, pero, en este caso, al tener el valor de a, para estudiar la convergencia basta con sustituir en la serie. Así,

– Para $a=e$, aplicando la constante de Euler, se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}=\sum_{n=2}^{\infty} e^{-(\ln(n-1)+\gamma+\varepsilon_n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln(n-1)+\gamma+\varepsilon_n}}=$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln(n-1)}e^{\gamma}e^{\varepsilon_n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)e^{\gamma}e^{\varepsilon_n}}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$$

Luego la serie es divergente por ser equivalente a una serie armónica.
Nos resta comprobar que la última equivalencia aplicada es correcta. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)e^{\gamma}e^{\varepsilon_n}}:\frac{1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n-1)e^{\gamma}e^{\varepsilon_n}}=\frac{1}{e^{\gamma}e^{0}}=\frac{1}{e^{\gamma}}$$

luego la equivalencia es correcta por se dicho límite $\neq 0$ y $\neq\infty$.

Teorema 7.14 (Criterio de la integral). *Si $f(x)$ para $x\geq 1$ es una función continua, positiva y monótono decreciente, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

donde $a_n=f(n)$, converge o diverge simultáneamente con la integral

$$\int_1^{\infty}f(x)\,dx$$

7.3.2. Series alternadas

Definición 7.7 (Series alternadas). *Una serie se dice que es alternada cuando sus términos cambian consecutivamente de signo.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

Las series alternadas pueden comenzar por un positivo o por un negativo, aunque supondremos que siempre empiezan con un positivo, en caso contrario bastará con sacar factor común el signo negativo.

Teorema 7.15 (Criterio de convergencia para series alternadas. Leibniz). *Una serie alternada converge si los valores absolutos de sus términos decrecen y el término general tiende a cero.*

$$\left.\begin{array}{c} \sum a_n \ \textit{alternada} \\ |a_n| \downarrow \\ |a_n| \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n \ \textit{converge}$$

Demostración. Consideremos que la sucesión empieza por un término positivo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

y expresemos las sumas parciales de orden par de las dos maneras siguientes:

– Por un lado como sumas de términos positivos

$$\begin{aligned} S_2 &= (a_1 - a_2) \\ S_4 &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \\ S_6 &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \\ &\vdots \\ S_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \end{aligned}$$

– Y por otro, como el resultado de restarle a a_1 diversas cantidades también positivas

$$\begin{aligned} S_2 &= a_1 - a_2 \\ S_4 &= a_1 - (a_2 - a_3) - a_4 \\ S_6 &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - a_6 \\ &\vdots \\ S_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \end{aligned}$$

De lo primero, al ser todos los paréntesis positivos, $a_k - a_{k+1} \geq 0$, resulta que la sucesión de las sumas parciales pares $\{S_{2n}\}$, es una sucesión monótona creciente. Y, de lo segundo, al obtenerse las sumas parciales pares restando de a_1 cantidades positivas, resulta que la sucesión de las sumas parciales pares $\{S_{2n}\}$, es una sucesión acotada superiormente.

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

Luego, tenemos una sucesión monótona creciente que está acotada superiormente, y, en consecuencia, tiene límite.

$$\text{Sea } S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \quad \text{que, además será } 0 \leq S \leq a_1$$

Nos queda demostrar que las sumas impares tienen el mismo límite que las pares, para demostrar que dicho límite es el de todas las sumas parciales, y, en consecuencia, es la suma de la sucesión. En efecto, cada suma impar se obtiene a partir de una suma par de la siguiente forma

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \quad \square$$

El recíproco de este teorema no es cierto, ya que sólo podemos asegurar que si el término general no tiende a cero, entonces la serie es divergente, por no cumplir la condición necesaria de convergencia; pero si la sucesión de los valores absolutos no es decreciente, entonces no podemos asegurar nada.

Nota: Gráficamente, el criterio de Leibniz para la convergencia de la serie alternada queda reflejado en la Fig. 7.2 en esta página

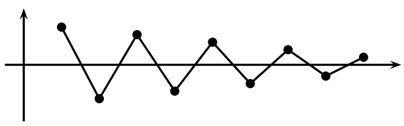


Figura 7.2: Criterio de Leibniz

Ejemplo 7.30. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln n}{n}$$

Solución. Aplicando el criterio de Leibniz, resulta:

(i) La primera serie no cumple el criterio del término general,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

luego la serie dada es divergente.

(ii) Para la segunda serie tenemos,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ &n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \Rightarrow |a_n| \downarrow \end{aligned}$$

luego la serie dada es convergente (serie «armónica alternada»).

(iii) Para la tercera serie tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(donde hemos tratado la sucesión como una función).

Para estudiar el crecimiento de $|a_n| = f(n)$ recurrimos a la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

y estudiamos su crecimiento a partir de su derivada,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

teniendo en cuenta que la función $f(x)$ será decreciente allí donde su derivada $f'(x)$ sea negativa, resulta:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow 1 < \ln x \Rightarrow x > e$$

Luego la sucesión $|a_n|$ será decreciente para $n \geq 3$, lo que significa que al eliminar los dos primeros términos de la serie, se cumplen las condiciones de Leibniz. Por lo tanto,

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

Teorema 7.16 (Suma de la serie alternada). *La suma de la serie alternada es siempre menor que su primer término.* $S \leq a_1$

Teorema 7.17 (El error en la serie alternada). *Si tomamos como aproximación de la suma total de una serie alternada una suma parcial, entonces el error que cometemos en esta aproximación, en valor absoluto, es menor que el primer término que no se suma.*

$$S \simeq S_n \quad \Rightarrow \quad |R_n| < a_{n+1}$$

Demostración. En efecto, la serie alternada la podemos expresar de la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = [a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \pm a_n] \mp [a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots]$$

con lo cual, si tomamos como valor aproximado de la suma total, la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S \simeq S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \pm a_n$$

el error que cometemos en la aproximación vendrá dado por

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots$$

pero este error es, a su vez, una serie alternada cuya suma será menor que su primer término. Es decir

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots < a_{n+1} \quad \square$$

Ejemplo 7.31. *Probar que la serie armónica alternada es convergente y dar una estimación de su suma con un error menor que* 0,1

Solución. La serie armónica alternada viene definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

– Su convergencia se ha visto en el Ejemplo 7.30, en la página 34, donde se vio que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ &n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \Rightarrow |a_n| \downarrow \end{aligned}$$

luego la serie es convergente.

– Para estimar su suma, con el error requerido; en primer lugar, debemos determinar cuántos términos hemos de sumar. Para ello determinamos el valor de n, a partir del error permitido. Teniendo en cuenta que el error en la serie alternada viene determinado por el primer término no sumado, resulta:

$$|R_n| \leq |a_{n+1}| < 0{,}1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 > 10 \Rightarrow n > 9 \Rightarrow n = 10$$

En consecuencia, la estimación de la suma, con un error menor que 0,1 es

$$S \simeq S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 0{,}64563$$

7.3.3. Series de términos de signo cualesquiera

Definición 7.8 (Convergencia absoluta). *Una serie se dice que es absolutamente convergente si la serie formada por los valores absolutos de sus términos es convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolutamente convergente} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente}$$

Definición 7.9 (Convergencia condicional). *Una serie se dice que es condicionalmente convergente si ella es convergente pero la serie formada por los valores absolutos de sus términos es divergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ condicionalmente convergente} \Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergente} \end{cases}$$

Ejemplo 7.32. *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:*

$$a)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots; \qquad b)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Solución. Ambas series son alternadas y cumplen las condiciones de Leibnitz, luego son convergentes. Ahora bien, si construimos las series formadas con los valores absolutos de sus términos, resulta:

a) $$\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

que es una serie geométrica convergente ($r = 1/2$). Y, en consecuencia, la serie es absolutamente convergente (porque la serie formada con los valores absolutos de sus términos es convergente).

Mientras que, para la otra serie tenemos:

b) $$\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

que es la serie armónica divergente. Luego, la serie es condicionalmente convergente, porque ella es convergente, pero la serie formada con los valores absolutos de sus términos es divergente.

Teorema 7.18 (Criterio de la convergencia absoluta). *Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

Demostración. En general, tenemos que:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|$$

En consecuencia, aplicando el criterio de comparación, para series de términos no negativos, podemos afirmar que

$$\sum |a_n| \text{ Conv. } \Rightarrow \sum \big(a_n + |a_n|\big) \text{ Conv.}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que a_n siempre se puede expresar de la forma $a_n = a_n + |a_n| - |a_n|$, resulta

$$\sum a_n = \sum \big(a_n + |a_n| - |a_n|\big) = \sum \big(a_n + |a_n|\big) - \sum |a_n|$$

Y, en consecuencia, tenemos

$$\sum |a_n| \text{ Conv. } \Rightarrow \sum \big(a_n + |a_n|\big) \text{ Conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ Conv.}$$

ya que $\sum a_n$, sería la diferencia de dos series convergentes. □

Nota: Este criterio es valido para todo tipo de series, incluidas las alternadas.

Si una serie de términos positivos es convergente, entonces podemos cambiar de signo todos los términos que queramos, y la nueva serie sigue siendo convergente.

La convergencia absoluta permite estudiar la convergencia de una serie de términos cualesquiera, pero no la divergencia.

Al estudiar la convergencia absoluta, se está estudiando una serie de términos positivos (no negativos) y, por tanto, se le pueden aplicar todos los criterios de convergencias de las series de términos positivos. Así, si $\sum a_n$ es una serie que tiene términos positivos y términos negativos, resulta que a $\sum a_n$ sólo le puedo aplicar el criterio del término general para la divergencia; o bien, el criterio de Leibniz, si fuera alternada; mientras que a $\sum |a_n|$ le puedo aplicar todos los criterios de convergencia de las series de términos no negativos. Así pues, si $\sum |a_n|$ es divergente, entonces, las posibilidades de estudio de $\sum a_n$ son mínimas.

Reordenación de términos

Teorema 7.19 (Reordenación de términos). *Si una serie es absolutamente convergente, entonces la serie obtenida después de cualquier reordenación de sus términos también converge absolutamente y tiene la misma suma.*

Es decir, la suma de una serie absolutamente convergente no se altera por una reordenación de sus términos. Si la serie converge sólo condicionalmente, entonces al reordenar sus términos la suma de la serie puede cambiar. En particular, reordenando los términos de una serie condicionalmente convergente se puede transformar en divergente.

Teorema 7.20 (Teorema de Dirichlet). *Una serie es absolutamente convergente si y sólo si su suma no varía ante cualquier reordenación de sus términos.*

Teorema 7.21 (Teorema de Riemann). *Se puede alterar el orden de los términos de una serie condicionalmente convergente, de modo que la serie sume lo que queramos.*

Ejemplo 7.33. *Estudiar la convergencia absoluta de las siguientes series:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^3}$$

Solución. Se trata de series con términos positivos y negativos. Aplicando el criterio de la convergencia absoluta, resulta que la serie de los valores absolutos es una serie de términos no negativos y en consecuencia se le pueden aplicar todos los criterios de convergencia.
(i) Para la primera serie tenemos:

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

luego, por el criterio de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, por tanto, ella es convergente.
(ii) Para la segunda serie tenemos:

$$|a_n| = \frac{2^n}{n!}$$

de donde, aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

luego, por el criterio del cociente, la serie dada es absolutamente convergente, y por tanto ella es convergente.
(iii) Para la tercera serie tenemos,

$$|a_n| = \frac{\ln n}{n^3}$$

Teniendo en cuenta que $\ln n < n$ resulta la desigualdad:

$$|a_n| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

luego, aplicando el criterio de comparación, la serie dada es absolutamente convergente, y por tanto ella es convergente.

Ejemplo 7.34. *Estudiar la convergencia absoluta de la siguiente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Solución. El estudio de esta serie resulta más fácil si transformamos su término general, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, con lo cual resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Con lo cual tenemos:

$$|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Y para estudiar la convergencia de esta serie buscamos una serie conocida que nos sirva de comparación. Para valores grandes de n podemos esperar que los siguientes infinitésimos sean del mismo orden:

$$|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Y como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, entonces, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos, también diverge la serie formada por los valores absolutos de los términos de la serie dada. No obstante, el proceso necesita de la siguiente comprobación:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\neq\infty\\ \neq 0\end{array}\right.$$

Estudiemos su convergencia condicional. Se trata de una serie alternada, luego podemos aplicarle el criterio de Leibniz,

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n|>|a_{n+1}\Rightarrow |a_n|\downarrow$ Luego la serie es convergente y, por tanto, condicionalmente convergente.

7.3.4. Aplicación del criterio de D' Alembert al cálculo de límite de sucesiones

El criterio del cociente proporciona un método indirecto para el cálculo de límites de sucesiones.

Teorema 7.22. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión cuyos términos son todos positivos (o al menos desde un lugar en adelante). Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

Demostración. Consideremos la serie, de términos positivos, $\sum a_n$. Aplicando el criterio del cociente y el del término general, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ Conv. } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Por otro lado, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$$

Entonces, siempre será posible encontrar un número r tal que $\ell > r > 1$, de manera que, para n suficientemente grande ($n \geq k$), se tenga

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$$

De donde,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &> ra_k \\ a_{k+2} &> ra_{k+1} > r^2 a_k \\ a_{k+3} &> ra_{k+2} > r^3 a_k \\ &\vdots \\ a_n &> ra_{n-1} > r^{n-k} a_k \end{aligned}$$

de donde, al ser k fijo y $r > 1$, resulta,

$$\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} r^{n-k} a_k = a_k \lim_{n\to\infty} r^{n-k} = +\infty$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

Ejemplo 7.35. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!}$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

Ejercicios propuestos de la sección 7.3. Criterios de convergencia

Soluciones en la página 161

7.3.1.

7.4. Suma de series

Lo normal es que no exista un procedimiento para calcular el valor exacto de la suma de una serie y tengamos que conformarnos con un valor aproximado de la suma, sumando los primeros términos de la serie. Sin embargo podemos intentar calcular el valor exacto de la suma de la serie utilizando los siguientes procedimientos:

7.4.1. Aplicando la definición

Ya se vio en la sección 7.2.1, en la página 6.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Ejemplo 7.36. *Calcular* $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \cdots$

Solución. Aplicando la definición, resulta

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{3}{4} \\
S_2 &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{25+5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \\
S_3 &= \frac{8}{9} + \frac{7}{144} = \frac{128+7}{144} = \frac{135}{9\cdot 16} = \frac{15}{16} \\
&\vdots \\
S_n &= \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Para que sea $S_n = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$, tendrá que ser $S_{n+1} = \frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$
En efecto,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \\
&= \frac{(n^2+2n)(n^2+4n+4)+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \\
&= \frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \\
&= \frac{n^4+6n^3+12n^2+10n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} = \\
&= \frac{n^2+4n+3}{(n+2)^2} = \frac{n^2+4n+4-1}{(n+2)^2} = \frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2} =
\end{aligned}$$

luego la expresión supuesta para S_n es correcta. En consecuencia,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

7.4.2. Series geométricas

Ya se vio en la sección **??**, en la página ??.

$$\sum_{n=k}^{\infty} a\cdot r^n = \frac{a\cdot r^k}{1-r} \quad \text{si} \quad |r|<1$$

(el numerador de la fracción es el primer término de la serie)

Ejemplo 7.37. *Sumar* $\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\cdots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$

Solución. La serie se puede descomponer en la suma de dos series geométricas convergentes. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=$$
$$=\frac{1/2}{1-1/2}+\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1/2}{1/2}+\frac{1/3}{2/3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

7.4.3. Series aritmético-geométricas

Se llaman series aritmético-geométricas aquellas cuyo término general es de la forma
$$a_n=(a\cdot n+b)r^n$$
Es decir es el producto de dos términos: uno va en progresión aritmética y el otro en progresión geométrica. Si la serie está expresada en *forma canónica* (comienza en $n=1$ y el exponente de r es n), entonces su suma se puede calcular por la fórmula:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a\cdot n+b)r^n=\frac{(a+b)r-b\,r^2}{(1-r)^2}$$
También podemos repetir el proceso completo de deducción de la fórmula en cada caso,
$$\begin{array}{rl} S_n= & (a+b)r+(2a+b)r^2+(3a+b)r^3+\cdots+(an+b)r^n \\ -rS_n= & -(a+b)r^2-(2a+b)r^3-(3a+b)r^4-\cdots-(an+b)r^{n+1} \\ \hline (1-r)S_n= & (a+b)r+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n-(an+b)r^{n+1} \end{array}$$
de donde,
$$(1-r)S_n=(a+b)r+a(r^2+r^3+\cdots+r^n)-(an+b)r^{n+1}$$
y tomando límites,
$$(1-r)S=(a+b)r+a\frac{r^2}{1-r}-0=\frac{(a+b)r-(a+b)r^2+ar^2}{1-r}=\frac{(a+b)r-br^2}{1-r}$$
de donde, despejando S
$$S=\frac{(a+b)r-br^2}{(1-r)^2}$$

Ejemplo 7.38. *Sumar* $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{11}{8}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución. se trata de una serie aritmético-geométrica de *razón* 1/2, y por tanto convergente. Para sumarla podemos aplicar la fórmula, o bien repetir el proceso completo,

$$\begin{array}{r}
S_n = 3\frac{1}{2} + 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\frac{-1}{2}S_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 11\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \cdots - (4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
\hline
\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - (4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{array}$$

de donde,

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2} + 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - (4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

y tomando límites,

$$\frac{1}{2}S = \frac{3}{2} + 4\frac{1/4}{1-1/2} - 0 = \frac{3}{2} + 4\frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

de donde, despejando S, resulta $S = 7$.

Nota: También podemos aplicar la fórmula para sumar las series aritmético geométricas, una vez que la serie está expresada en forma canónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a\cdot n + b)r^n = \frac{(a+b)r - br^2}{(1-r)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(4-1)\frac{1}{2} + 1\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 7$$

Ejemplo 7.39. *Sumar* $5 + \dfrac{8}{2} + \dfrac{11}{4} + \dfrac{14}{8} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Solución. se trata de una serie aritmético-geométrica de *razón* 1/2, y por tanto convergente. Para sumarla podemos aplicar la fórmula, o bien repetir el proceso completo,

$$\begin{array}{r}
S_n = 5 + 8\frac{1}{2} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
\frac{-1}{2}S_n = -5\,\frac{1}{2} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 14\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \cdots - (3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\hline
\frac{1}{2}S_n = 5 + \frac{3}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{array}$$

de donde, multiplicando por 2, resulta

$$S_n = 10 + 3 + \frac{3}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

y, sacando 3 factor común en la serie geométrica,

$$S_n = 13 + 3\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] - (3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

y tomando límites,

$$S = 13 + 3\,\frac{1/2}{1-1/2} - 0 = 13 + 3 = 16.$$

Nota: También podemos aplicar la fórmula para sumar las series aritmético geométricas, una vez que la serie está expresada en forma canónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a\cdot n+b)r^n = \frac{(a+b)r-br^2}{(1-r)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2\frac{(3+2)\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= 2\frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{4}}{\frac{1}{4}} = 2\frac{8/4}{1/4} = 16$$

7.4.4. Series hipergeométricas

Las series hipergeométricas se detectan al aplicar el criterio del cociente en la convergencia. Cuando nos encontramos con la situación,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\cdot n+\beta}{\alpha\cdot n+\gamma} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Definición 7.10. *Una serie, de términos positivos,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se llama hipergeométrica cuando:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\cdot n+\beta}{\alpha\cdot n+\gamma} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad \textit{con } \alpha>0,\ \gamma\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\gamma$$

Nota 1: Nótese que numerador y denominador han de ser polinomios de primer grado con el mismo coeficiente de n. En el caso de que el coeficiente de n, fuera negativo, $\alpha<0$, bastaría multiplicar numerador y denominador por -1, para obtenerlo positivo (es decir, lo que realmente se exige de α es que sea $\alpha\neq 0$).

Teorema 7.23. *La convergencia de la serie hipergeométrica se estudia mediante el criterio de Raabe y viene determinada de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta<\gamma \Rightarrow \ \textit{Convergente} \\ \alpha+\beta>\gamma \Rightarrow \ \textit{Divergente} \end{array}$$

Para sumar la serie hipergeométrica (que comience en $n=1$*) se puede aplicar la fórmula de la suma de una serie geométrica de razón*

$$r = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Nota 2: Nótese que cuando $\gamma > 0$, la convergencia de la serie hipergeométrica viene determinada, por la razón, de manera *análoga* a lo que ocurre en la serie geométrica. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha+\beta<\gamma \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=r<1 \Rightarrow \text{ Convergente} \\ \alpha+\beta>\gamma \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=r>1 \Rightarrow \text{ Divergente} \end{aligned}$$

La situación $r = 1$ no se da; ya que, en ese caso, sería $\alpha + \beta = \gamma$, y, en consecuencia, la serie no es hipergeométrica.

Cuando $\gamma < 0$, el criterio es el contrario. Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha+\beta<\gamma \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=r>1 \Rightarrow \text{ Convergente} \\ \alpha+\beta>\gamma \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=r<1 \Rightarrow \text{ Divergente} \end{aligned}$$

En resumen, tenemos:

$$\alpha>0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma>0 \Rightarrow \begin{cases} r<1 \Rightarrow \text{ Convergente} \\ r>1 \Rightarrow \text{ Divergente} \end{cases} \\ \gamma<0 \Rightarrow \begin{cases} r>1 \Rightarrow \text{ Convergente} \\ r<1 \Rightarrow \text{ Divergente} \end{cases} \end{cases}$$

Nota 3: Hay que hacer notar que para poder aplicar la fórmula de la suma, la serie tiene que comenzar en $n = 1$. Si la serie comienza en $n = n_0$ no está permitido sustituir en la fórmula de la suma, a_1 por a_{n_0}, como ocurre en la serie geométrica. Sino que, en este caso habrá que calcular la suma total desde $n = 1$ y restar los términos que no figuren en la serie, o bien, transformar la fórmula del término general para que la suma comience en $n = 1$. Así, por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n = -a_1 - a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}$$

Demostración. Supongamos una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha \cdot n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma}$$

Entonces, aplicando el criterio de Raabe, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\alpha \cdot n+\beta}{\alpha \cdot n+\gamma}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\alpha \cdot n+\gamma-\alpha \cdot n-\beta}{\alpha \cdot n+\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\gamma-\beta)n}{\alpha \cdot n+\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Luego, la serie es:

$$\text{convergente si } \frac{\gamma-\beta}{\alpha} > 1; \text{ y divergente si } \frac{\gamma-\beta}{\alpha} < 1$$

Luego, bajo el supuesto de que $\alpha > 0$, se tiene:

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta<\gamma \Rightarrow \sum a_n \text{ Convergente} \\ \alpha+\beta>\gamma \Rightarrow \sum a_n \text{ Divergente} \end{array}$$

Para calcular la suma, demostremos por inducción que la suma parcial n-sima tiene la siguiente expresión,

$$S_n = \frac{(\alpha \cdot n+\beta)a_n - \gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma}$$

En efecto,

– La fórmula se cumple para $n = 1$,

$$S_1 = \frac{(\alpha \cdot 1+\beta)a_1 - \gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma} = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)a_1}{\alpha+\beta-\gamma} = a_1$$

– Suponiendo que es cierta para n, también se cumple para $n+1$

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= \frac{(\alpha \cdot n+\beta)a_n - \gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma} + a_{n+1} = \\ &= \frac{(\alpha \cdot n+\beta)\dfrac{\alpha \cdot n+\gamma}{\alpha \cdot n+\beta}\, a_{n+1} - \gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma} + a_{n+1} = \\ &= \frac{(\alpha \cdot n+\gamma)a_{n+1} - \gamma\, a_1 + (\alpha+\beta-\gamma)a_{n+1}}{\alpha+\beta-\gamma} = \\ &= \frac{(\alpha \cdot n+\gamma+\alpha+\beta-\gamma)a_{n+1} - \gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma} = \frac{\big[\alpha \cdot (n+1)+\beta\big]a_{n+1} - \gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma} \end{aligned}$$

Luego la expresión dada para S_n es correcta, y, en consecuencia, la suma de la serie, cuando es convergente, viene dada por:

$$\begin{aligned} S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha \cdot n+\beta)a_n - \gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma} &= \frac{0-\gamma\, a_1}{\alpha+\beta-\gamma} = \frac{\gamma\, a_1}{\gamma-\alpha-\beta} = \\ &= \frac{a_1}{1-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}} = \frac{a_1}{1-r} \quad \square \end{aligned}$$

Nota 4: Para estudiar la convergencia se puede seguir cualquier criterio, no obstante, una vez que necesitamos calcular el cociente a_{n+1}/a_n, el camino más lógico es el criterio de Raabe. Sin embargo, si el criterio de Raabe no decidiera sobre la convergencia (porque el nuevo límite fuera también 1), entonces habría que acudir a otro criterio. Pero, en este caso, la serie no sería hipergeométrica.

Hay que advertir que aunque en la suma se aplica la fórmula de las series geométricas, no por ello la serie es geométrica, ni la convergencia viene determinada, exactamente, por la razón como ocurre en las series geométricas, sino, que hay que tener en cuenta el signo de γ.

Ejemplo 7.40. *Estudiar el carácter de la siguiente serie y determinar su suma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(3n+7)(3n+10)} : \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{(3n+4)(3n+7)}{(3n+7)(3n+10)} = \\ = \frac{3n+4}{3n+10} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

cuyo límite es 1, y nos indica que se trata de una serie hipergeométrica. Para determinar la convergencia podemos acudir el criterio de Raabe.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{3n+4}{3n+10}\right) = n\frac{3n+10-3n-4}{3n+10} = \\ = \frac{6n}{3n+10} \to 2 > 1 \text{ Conv.}$$

Para sumarla, necesitamos sacar del sumatorio el término a_0, con objeto de tener la suma desde $n = 1$ y poderle aplicar la fórmula de la serie geométrica de razón $r = 7/10$, con lo cual,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{28} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{28} + \frac{1/70}{1-7/10} = \\ = \frac{1}{28} + \frac{1/70}{3/10} = \frac{1}{28} + \frac{1}{21} = \frac{3+4}{3\cdot 4\cdot 7} = \frac{7}{3\cdot 4\cdot 7} = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 7.41. *Determina el carácter de la siguiente serie numérica y calcula su suma*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} : \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \\ = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{2n-1}{2n+5} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

cuyo límite es 1, y nos indica que se trata de una serie hipergeométrica. Para determinar la convergencia podemos acudir el criterio de Raabe.

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = n(1 - \frac{2n-1}{2n+5}) = n\frac{2n+5-2n+1}{2n+5} = \frac{6n}{2n+5} \to 3 > 1 \text{ Conv.}$$

Para sumarla, necesitamos que la serie comience en $n = 1$, lo que se consigue sumando y restando a_1, con lo cual a la suma desde $n = 1$ se le puede aplicar la fórmula de la serie geométrica de razón $r = 1/5$, resultando,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{-1}{1\cdot 3\cdot 5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{-1}{15} + \frac{1/15}{1-1/5} = \frac{-1}{15} + \frac{1/15}{4/5} = \frac{-1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{-12+15}{12\cdot 15} = \frac{1}{60}$$

7.4.5. Series telescópicas

Son aquellas cuyo término general se puede descomponer en la diferencia de dos términos consecutivos, de manera que en las sumas parciales se simplifican todos los términos intermedios

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

Tenemos:

$$S_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b - 3 - b_4 + \cdots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

de donde,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1})$$

Nota: Para determinar la expresión simplificada de S_n; en unas ocasiones es preferible abordar directamente la expresión total de S_n; y, en otras ocasiones, es preferible hacerlo de manera progresiva: S_1, $S_2, \cdots, S_n$.

Ejemplo 7.42. *Estudiar el carácter de las siguientes series y sumarlas cuando sea posible.*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$$

Solución. Utilizando las propiedades de los logaritmos las tres series se pueden expresar de manera telescópica.

a) Para la primera serie tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \big[\ln(n+1) - \ln n\big]$$

de donde,

$$\begin{aligned} S_1 &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \\ S_2 &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3 \\ S_3 &= \ln 3 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4 \\ &\ \vdots \\ S_n &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

luego la serie es divergente.

b) Transformamos la expresión bajo el logaritmo hasta convertirla en el cociente de dos términos consecutivos. Así,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln\frac{(n+1)(n-1)}{n\cdot n} = \ln\left(\frac{n+1}{n} : \frac{n}{n-1}\right) = \\ = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
S_2 &= \ln\frac{3}{2} - \ln 2 \\
S_3 &= \ln\frac{3}{2} - \ln 2 + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{3}{2} = -\ln 2 + \ln\frac{4}{3} \\
S_4 &= -\ln 2 + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} - \ln\frac{4}{3} = -\ln 2 + \ln\frac{5}{4} \\
&\vdots \\
S_n &= -\ln 2 + \ln\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

y en consecuencia, la serie es convergente y su suma es:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln 2 + \ln\frac{n+1}{n}\right) = -\ln 2$$

c) Transformamos la expresión bajo el logaritmo hasta convertirla en el cociente de dos términos consecutivos, para ello tenemos en cuenta que $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$, con lo que resulta,

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)} = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \\ = \ln\left(\frac{n+2}{n} : \frac{n+3}{n+1}\right) = \ln\frac{n+2}{n} - \ln\frac{n+3}{n+1}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \ln 3 - \ln\frac{4}{2} \\
S_2 &= \ln 3 - \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{4}{2} - \ln\frac{5}{3} = \ln 3 - \ln\frac{5}{3} \\
S_3 &= \ln 3 - \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{5}{3} - \ln\frac{6}{4} = \ln 3 - \ln\frac{6}{4} \\
&\vdots \\
S_n &= \ln 3 - \ln\frac{n+3}{n+1}
\end{aligned}$$

y en consecuencia, la serie es convergente y su suma es:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln 3 - \ln\frac{n+3}{n+1}\right) = \ln 3$$

7.4.6. Descomposición en fracciones simples

Se aplica en aquellas series cuyo término general es el cociente de dos polinomios, con objeto de convertirlas en telescópicas.

Ejemplo 7.43. *Estudiar el carácter y sumar, en su caso, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$$

Solución. Factorizamos el denominador; para ello hallamos las raíces de la ecuación $n^2+3n+2=0$

$$n^2+3n+2=0 \Rightarrow n = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{cases}-1\\-2\end{cases}$$

de donde,

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)}$$

igualando los coeficientes, resulta

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ 2A+B&=1\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&B=-A\\ &2A+A=1\Rightarrow A=1\Rightarrow B=-1\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$a_n = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
S_2 &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\
S_3 &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = \frac{1}{2}-\frac{1}{5}\\
&\vdots\\
S_n &= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

En consecuancia, resulta,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Nota: También podemos hacer,

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Nota: En ocasiones la cancelación de los términos resulta un tanto complicada; como en el siguiente ejemplo,

Ejemplo 7.44. *Sumar* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)}$

Solución. Descomponemos en fracciones simples,

$$\frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n^2+3n+2) + B(n^2+2n) + C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{An^2 + 3An + 2A + Bn^2 + 2Bn + Cn^2 + Cn}{n(n+1)(n+2)}$$

de donde, igualando coeficientes, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} B+C=-5/2 \\ 2A+B=2 \\ A=5/2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} C=-5/2+3=1/2 \\ B=2-5=-3 \\ A=5/2 \end{array}\right\}$$

de donde,

$$a_n = \frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)} = \frac{5/2}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

de donde, multiplicando por 2 para evitar las fracciones, resulta,

$$2a_n = \frac{5}{n} - \frac{6}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
2S_1 &= \frac{5}{1} - \frac{6}{2} + \frac{1}{3} \\
2S_2 &= 5 - \frac{6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{6}{3} + \frac{1}{4} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \\
2S_3 &= 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{3} - \frac{6}{4} + \frac{1}{5} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} \\
2S_3 &= 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \frac{1}{6} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{1}{6} \\
&\vdots \\
2S_n &= 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+2} \Rightarrow S_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - 0 + 0 = \frac{10}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

7.4.7. Series que se obtienen a partir del número e

Cuando el denominador es un factorial y el numerador un polinomio intentamos relacionar la serie con el número e, transformando para ello el numerador con objeto de expresar el término general como suma de fracciones con numeradores numéricos y denominadores factoriales, y comparamos el resultado con el desarrollo del número e. Si en el proceso aparecen factoriales de términos negativos lo resolvemos sacando del sumatorio los términos necesarios para evitar los negativos. Por tanto, tenemos que las series del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{(n+k)!} \quad \text{son siempre convergentes}$$

y para hallar su suma las descomponemos en *fracciones simples*, teniendo en cuenta el desarrollo:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

La descomposición en *fracciones simples* también puede hacerse por identificación de coeficientes.

Ejemplo 7.45. *Sumar las series,*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$$

Solución. Comparando cada una de las series con la serie

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

resulta,

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e - 1$$

$$b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e - 1$$

$$b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e - 1 - 1 = e - 2$$

Ejemplo 7.46. *Sumar la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Solución. Transformamos el numerador con objeto de expresar el término general como suma de fracciones con numeradores numéricos y denominadores factoriales, y comparamos el resultado de cada sumando con el desarrollo del número e. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = (e-1) - (e-2) = 1$$

Ejemplo 7.47. *Sumar la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

Solución. Como en el ejemplo anterior, transformamos el numerador con objeto de expresar el término general como suma de fracciones con numeradores numéricos y denominadores factoriales. Sin embargo, en este caso aparece en el denominador el factorial de un número negativo $(-1)!$. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

En consecuencia, para evitar esta circunstancia, sacamos el primer término del sumatorio, resultando,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}&=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\\&=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)=1+(e)+(e-1)=2e\end{aligned}$$

Ejemplo 7.48. *Sumar la serie* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+3k-1}{k!}$

Solución. Para sumarla descomponemos el término general en varios sumandos de manera que en los numeradores de cada uno de ellos sólo aparezcan números y en los denominadores factoriales. Esto se consigue teniendo en cuenta que $k(k-1)=k^2-k$, resulta.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+3k-1}{k!}&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-k+4k-1}{k!}=\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{k(k-1)}{k!}+\frac{4k}{k!}-\frac{1}{k!}\right)=\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4}{(k-1)!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}=\\&=e+4(e-1)-(e-2)=4e-2\end{aligned}$$

Nota: La descomposición también podía haberse hecho mediante la identificación de coeficientes. En efecto, haciendo:

$$\frac{k^2+3k-1}{k!}=\frac{Ak(k-1)+Bk+C}{k!}$$

resulta:

$$\left.\begin{array}{l}k=0\Rightarrow -1=C\\ k=1\Rightarrow 3=B+C\\ n=2\Rightarrow 9=2A+2B+C\end{array}\right\}\begin{array}{l}C=-1\\ B=3-C=3+1=4\\ A=\dfrac{9-2B-C}{2}=\frac{1}{2}(9-8+1)=1\end{array}$$

Ejercicios propuestos de la sección 7.4. Suma de series

Soluciones en la página 161

7.4.1.

Ejercicios y problemas del Capítulo 7

Ejercicios resueltos del Capítulo 7

7.1. El signo del sumatorio

7.2. Series numéricas. Definiciones

??. Criterios de convergencia

7.1 (Convergencia de series numéricas). *Determina el carácter de las siguientes series numéricas:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Solución. $a)$ Por el criterio de cociente, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{\frac{n+1}{2}}} : \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}} = \frac{(n+1)2^{\frac{n}{2}}}{n\,2^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{n+1}{n}\,2^{\frac{n}{2}-\frac{n+1}{2}} = \frac{n+1}{n}\,2^{-1/2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

luego la serie es convergente.

$b)$ Aplicando el infinitésimo $\ln(1+z) \sim z$, resulta,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Luego la serie es convergente.

7.2 (Convergencia de series numéricas). *Utiliza el criterio de condensación de Cauchy para estudiar la convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *según los valores de* p

Solución. El criterio de condensación de Cauchy establece que si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de términos no negativos. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ es convergente. En consecuencia,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\,\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Luego, al resultar una serie armónica (p-serie), la serie es convergente para $p > 1$ y divergente para $p \leq 1$.

7.3 (Convergencia de series numéricas). *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series:*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}.$

Solución. a) Aplicando la condición necesaria del término general, para la convergencia, resulta,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

Luego la serie es divergente.

b) La serie de los valores absolutos es

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

Para estudiar la convergencia de esta seria aplicamos el criterio de la integral,

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln(\ln n)\Big]_2^{\infty} = +\infty$$

luego la serie es divergente. En consecuencia la serie dada no es absolutamente convergente.

Ahora bien, la serie dada es alternada y cumple las condiciones de Leibniz, luego es convergente. En efecto:

$$\frac{1}{n\ln n}\to 0, \quad \frac{1}{n\ln n}\downarrow$$

Luego es condicionalmente convergente.

Nota: El criterio de la integral establece que si existe un número natural n_0 tal que la función no negativa f decrece cuando $x \geq n_0$, entonces la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

converge si y sólo si converge la integral

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

El criterio de Leibniz para las series alternadas establece que

$$\left.\begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ a_1 \geq a_2 \geq \cdots > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ converge}$$

7.4 (Convergencia de series numéricas). *Determina el carácter de las series*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\operatorname{sen}^2\frac{1}{n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n\cdot n^n}$

Solución. *a*) Al ser $\operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{n} > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

luego, por el criterio de comparación, la serie es divergente.
b) Aplicando el criterio de la raíz, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{5^n \cdot n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{5n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Nota: A partir del criterio de la raíz[1], se tiene $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n} = 1$

7.5 (Límites). *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

Solución. El límite pedido puede calcularse teniendo en cuenta que representa la suma de una serie divergente.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$$

También puede calcularse teniendo en cuenta la constante de Euler.

??. Suma de series

7.6 (Series numéricas). *Estudiar el carácter y sumar en su caso las siguientes series numéricas:*

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{n^2+5n-3} \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7n-3}{(n+1)!}$$

Solución.

(*i*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{n^2+5n-3}$ la serie diverge ya que $a_n \to \infty$

(*ii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergente.

Se ha aplicado el infinitésimo $1 - \cos z \sim \dfrac{z^2}{2}$

(*iii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7n-3}{(n+1)!}$ La serie es del tipo $\sum \dfrac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente, puede comprobarse por el criterio del cociente. Su suma se obtiene a partir de la serie que define al número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

[1] Ver teorema **??** en la Pág. **??**

Para sumarla descomponemos el término general en varios sumandos de manera que en los numeradores de cada uno de ellos sólo aparezcan números y en los denominadores factoriales. Teniendo en cuenta que $(n+1)n = n^2+n$, resulta.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n-3}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+6n+6-9}{(n+1)!} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)n}{(n+1)!}+\frac{6(n+1)}{(n+1)!}-\frac{9}{(n+1)!}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{(n+1)!} = \\ &= e+6(e-2)-9(e-2) = 12-2e\end{aligned}$$

7.7 (Series numéricas). *Estudiar el carácter y sumar en su caso las siguientes series numéricas:*

$$(i)^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}\right),\ (ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},\ (iii)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!}$$

Solución. (i) La serie puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

que es una serie aritmético-geométrica, de *razón* $1/2$ y por tanto convergente. Para sumarla podemos aplicar la fórmula, o bien repetir el proceso completo:

$$\begin{aligned} S_n &= 5\frac{1}{2}+7\left(\frac{1}{2}\right)^2+9\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{-1}{2}S_n &= -5\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)^3-9\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{1}{2}S_n &= \frac{5}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{5}{2}+2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

y tomando límites:

$$\frac{1}{2}S = \frac{5}{2}+2\frac{1/4}{1-1/2}-0 = \frac{5}{2}+2\frac{1/4}{1/2} = \frac{5}{2}+1$$

de donde, despejando S, se tiene $S = 5+2 = 7$

Nota: También podemos aplicar la fórmula para sumar las series aritmético geométricas, una vez que la serie está expresada en forma canónica.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(an+b)r^n = \frac{(a+b)r-br^2}{(1-r)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2+3)\frac{1}{2}-3(\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 7$$

[2]Ver Ejerc. 7.24 (a), en la Pág. 74

(*ii*) Para estudiar la convergencia de la segunda serie aplicamos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}=\frac{2n-1}{2n+5}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

Se trata de una serie hipergeométrica de *razón* $r=\dfrac{2-1}{5}=\dfrac{1}{5}$, luego es convergente, y su suma es:

$$S=\frac{\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{12}$$

Nota: Esta serie también puede tratarse como telescópica.

(*iii*) Esta serie es del tipo $\sum\dfrac{P(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente, y su suma está relacionada con el número e. Para sumarla transformamos el numerador con objeto de eliminar todas las n y dejar sólo constantes. Teniendo en cuenta que $(n+3)(n+2)=n^2+5n+6$ resulta.

$$\begin{aligned}\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!}&=\frac{n^2+5n+6-12n-9}{(n+3)!}=\frac{n^2+5n+6-12n-36+27}{(n+3)!}=\\&=\frac{(n+3)(n+2)-12(n+3)+27}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{12}{(n+2)!}+\frac{27}{(n+3)!}\end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{12}{(n+2)!}+\frac{27}{(n+3)!}\right)=\\&=[e-1]-12[e-2]+27[e-2-\frac{1}{2}]=e-1-12e+24+27e-54-\frac{27}{2}=\\&=-31-\frac{27}{2}+16e=\frac{-89+32e}{2}\end{aligned}$$

La descomposición también podía haberse hecho mediante la identificación de coeficientes. En efecto, haciendo:

$$\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!}=\frac{A(n+3)(n+2)+B(n+3)+C}{(n+3)!}$$

resulta:

$$\left.\begin{array}{l}n=-3\to 9+21-3=C\\ n=-2\to 4+14-3=B+C\\ n=0\to -3=6A+3B+C\end{array}\right\}\begin{array}{l}C=27\\ B=15-C=17-27=-12\\ A=\frac{1}{6}(-3-3B-C)=\frac{6}{6}=1\end{array}$$

7.8 (Convergencia y suma de series numéricas). *Determinar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular la suma de las que sean sumables:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+5}\right),\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{n},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{(n-1)!}$$

Solución. (*a*) Aplicando el criterio de la condición necesaria, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)=\frac{2}{3}\neq 0$$

con lo que la serie es divergente.

(b) Aplicamos infinitésimos: $1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ con lo cual,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{1}{2n^2}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \text{ Armónica divergente.}$$

(c) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos. Teniendo en cuenta que $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{n^2+n}{(n-1)!} &= \frac{n^2-3n+2+4n-4+2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{(n-1)!} = \\ &= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}\end{aligned}$$

y por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{(n-1)!} &= \frac{2}{0!} + \frac{6}{1!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{(n-1)!} = \\ &= 2 + 6 + e + 4(e-1) + 2(e-2) = 7e\end{aligned}$$

7.9 (Convergencia y suma de series numéricas). *Determinar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular la suma de las que sean sumables:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-7n)5^n}{(n^3-2)3^n} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{(n-2)!}$$

Solución.

(a) La serie dada es equivalente a la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente, y puede sumarse aplicando varios criterios, el más fácil es expresándola de manera telescópica. En efecto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$$

de donde,

$$S_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \to S = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

(b) Aplicando el criterio del cociente resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)^2 - 7(n+1)\right]5^{n+1}}{\left[(n+1)^3 - 2\right]3^{3+1}} : \frac{(n^2-7n)5^n}{(n^3-2)3^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1-7n-7)5^{n+1}(n^3-2)3^n}{(n^3+3n^2+3n+1-2)3^{n+1}(n^2-7n)5^n} = \frac{5}{3} > 1\end{aligned}$$

Luego la serie es divergente y no se puede sumar.

(c) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{n!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla la transformamos hasta conseguir que, en el numerador, sólo aparezcan términos numéricos. La manera más fácil de hacerlo es expresar el numerador en función de los primeros factores del denominador, con objeto de cancelarlos por simplificación. Elegimos tantos factores como indique el grado del numerador. Como el numerador es de segundo grado, nos fijamos en los dos primeros factores del denominador: $(n-2)(n-3)$. Teniendo en cuenta que $(n-2)(n-3) = n^2 - 5n + 6$, buscamos esa expresión en el numerador, con lo que resulta:

$$\frac{n^2 - n}{(n-2)!} = \frac{n^2 - 5n + 6 + 4n - 6}{(n-2)!} = \frac{(n-2)(n-3) + 4(n-2) + 2}{(n-2)!} =$$
$$= \frac{1}{(n-4)!} + \frac{4}{(n-3)!} + \frac{2}{(n-2)!}$$

y por tanto, sacando los dos primeros términos del desarrollo, para evitar encontrar el factorial de un número negativo, tenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{(n-2)!} = \frac{2}{0!} + \frac{6}{1!} + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-4)!} + \frac{4}{(n-3)!} + \frac{2}{(n-2)!} \right) =$$
$$= 2 + 6 + e + 4(e-1) + 2(e-2) = 7e$$

7.10 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot 5^n}{n!} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{8 - 5 \cdot 2^n + 3 \cdot 4^n}{13^n} \right)$$

Solución.

(a) Esta serie puede sumarse aplicando varios criterios, el más fácil es expresándola de manera telescópica, en efecto:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

De donde,

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} \to S = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

(b) Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n \cdot 5^n}{n!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 5^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n \cdot 5^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1) \cdot 5^n 5 \cdot n!}{(n+1)n! \cdot n^n \cdot 5^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot 5}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot 5 = 5e > 1$$

Luego la serie es divergente y no se puede sumar.

(c) Esta serie es convergente del tipo geométrico. En efecto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{8-5\cdot 2^n+3\cdot 4^n}{13^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cdot 3^n-5\cdot 6^n+3\cdot 12^n}{13^n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[8\left(\frac{3}{13}\right)^n - 5\left(\frac{6}{13}\right)^n + 3\left(\frac{12}{13}\right)^n\right] =$$
$$= 8\frac{3/13}{1-3/13} - 5\frac{6/13}{1-6/13} + 3\frac{12/13}{1-12/13} =$$
$$= 8\frac{3/13}{10/13} - 5\frac{6/13}{7/13} + 3\frac{12/13}{1/13} = \frac{24}{10} - \frac{30}{7} + 36 =$$
$$= \frac{168-300+2520}{70} = \frac{2388}{70}$$

7.11 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a)\quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \qquad (b)\quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)(3n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)} : \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} =$$
$$= \frac{3n+1}{2n+2} \to \frac{3}{2} > 1 \;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ es divergente}$$

(b) Aplicamos el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+2} \to 1$$
$$\Rightarrow \sum a_n \text{ es hipergeométrica con } r = \frac{1}{2} \text{ convergente}$$

Para sumarla podemos tratarla como telescópica, o bien, teniendo en cuenta que se trata de una serie hipergeométrica, para la suma desde $n=1$ se le puede aplicar la fórmula de la suma de la serie geométrica de razón $r=1/2$, con lo cual.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{-30-10-5-3}{60} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{-48}{60} + 1 = \frac{12}{60}$$

También podemos transformar el término general, para que la serie comience por $n=1$, y buscar la nueva razón.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

de donde,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+5)(n+6)} : \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{n+4}{n+6} \to 1$$
$$\Rightarrow \sum a_n \text{ es hipergeométrica con } r = \frac{5}{6}$$

con lo cual la suma es,

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{1/30}{1-5/6} = \frac{1/30}{1/6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Tratada como telescópica, resulta:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

de donde,

$$S_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{5}$$

7.12 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y sumar cuando sea posible:*

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n!}{n^n} \qquad (b)\quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \quad \text{con } p>0$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^{n+1}n!}{n^n} = \frac{3^{n+2}(n+1)!\, n^n}{3^{n+1}n!\,(n+1)^{n+1}} = \frac{3(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \frac{3\,n^n}{(n+1)^n} \to \frac{3}{e} > 1 \text{ divergente}$$

(b) Aplicamos el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)} : \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$
$$= \frac{(n+p)(n+p+1)}{(n+p+1)(n+p+2)} = \frac{n+p}{n+p+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

luego se trata de una serie hipergeométrica con $r = \dfrac{p+1}{p+2}$ convergente Para sumarla podemos tratarla como telescópica, o bien, teniendo en cuenta que se trata de una serie hipergeométrica, para la suma desde $n=1$ se le puede aplicar la fórmula de la suma de la serie geométrica de razón $r = \dfrac{p+1}{p+2}$, con lo cual.

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$
$$= \frac{-1}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{(p+2)(p+3)} - \frac{1}{(p+3)(p+4)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$
$$= \frac{-(p+3)(p+4) - (p+1)(p+4) - (p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} + \frac{1/(p+1)(p+2)}{1 - \dfrac{p+1}{p+2}} =$$
$$= \frac{-p^2 - 7p - 12 - p^2 - 5p - 4 - p^2 - 3p - 2}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} + \frac{1/(p+1)(p+2)}{(p+2-p-1)/(p+2)} =$$
$$= \frac{-3p^2 - 15p - 18}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} + \frac{1/(p+1)(p+2)}{1/(p+2)} =$$

$$= \frac{-3p^2-15p-18}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} + \frac{1}{p+1} =$$

$$= \frac{-3p^2-15p-18+(p+2)(p+3)(p+4)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} =$$

$$= \frac{-3p^2-15p-18+p^3+9p^2+26p+24}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} = \frac{p^3+6p^2+11p+6}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} =$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} = \frac{1}{p+4}$$

Los cálculos pueden simplificarse descomponiendo las fracciones en “fracciones simples”. Así,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{-1}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{(p+2)(p+3)} - \frac{1}{(p+3)(p+4)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \left[\frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p+4}\right] + \frac{1}{p+1} =$$

$$= \frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p+4} + \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+4}$$

También podemos transformar el término general, para que la serie comience por $n=1$, y buscar la nueva razón.

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p+3)(n+p+4)}$$

de donde,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+p+4)(n+p+5)} : \frac{1}{(n+p+3)(n+p+4)} = \frac{n+p+3}{n+p+5}$$

que es una serie hipergeométrica con $r = \dfrac{p+4}{p+5}$ con lo cual la suma resulta,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p+3)(n+p+4)} = \frac{\frac{1}{(p+4)(p+5)}}{1-\dfrac{p+4}{p+5}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(p+4)(p+5)}}{1/(p+5)} = \frac{1}{p+4}$$

Tratada como telescópica, resulta:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \sum_{n=4}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\Big)$$

de donde,

$$S_n = \frac{1}{p+4} - \frac{1}{p+5} + \frac{1}{p+5} - \frac{1}{p+6} + \frac{1}{p+6} - \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{p+4} - \frac{1}{n+p+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{p+4}$$

7.13 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 \cdot 37^n}{(3n)!} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^3 \cdot 37^{n+1}}{(3n+3)!} : \frac{(n!)^3 \cdot 37^n}{(3n)!} =$$
$$= \frac{(n+1)^3 (n!)^3 \cdot 37^n 37 \cdot (3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(n!)^3 \cdot 37^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{37}{27} > 1$$

luego la serie es divergente.
(b) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{n!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos. Teniendo en cuenta que $n(n-1) = n^2 - n$, resulta.

$$\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n^2-n+2n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} =$$
$$= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

y por tanto, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right)$$

Ahora bien, para evitar que aparezca el factorial de un número negativo, sacamos el primer término del sumatorio, con lo cual resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{3}{1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} =$$
$$= 3 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) = 3 + e + 2(e-1) + (e-2) = 4e - 1$$

7.14 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 - 3n}{5n^5 + 2n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$$

Solución. (a) Aplicando infinitésimos, resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 - 3n}{5n^5 + 2n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 - 3n}{5n^5 + 2n} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ armónica Divergente}$$

(b) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos. Teniendo en cuenta que $(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$, resulta.

$$\frac{n^2+5n+7}{(n+2)!} = \frac{n^2+3n+2+2n+5}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1)+2(n+2)+1}{(n+2)!} =$$
$$= \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}$$

y por tanto, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+5}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \right) =$$
$$= (e-1) + 2(e-2) + (e-2-\frac{1}{2}) = 4e - \frac{15}{2}$$

7.15 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a) \quad \sum_{n=7}^{\infty} \frac{3n^2-2}{\sqrt{5n^5+2n}} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{5^n}$$

Solución. (a) La serie es divergente. En efecto, aplicando el criterio de comparación de infinitésimos en el que se establece que *si los términos generales de dos series son infinitésimos del «mismo orden», entonces las dos series tienen el mismo carácter, es decir, las dos son convergentes o las dos son divergentes.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \left\{ \begin{array}{c} k \neq 0 \\ k \neq \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$$

Se trata, por tanto de encontrar una serie conocida cuyo término general sea del mismo orden que la dada. Tenemos,

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{3n^2-2}{\sqrt{5n^5+2n}} \sim \sum \frac{n^2}{n^{5/2}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}} \text{ armónica divergente}$$

Nos resta comprobar que ambas series son del mismo orden. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{\sqrt{5n^5+2n}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2-2)\sqrt{n}}{\sqrt{5n^5+2n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(3n^2-2)^2}}{\sqrt{5n^5+2n}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \left\{ \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right.$$

(b) Se trata de una serie aritmético-geométrica, ya que su término general se puede expresar de la forma $a_n = (a \cdot n + b)r^n$. Es decir, el producto de dos términos: uno va en progresión aritmética y el otro en progresión geométrica. En efecto,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{5^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (2n-3) \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

La convergencia la marca la parte geométrica y su suma se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots + (2n-3)\left(\frac{1}{5}\right)^n \\ \frac{-1}{5}S_n &=& -\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \cdots - (2n-3)\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{4}{5}S_n &=& \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n - (2n-3)\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{array}$$

de donde,

$$\frac{4}{5}S_n = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] - (2n-3)\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

y tomando límites,

$$\frac{4}{5}S = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{5}\right)}\right] - 0 = \frac{1}{25} + 2\frac{1/125}{4/5} = \frac{1}{25} + \frac{1}{50} = \frac{3}{50}$$

de donde resulta,

$$S = \frac{3}{40}$$

7.16 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a)\quad \sum_{n=7}^{\infty} \frac{(2n-1)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{4n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad\qquad (b)[3]\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del término general, y los infinitésimos $\operatorname{sen} z \sim z$, $1-\cos z \sim z^2/2$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{4n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2\left(\frac{1}{4n^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2/2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)^2 n^2}{(4n^2)^2} = \frac{8}{16} \neq 0$$

Luego la serie es divergente.

(b) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos.

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+2-1}{(n+2)!} = \frac{n+2}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \tag{7.1}$$

[3] Ver Ejer. 7.26 (b) en la Pág. 76

y por tanto, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots]-[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots]=$$
$$=[e-2]-[e-2-\frac{1}{2}]=e-2+e+2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Nota: La expresión resultante (7.1) también permite tratar la serie como telescópica. En efecto, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=$$

de donde,

$$S_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

con lo que resulta que,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-0=\frac{1}{2}$$

que coincide con lo obtenido por el otro procedimiento.

7.17 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar la convergencia y sumar cuando sea posible las siguientes series:*

$$(a)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right) \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=5}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

Solución. (a) La serie puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}=\sum_{n=3}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

que es una serie aritmético-geométrica, de *razón* $1/2$ y por tanto convergente. Para sumarla podemos aplicar la fórmula, o bien repetir el proceso completo:

$$\begin{aligned} S_n &= 7\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1}{2}\right)^4+11\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{-1}{2}S_n &= -7\left(\frac{1}{2}\right)^4-9\left(\frac{1}{2}\right)^5-11\left(\frac{1}{2}\right)^6-\cdots-(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{1}{2}S_n &= 7\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{7}{8}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

y tomando límites:

$$\frac{1}{2}S=\frac{7}{8}+\frac{1/8}{1-1/2}-0=\frac{7}{8}+\frac{1/8}{1/2}=\frac{7}{8}+\frac{2}{8}=\frac{9}{8}$$

de donde, despejando S, se tiene $S=2\,\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$

Nota: También podemos aplicar la fórmula para sumar las series aritmético geométricas, una vez que la serie está expresada en forma canónica.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(an+b)r^n = \frac{(a+b)r - br^2}{(1-r)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2+1)\cdot\frac{1}{2} - 1\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

con lo que

$$\sum_{n=3}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{20-6-5}{4} = \frac{9}{4}$$

(b) Si aplicamos infinitésimos, tenemos que:

$$\sum \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \sim \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Además, como $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ es una p-serie, con $p = \dfrac{2}{3} < 1$, entonces es divergente, y por tanto, la serie original $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ es divergente.

7.18 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y sumar las que sea posible:*

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

Solución.

(a) Aplicando el criterio del cociente podemos ver que la serie no es sumable. En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+3)!} : \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} = \frac{(3n+3)!n!(2n+1)!}{(n+1)!(2n+3)!(3n)!} =$$
$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{27}{4} > 1$$

(b) Se trata de una serie del tipo $p(n)/n!$ que siempre es sumable, como fácilmente puede comprobarse por el criterio del cociente,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} : \frac{n^2}{n!} = \frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)!\, n^2} = \frac{n+1}{n^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0 < 1$$

y su suma está relacionada con el número e. En efecto, teniendo en cuenta que el número e viene definido por la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Se trata de relacionar la serie dada con esta serie. Para ello, transformamos su término general en suma de fracciones, de manera que en los numeradores sólo aparezcan constantes. Así, teniendo en cuenta que $n(n-1) = n^2 - n$, resulta:

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n^2-n+n}{n!} = \frac{n^2-n}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

Para evitar que aparezca el factorial de un número negativa, sacamos fuera de la serie dada los dos primeros términos, con lo cual resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=0+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=1+(e)+(e-1)=2e$$

7.19 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular, si es posible, su suma:*

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$$

$$(c)\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots$$

Solución.

(a) $$\sum\ln\frac{n^2+n+1}{n^2+2}=\sum\ln\Big(1+\frac{n-1}{n^2+2}\Big)\sim\sum\frac{n-1}{n^2+2}\sim\sum\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ La serie es divergente.

Hemos aplicado infinitésimos equivalentes $\ln(1+z)\sim z$ cuando $z\to 0$, e infinitésimos del mismo grado $\lim\frac{a_n}{b_n}=k$ $(k\neq 0, k\neq\infty)$.

(b) La serie se puede descomponer en la suma de dos series convergentes. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n(n+1)}{3^{n+1}n(n+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}n(n+1)}+\frac{n(n+1)}{3^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$$

Donde, el primer sumando se puede transformar en una serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

que podemos sumar aplicando la definición

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\to 1$$

y por otro lado, el segundo sumando es una serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n=\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Con lo cual, la suma pedida es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

(c) La suma pedida puede descomponerse en dos series geométricas

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\cdots=$$

$$=\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\Big)=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

7.20 (Convergencia y suma de series numéricas). *Determinar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular la suma de las que sean sumables:*

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

Solución. (a) Aplicamos infinitésimos:

$$1-\cos z \sim \frac{z^2}{2}, \quad \text{de donde} \quad 1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$$

con lo cual,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ Armónica divergente.}$$

(b) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n-n}{(n+1)!} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n-[n+1-1]}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n-(n+1)+1}{(n+1)!} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = e-(e-1)+(e-2) = e-1
\end{aligned}$$

7.21 (Convergencia y suma de series numéricas). *Determinar el carácter de las siguientes series numéricas y sumar las que sean sumables:*

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, podemos asegurar que esta serie no es convergente, puesto que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!n!(2n+1)!}{(n+1)!(2n+3)!(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{27}{4} > 1$$

(b) Esta serie es del tipo $\sum p(n)/n!$ que siempre es convergente, y su suma es del tipo del número e. Para sumarla transformamos el numerador con objeto de eliminar todas las n y que sólo aparezcan constantes. Teniendo en cuenta que $n(n-1) = n^2 - n$, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n^2-n+2n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} = \\
= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Con lo cual la serie dada se puede expresar de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right)$$

Cuyos sumandos se pueden calcular teniendo en cuenta que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Ahora bien, para evitar que aparezca el factorial de un número negativo, sacamos el primer término del sumatorio, con lo cual resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{3}{1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} =$$

$$= 3 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) = 3 + e + 2(e-1) + (e-2) = 4e - 1$$

Nota: La descomposición también podía haberse hecho mediante la identificación de coeficientes. En efecto, haciendo:

$$\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{An(n-1) + Bn + C}{n!}$$

resulta:

$$\left.\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow 1 = C \\ n = 1 \Rightarrow 3 = B + C \\ n = 2 \Rightarrow 7 = 2A + 2B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 1 \\ B = 3 - C = 3 - 1 = 2 \\ A = \dfrac{7 - 2B - C}{2} = \frac{1}{2}(7 - 4 - 1) = 1 \end{array}$$

7.22 (Convergencia y suma de series numéricas). *Determina el carácter de las siguientes series numéricas y calcula la suma cuando sea posible*

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} : \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 4 > 1$$

Luego la serie es divergente.

(b) Aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} : \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{2n-1}{2n+5} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

cuyo límite es 1, y nos indica que se trata de una serie hipergeométrica. Para determinar la convergencia podemos acudir el criterio de Raabe.

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = n(1 - \frac{2n-1}{2n+5}) = n\frac{2n+5-2n+1}{2n+5} = \frac{6n}{2n+5} \to 3 > 1 \text{ Conv.}$$

Para sumarla podemos tratarla como telescópica, o bien, tenemos en cuenta que se trata de una serie hipergeométrica, y para la suma desde $n = 1$ se le puede aplicar la fórmula de la serie geométrica de razón $r = 1/5$, con lo cual,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{-1}{1\cdot 3\cdot 5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{-1}{15} + \frac{1/15}{1-1/5} = \frac{-1}{15} + \frac{1/15}{4/5} = \frac{-1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{-12+15}{12\cdot 15} = \frac{1}{60}$$

7.23 (Convergencia y suma de series numéricas).

(a) *Siendo a una constante positiva, determina el carácter de la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

según los valores de a y calcula la suma cuando sea posible.

(b) *Determina el carácter de la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$, *y sumar si es posible.*

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a(a+1)\cdots(a+n)} : \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} =$$
$$= \frac{(n+1)!a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)} = \frac{n+1}{a+n} \to 1,$$

cuyo límite es 1, y nos indica que se trata de una serie hipergeométrica. Para determinar la convergencia podemos acudir el criterio de Raabe.

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{n+1}{a+n}\right) = n\frac{a+n-n-1}{a+n} = \frac{(a-1)n}{n+a} \to a-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-1>1 \to a>2 \text{ Conv.} \\ a-1<1 \to a<2 \text{ Div.} \\ a-1=1 \to a=2 \text{ Duda} \end{cases}$$

La duda se resuelve mediante la comprobación directa para $a = 2$

$$a=2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{armónica divergente}$$

Para sumarla en el caso $a > 2$ tenemos en cuenta que se trata de una serie hipergeométrica, y para la suma desde $n = 1$ se le puede aplicar la fórmula de la serie geométrica de razón $r = 2/a$, con lo cual.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \frac{-1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} =$$
$$= \frac{-1}{a} + \frac{1/a}{1-2/a} = \frac{-1}{a} + \frac{1}{a-2} = \frac{-a+2+a}{a(a-2)} = \frac{2}{a(a-2)}$$

(b) Aplicamos el criterio del cociente resulta,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}:\frac{(3n)!}{(n!)^3}=\frac{(3n+3)!(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3(3n)!}=$$
$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)(n+1)}\to 27>1 \text{ Div.}$$

7.24 (Convergencia y suma de series numéricas). (a)[4] *¿La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}\right)$ *es convergente? En caso afirmativo, calcular su suma.*
(b) *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas*

$$(i)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n} \qquad\qquad (ii)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2e-6)^n}{\sqrt{n+3}}$$

Solución. (a) La serie dada es una serie aritmético geométrica. En efecto, operando en el término general se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2^n}+\frac{3}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La convergencia viene determinada por la razón $r=1/2$. O bien, aplicando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+5}{2^{n+1}}:\frac{2n+3}{2^n}=\frac{2n+5}{2n+3}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{2n+5}{2n+3}\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}<1$$
$$\Rightarrow \text{ convergente}$$

Para sumarla seguimos el siguiente proceso:

$$\begin{aligned}
S_n &= 5\frac{1}{2}+7\left(\frac{1}{2}\right)^2+9\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
\frac{-1}{2}S_n &= -5\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)^3-9\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\
\hline
\frac{1}{2}S_n &= \frac{5}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{5}{2}+2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

y tomando límites, resulta:

$$\frac{1}{2}S=\frac{5}{2}+2\frac{(1/2)^2}{1-1/2}-0 \quad\Rightarrow\quad S=5+4\frac{1/4}{1/2}=5+2=7$$

(b) Las dos series son convergentes. En efecto:
(i) Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}:\frac{n^2}{3^n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}<1$$
$$\Rightarrow \text{ convergente}$$

[4] Ver Ejerc. **??** (a) (i), en la Pág. **??**

(ii) La serie es alternada. En efecto, dado que el valor de $e = 2{,}718$ se tiene que $e = 2{,}718 \Rightarrow 2e = 5{,}436 \Rightarrow 2e - 6 = -0{,}56$. Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2e-6)^n}{\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2e-6}{\sqrt{4}} + \frac{(2e-6)^2}{\sqrt{5}} + \frac{(2e-6)^3}{\sqrt{6}} + \cdots$$

y al ser $2e - 6$ negativo resulta una serie alternada. En consecuencia, al tener términos negativos no son de aplicación los criterios de las series de términos positivos. Luego, para estudiar su convergencia tenemos que elegir entre aplicar la convergencia absoluta, o bien, aplicar el criterio de Leibnitz para las series alternadas.
Estudiamos la convergencia absoluta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|2e-6|^n}{\sqrt{n+3}}$$

aplicando el criterio del cociente, resulta

$$\left|\frac{a_{n+1}}{an}\right| = \frac{|2e-6|^{n+1}}{\sqrt{n+4}} : \frac{|2e-6|^n}{\sqrt{n+3}} = \frac{|2e-6|^{n+1}\sqrt{n+3}}{|2e-6|^n\sqrt{n+4}} =$$
$$= |2e-6|\sqrt{\frac{n+3}{n+4}} \xrightarrow{n\to\infty} |2e-6| < 1 \Rightarrow \text{conv.}$$

El criterio de Leibnitz resulta mucho más complicado. En efecto, tenemos que probar que $a_n \to 0$ y que $|a_n| \downarrow$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2e-6)^n}{\sqrt{n+3}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Para determinar que $|a_n|$ es decreciente, hallamos su derivada, suponiendo que n es una variable continua.

$$f(n) = \frac{(|2e-6|)^n}{\sqrt{n+3}} = \frac{(6-2e)^n}{\sqrt{n+3}}$$

luego,

$$f'(n) = \frac{(6-2e)^n \ln(6-2e)\sqrt{n+3} - (6-2e)^n \dfrac{1}{2\sqrt{n+3}}}{n+3} =$$
$$= \frac{2(n+3)(6-2e)^n \ln(6-2e) - (6-2e)^n}{2(n+3)\sqrt{n+3}}$$

para que $f'(n) < 0$ ha de ser, $2(n+3)(6-2e)^n \ln(6-2e) - (6-2e)^n < 0$, de donde,

$$\Big(2(n+3)\ln(6-2e) - 1\Big)(6-2e)^n < 0 \to 2(n+3)\ln(6-2e) - 1 < 0$$

y dado que $\ln(6-2e) < 0$ resulta, $n > \dfrac{1}{2\ln(6-2e)} - 3$, luego $|a_n|$ es decreciente.

7.25 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y sumar las que sean posibles:*

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}\right)}{(\ln(n+2)^{n+2})(\ln(n+1)^{n+1})} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

Solución. (a) Aplicando las propiedades de los logaritmos y operando en el término general se obtiene una serie telescópica convergente. En efecto:

$$\frac{\ln\left(\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}\right)}{(\ln(n+2)^{n+2})(\ln(n+1)^{n+1})} = \frac{\ln(n+2)^{n+2} - \ln(n+1)^{n+1}}{(\ln(n+2)^{n+2})(\ln(n+1)^{n+1})} =$$
$$= \frac{1}{\ln(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{\ln(n+2)^{n+2}}$$

de donde,

$$S_n = \frac{1}{\ln 2^2} - \frac{1}{\ln 3^3} + \frac{1}{\ln 3^3} - \frac{1}{\ln 4^4} + \frac{1}{\ln 4^4} - \cdots + \frac{1}{\ln(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{\ln(n+2)^{n+2}}$$

y simplificando y tomando límite, resulta,

$$S_n = \frac{1}{\ln 2^2} - \frac{1}{\ln(n+2)^{n+2}} \xrightarrow{n\to\infty} S = \frac{1}{\ln 2^2} - 0 = \frac{1}{\ln 2^2}$$

luego se trata de una serie convergente, cuya suma es $S = \dfrac{1}{\ln 4}$

(b) Esta serie es del tipo $\sum \dfrac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos. Teniendo en cuenta que $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$, resulta.

$$\frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2 - 3n + 2 + 3n - 2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1}{(n-1)!} =$$
$$= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

Sin embargo, al sustituir en el sumatorio resultarían factoriales negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

para evitar esta contingencia, sacamos del sumatorio los dos primeros términos que son los causantes del problema. En consecuencia, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 1 + 4 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} =$$
$$= 5 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) = 5 + e + 3(e-1) + (e-2) = 5e$$

7.26 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudiar el carácter de las siguiente series numéricas y suma las que sean posible:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(1+2n)} \qquad (b)^{5}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$$

Solución. (a) Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(1+2n)(3+2n)} : \frac{n!2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(1+2n)} =$$
$$= \frac{(n+1)n!\,2^n 2\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(1+2n)}{n!2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(1+2n)(3+2n)} = \frac{2(n+1)}{3+2n} = \frac{2n+2}{2n+3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

y aplicando el criterio de Raabe, resulta:

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right) = n\,\frac{2n+3-2n-2}{2n+3} = \frac{n}{2n+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

luego la serie es divergente.

(b) Esta serie es del tipo $\sum \frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente y su suma está relacionada con el desarrollo del número e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots = e$$

Para sumarla transformamos el numerador hasta conseguir que sólo aparezcan términos numéricos.

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+2-1}{(n+2)!} = \frac{n+2}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \tag{7.2}$$

y por tanto, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = [\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots] - [\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots] =$$
$$= [e-2] - [e-2-\frac{1}{2}] = e-2+e+2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nota: La expresión resultante (7.2) también permite tratar la serie como telescópica. En efecto, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) =$$

de donde,

$$S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

con lo que resulta que,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{2!} - 0 = \frac{1}{2}$$

que coincide con lo obtenido por el otro procedimiento.

7.27 (Convergencia y suma de series numéricas).

(a) *Estudiar el carácter de* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(1-n)}$

(b) *Estudiar el carácter de* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{7\cdot 10\cdot 13\cdots(3n+4)}$, *y si es posible, calcular la suma.*

[5] Ver Ejer. 7.16 (b) en la Pág. 67

Solución. (a) Aplicando el criterio de la raíz, resulta:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(1-n)}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n(1-n)}{n}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{1-n} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1-n}{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} = \frac{1}{2{,}718} < 1$$

luego la serie es convergente.

(b) Aplicando el criterio del cociente, resulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3n+2)}{7\cdot 10\cdots(3n+4)(3n+7)} : \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{7\cdot 10\cdots(3n+4)} = \frac{3n+2}{3n+7} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

y, al ser el cociente de dos polinomios de primer grado, se trata de una serie hipergeométrica de razón

$$r = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7} < 1$$

luego es convergente, y su suma, cuando el sumatorio comienza en 1, se obtiene con la misma regla que la suma de las series geométricas. En consecuencia,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{7\cdot 10\cdots(3n+4)} = -\frac{2}{7} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{7\cdot 10\cdots(3n+4)} = \frac{-2}{7} + \frac{2/7}{1-5/7} = \frac{-2}{7} + 1 = \frac{5}{7}$$

7.28 (Convergencia y suma de series numéricas).

a) *Suma la siguiente serie, justificando su convergencia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$$

b) *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

Solución. a) La serie es convergente por ser la diferencia de dos series convergentes. En efecto, la serie $\sum 1/2^n$ es una seria geométrica de razón $1/2$, y por tanto convergente. Del mismo modo, la serie $\sum 1/3^n$ es una seria geométrica de razón $1/3$, y por tanto convergente. En consecuencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{1/2} - \frac{1}{2/3} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

b) La serie es de términos positivos ya que $\operatorname{sen}(1/n) > 0$. En consecuencia, aplicando infinitésimos, resulta que la serie tiene el mismo carácter que la seria de término general $1/n^2$ que es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

7.29 (Convergencia y suma de series numéricas). *a) Determinar el carácter de la siguiente serie numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+n^2+1}$$

b) Suma, si es posible, la siguiente serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n + 5^{2n}}{6^{3n}}$$

Solución. *a)* Por el criterio de comparación de infinitésimos, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+n^2+1} : \frac{1}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n}+n^2+1} = 1$$

Luego la serie dada es convergente, por tener el mismo carácter que una p-serie, con $p = 3/2 > 1$.

b) La serie se puede descomponer en la suma de dos series geométricas. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n + 5^{2n}}{6^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{6^3}\right)^n + \left(\frac{5^2}{6^3}\right)^n = \frac{-3/6^3}{1+3/6^3} + \frac{5^2/6^3}{1-5^2/6^3} =$$

$$= \frac{-3}{6^3+3} + \frac{5^2}{6^3-5^2} = \frac{-3}{219} + \frac{25}{191} = \frac{-1}{73} + \frac{25}{191} = \frac{-191+1825}{13943} = \frac{1634}{13943}$$

7.30. *Sumar la serie:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

(a) Como telescópica,
(b) Como hipergeométrica (restando a_1),
(c) Como hipergeométrica transformando a_n para que comience en $n = 1$,
(d) Comprobar que la fórmula $S = \dfrac{a_2}{1-r}$ conduce a un resultado erróneo.

Solución. *(a)* Se trata de una serie telescópica, en efecto, tenemos:

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4} = \frac{A(n+4)+B(n+3)}{(n+3)(n+4)}$$

de donde,

$$\left.\begin{array}{l} n=-3 \Rightarrow 1 = A \\ n=-4 \Rightarrow 1 = -B \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}$$

Con lo cual, la serie se puede expresar de la forma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = 5\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = 5\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

resultando:

$$S_n = 5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = 5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+4}\right)$$

Cuyo límite es la suma de la serie propuesta

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+4}\right) = 5\left(\frac{1}{5} - 0\right) = 1$$

(b) Para sumarla como hipergeométrica tiene que comenzar en $n = 1$. Para ello sumamos y restamos a_1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = -\frac{5}{4\cdot 5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

Veamos que se trata de una serie hipergeométrica:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{(n+4)(n+5)} : \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \frac{n+3}{n+5} \to 1 \Rightarrow r = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

luego, la suma de la serie es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{4} + \frac{\frac{5}{4\cdot 5}}{1 - \frac{4}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{1/4}{1/5} = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

(c) El mismo efecto puede conseguirse transformando el término general para que la serie comience en $n = 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \frac{5}{5\cdot 6} + \frac{5}{6\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+4)(n+5)}$$

que se trata de una serie hipergeométrica de razón diferente, en efecto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{(n+5)(n+6)} : \frac{5}{(n+4)(n+5)} = \frac{n+4}{n+6} \to 1 \Rightarrow r = \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$$

y la suma de la serie es

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+4)(n+5)} = \frac{\frac{5}{5\cdot 6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1/6}{1/6} = 1$$

(d) Es evidente que la fórmula $S = \dfrac{a_2}{1-r}$, aplicada a la serie inicial, conduce a un resultado erróneo. En efecto,

$$S = \frac{a_2}{1-r} = \frac{\frac{5}{5\cdot 6}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1/6}{1/5} = \frac{5}{6} \neq 1$$

7.31. *Estudiar el carácter y sumar, en su caso, las siguientes series numéricas:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^n}\right)$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 7n - 3}{(n+3)!}$

Solución. (i) La serie puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

que es una serie aritmético-geométrica de *razón* $1/2$, y por tanto convergente. Para sumarla podemos aplicar la fórmula, o bien repetir el proceso completo,

$$\begin{array}{rl} S_n = & 5\frac{1}{2} + 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{-1}{2}S_n = & -5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \cdots - (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{1}{2}S_n = & \frac{5}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{array}$$

de donde,

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{5}{2} + 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

y tomando límites,

$$\frac{1}{2}S = \frac{5}{2} + 2\frac{1/4}{1-1/2} - 0 = \frac{5}{2} + 2\frac{1/4}{1/2} = \frac{5}{2} + 1$$

de donde, despejando S, resulta

$$S = 5 + 2 = 7$$

Nota: También podemos aplicar la fórmula para sumar las series aritmético geométricas, una vez que la serie está expresada en forma canónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a\cdot n+b)r^n = \frac{(a+b)r-br^2}{(1-r)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2+3)\frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 7$$

(ii) Para estudiar la convergencia de la segunda serie aplicamos el criterio del cociente,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{2n-1}{2n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

luego se trata de una serie hipergeométrica de *razón* $r = \dfrac{2-1}{5} = \dfrac{1}{5}$, luego es convergente, y su suma es:

$$S = \frac{\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{12}$$

Esta serie también puede tratarse como telescópica.

(iii) Esta serie es del tipo $\sum \dfrac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente, y su suma se obtiene a partir del número e. Para sumarla transformamos el numerador con objeto de eliminar todas las n, de manera que sólo queden constantes. Teniendo en cuenta que $(n+3)(n+2) = n^2+5n+6$, resulta,

$$\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!} = \frac{n^2+5n+6-12n-9}{(n+3)!} = \frac{n^2+5n+6-12n-36+27}{(n+3)!} =$$
$$= \frac{(n+3)(n+2)-12(n+3)+27}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{12}{(n+2)!} + \frac{27}{(n+3)!}$$

Y teniendo en cuenta que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

resulta,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-7n-3}{(n+3)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{12}{(n+2)!} + \frac{27}{(n+3)!}\right) =$$

$$= (e-1) - 12(e-2) + 27(e-2-\frac{1}{2}) = e - 1 - 12e + 24 + 27e - 54 - \frac{27}{2} =$$

$$= -31 - \frac{27}{2} + 16e = \frac{-89+32e}{2}$$

Nota: La descomposición también podía haberse hecho mediante la identificación de coeficientes. En efecto, haciendo:

$$\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!} = \frac{A(n+3)(n+2)+B(n+3)+C}{(n+3)!}$$

resulta,

$$\left.\begin{array}{l} n=-3 \Rightarrow 9+21-1=C \\ n=-2 \Rightarrow 4+14-3=B+C \\ n=0 \Rightarrow -3=6A+3B+C \end{array}\right\} \begin{array}{l} C=27 \\ B=15-C=17-27=-12 \\ A=\frac{1}{6}(-3-3B-C)=\frac{1}{6}(-3+36-27)=1 \end{array}$$

7.32. *Estudiar el carácter y sumar, en su caso, las siguientes series numéricas*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^{n+1}}{n^2+5n-3} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7n-3}{(n+1)!}$$

Solución. (i) La primera serie diverge, ya que no cumple la condición necesaria de convergencia a cero del término general. En efecto,

$$a_n = \frac{n\cdot 2^{n+1}}{n^2+5n-3} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \neq 0$$

(ii) Aplicando el infinitésimo $1-\cos z \sim z^2/2$, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergente (armónica)}$$

luego la serie dada es divergente. (iii) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n-3}{(n+1)!}$ es del tipo $\displaystyle\sum\frac{p(n)}{(n+k)!}$ que siempre es convergente, pude comprobarse por el criterio del cociente. Para hallar su suma la descomponemos en suma de fracciones elementales relacionadas con el número e, eliminando la parte literal del numerador y dejando sólo constante, para ello lo transformamos teniendo en cuenta que $(n+1)n = n^2+n$, resulta:

$$\frac{n^2+7n-3}{(n+1)!} = \frac{n^2+n+6n+6-9}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n}{(n+1)!} + \frac{6(n+1)}{(n+1)!} - \frac{9}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} + \frac{6}{n!} - \frac{9}{(n+1)!}$$

de donde, la suma de la serie es,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n-3}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{6}{n!} - \frac{9}{(n+1)!}\right) =$$

$$= e + 6(e-1) - 9(e-2) = 12 - 2e$$

7.33. *Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular, si es posible, su suma:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right) \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$$

$$(c)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots$$

Solución. (a) Aplicando infinitésimos equivalentes $\ln(1+z) \sim z$, cuando $z \to 0$, e infinitésimos del mismo orden $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$ $(k \neq 0,\ h \neq \infty)$, resulta,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{n-1}{n^2+2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

luego la serie es divergente.
(b) La serie se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n(n+1)}{3^n n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n(n+1)} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n n(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Ahora bien, la primera serie es una serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

que podemos sumar aplicando la definición,

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

y por otro lado, la segunda serie es una serie geométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$$

Con lo cual la suma pedida es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

(c) La suma pedida puede descomponerse en dos series geométricas, en efecto,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots =$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-1/3} - \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Ejercicios propuestos del Capítulo 7

Soluciones en la página 161

A. Relación de ejercicios mínimos

7.1. Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas:

$$
\begin{array}{llllll}
a) & \sum \frac{n!}{2n!+1} & b) & \sum \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right) & c) & \sum \frac{1}{n \ln n} \\
d) & \sum \frac{1}{2+\sqrt{n}} & e) & \sum \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n^2+1} & f) & \sum \frac{e^{2n}}{n^n} \\
g) & \sum \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} & h) & \sum \frac{(4n^3+5)\cdot \operatorname{sen}(1/n)}{n^2\,3^n} & i) & \sum \frac{2^n}{n!} \\
j) & \sum \frac{n^n}{n!} & k) & \sum (-1)^n \frac{n}{\ln 2n} & l) & \sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}
\end{array}
$$

7.2. Sumar, si es posible, las siguientes series numéricas:

$$
\begin{array}{llllll}
a) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} & b) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} & c) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \\
d) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)} & e) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} & f) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+5n-4}{(n+1)!}
\end{array}
$$

B. Relación de ejercicios adicionales

Problemas resueltos del Capítulo 7

7.34. *Si unimos los puntos medios de un triángulo equilátero obtenemos otro triángulo equilátero. Si volvemos a unir los puntos medios de este nuevo triángulo obtenemos otro triángulo equilátero y así sucesivamente. Si partimos de un triángulo equilátero de lado 1. Calcular la suma de las áreas de los infinitos triángulos equiláteros sucesivamente inscritos.*

Solución. De la figura se desprende que al unir los puntos medios de un triángulo equilátero se obtiene otro triángulo equilátero cuya área es la cuarta parte del área del triángulo anterior. En consecuencia, el área total vendrá definida por la suma de los infinitos términos de una serie geométrica de razón $r = 1/4$:

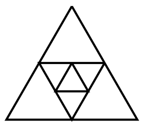


Figura 7.3: $S = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots$, con $T_{n+1} = \dfrac{T_n}{4}$

$$S = T_1 + \frac{T_1}{4} + \frac{T_1}{16} + \frac{T_1}{64} + \cdots = T_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = T_1 \frac{1}{1-1/4} = T_1 \frac{1}{3/4} = \frac{4T_1}{3}$$

El área del triángulo inicial puede calcularse: o bien, trazando la altura y aplicando el teorema de Pitágoras; o bien, aplicando la fórmula de Heron que, en este caso, resulta más fácil. En efecto:

$$T_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Nota: (Fórmula de Heron). Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y s el semiperímetro: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, entonces, el área del triángulo viene definida por:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

En consecuencia el área total será:

$$S = \frac{4T_1}{3} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problemas propuestos del Capítulo 7

Soluciones en la página 161

7.1. Hallar, si existen, los siguientes límites de sucesiones

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3n+2}{3n-5}}\right)^{(n^2+3)}$$

7.2. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado se obtiene otro cuadrado; si unimos los puntos medios del cuadrado obtenido, obtenemos un tercer cuadrado, y así sucesivamente. Si partimos de un cuadrado de lado 1. Hallar la suma de las áreas de los infinitos cuadrados sucesivamente inscritos.

Capítulo 8

Series funcionales. Series de Fourier

8.1. Series de funciones

8.1.1. Series de funciones

Una serie se llama numérica cuando todos sus sumandos son números.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Una serie se llama de funciones cuando todos sus sumandos son funciones.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

8.1.2. Convergencia puntual

Dada una serie de funciones, para cada valor de la variable x se tiene una serie numérica que puede ser convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \cdots = S(x_0)$$

Si consideramos todos los puntos en los que la serie es convergente, obtenemos una función, llamada función suma de la serie. Para calcular la expresión de dicha función bastará con calcular la suma de la serie para un valor genérico de x. Es decir, consideramos que x es un número y hallamos la suma de la serie como si se tratara de una serie numérica.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots = S(x); \quad \text{para } x \in \mathcal{D}$$

La función suma solamente estará definida para aquellos valores para los que la serie es convergente.

Definición 8.1 (Campo de convergencia). *Se llama Campo de Convergencia de una serie al conjunto de puntos donde es convergente*

Como los términos de las series de funciones, en general, pueden tomar valores positivos y negativos, normalmente estudiaremos la convergencia absoluta de la serie.

Ejemplo 8.1. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$

Solución. Para x fijo, se tiene,

$$p = \ln x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Serie} \\ \text{armónica} \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Conv. para } p > 1 \\ \text{Div. para } p \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Conv. para } \ln x > 1 \Rightarrow x > e \\ \text{Div. para } \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq e \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Camp. Conv. } = (e, +\infty)$$

Ejemplo 8.2. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n\, e^{nx}$

Solución. Estudiando la convergencia absoluta, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} n\, e^{nx} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{nx}$$

Aplicando el criterio de DÁlembert, resulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)e^{(n+1)x}}{n\, e^{nx}} = \frac{n+1}{n}\, e^x \xrightarrow{n\to\infty} e^x$$

De donde:
– Para $e^x < 1 \Rightarrow x < 0$ la serie es absolutamente convergente y, en consecuencia, es convergente.
– Para $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$, sustituyendo en la serie resulta:

$$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n\, e^0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \text{ divergente}$$

– Para $e^x > 1 \Rightarrow x > 0$, aplicando la condición necesaria, resulta

$$a_n = (-1)^{n-1} n\, e^{nx} \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty \text{ luego la serie es divergente.}$$

En consecuencia, el campo de convergencia es el intervalo $(-\infty, 0)$.

Ejemplo 8.3. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$

Solución. Para cualquier valor de x, se trata de una serie de términos positivos. En consecuencia podemos aplicar el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+x^2} = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

luego la serie es divergente para $\forall x \in \mathbb{R}$, y, en consecuencia, su campo de convergencia es el conjunto vacío.

8.1.3. Convergencia uniforme

Idea intuitiva. Supongamos una serie de funciones que converge en un conjunto de puntos $\mathcal{D}$. En cada punto la serie numérica correspondiente se aproximará a su suma con un *ritmo* diferente. Es decir, si en todos los puntos sumamos los 10 primeros términos para aproximar la suma de la serie en dicho punto, en cada punto habremos cometido un error de aproximación diferente. Si me dan el error, entonces en cada punto tendremos que sumar un número de términos diferentes para ajustarnos a ese error.

Una serie se dice que converge de manera uniforme en un conjunto $\mathcal{D}$, cuando, dado el error, podemos sumar el mismo número de términos en todos los puntos sin salirnos del error. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathcal{D},\ \forall n > N,\ |R_n(x)| < \varepsilon$$

En la práctica la convergencia uniforme se determina de la siguiente forma: Dado $\varepsilon > 0$, la inecuación $|R_n(x)| < \varepsilon$ se puede resolver en $n > f(\varepsilon)$, independientemente del valor de x. Para ello, se ha de cumplir que

$$|R_n(x)| \to 0, \text{ independientemente del valor de } x$$

8.1.4. Propiedades de las series uniformemente convergentes

Teorema 8.1 (Criterio de Weierstrass). *Si una serie de funciones está mayorada, en valor absoluto, por una serie numérica convergente, entonces la serie de funciones es absolutamente convergente de manera uniforme.*

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in \Omega,\ |f_n(x)| \le a_n \\ \sum a_n \text{ convergente} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum f_n(x) \begin{array}{l} \text{absolutamente convergente} \\ \text{de manera uniforme en } \Omega \end{array}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| &= |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots| \le \\ &\le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = R_n, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, como $\sum a_n$ es convergente, se tiene que $R_n < \varepsilon$, y, en consecuencia, $|R_n(x)| < \varepsilon$. □

Ejemplo 8.4. *Estudiar la convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Solución.

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ Conv. } \Rightarrow \text{ Abs. Conv. (unif.) } \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

Ejemplo 8.5. *Estudiar la convergencia uniforme de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2 + \sqrt{(4-x^2)^n}}$$

en el intervalo $D = [-2, 2]$.

Solución.

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2 + \sqrt{(4-x^2)^n}}\right| \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{(4-x^2)^n}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ con. (unif.) en } [-2, 2]$$

Propiedades de las series uniformemente convergentes

1°) Si todos los términos de una serie de funciones uniformemente convergente son funciones continuas, entonces la función suma también es continua.

2°) Las series uniformemente convergentes se pueden integrar y derivar término a término.

Ejercicios propuestos de la sección 8.1. Definiciones

Soluciones en la página 161

8.1.1.

8.2. Series de potencias

Definición 8.2 (Serie de potencia). *Se llama serie de potencia a la serie de funciones del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

o del tipo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ *son constantes*

Teorema 8.2. *Si la serie de potencias* $\sum a_n x^n$ *es convergente para algún valor particular de* $x = x_0 \neq 0$, *entonces es absolutamente convergente para todo valor* x *tal que* $|x| < |x_0|$.

Si la serie de potencias $\sum a_n x^n$ *es divergente para algún valor particular de* $x = x_0 \neq 0$, *entonces es divergente para todo valor de* x *tal que* $|x| > |x_0|$.

Demostración.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ Conv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow |a_n x_0^n| \leq 1$$

$$|a_n x^n| = \left| a_n \frac{x^n}{x_0^n} x_0^n \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq 1 \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| = r^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ Con.} \Rightarrow \text{ Abs. conv}$$

$$r < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < |x_0|$$

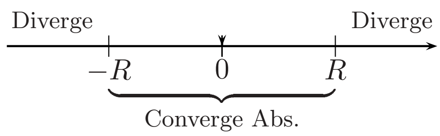
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ Div. $\Rightarrow$ para $|x_1| > |x_0|$ no puede ser $\sum a_n x_1^n$ convergente, ya que sería absolutamente convergente para $|x| < |x_1|$. $\square$

Como consecuencia tenemos el siguiente,

Teorema 8.3 (Convergencia de la serie de potencias). *Para la convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *solamente caben las tres posibilidades siguientes:*

1. *la serie converge únicamente en el punto* $x = 0$*,*
2. *la serie converge en toda la recta real* $(-\infty, +\infty)$*,*
3. *la serie converge en un intervalo centrado en el origen* $(-R, +R)$ *y diverge fuera de él. Pudiendo ser convergente o no en los extremos de dicho intervalo.*

Definición 8.3 (Intervalo de convergencia). *Al intervalo donde converge la serie se le llama intervalo de convergencia y a* R *radio de convergencia.*



El intervalo de convergencia podrá ser:

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

Para hallar la convergencia en los extremos del intervalo habrá que estudiar la convergencia de las series numéricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

Teorema 8.4 (radio de convergencia). *El radio de convergencia de una serie de potencias puede calcularse por cualquiera de las dos fórmulas siguientes*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Nota: Cuando el exponente de x es distinto de n, estas fórmulas pueden no ser válidas. En efecto, cuando el exponente de x es n, al aplicar el criterio del cociente resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \frac{|x|}{L} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < L \quad \Rightarrow \quad R = L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Sin embargo, en los demás casos, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \frac{|x|^k}{L} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x|^k < L \quad \Rightarrow \quad R \neq L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Hemos llamado t_n al término completo de la serie y a_n a la parte numérica.

Cuando el radio de convergencia es $R = 1$, en la práctica, el error no se produce, ya que $|x|^k < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

Ejemplo 8.6. *Encontrar el intervalo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Solución. Para cada valor de x, se trata de una serie geométrica. En consecuencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Es decir, $IC = (-1, 1), \ R = 1$.

Ejemplo 8.7. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

Solución. Podemos elegir entre aplicar el criterio del cociente o el criterio de la raíz. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} : \frac{x^n}{n3^n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}n3^n}{x^n(n+1)3^{n+1}}\right| = \left|\frac{xn}{(n+1)3}\right| =$$
$$= \left|\frac{n}{3n+3}\right| |x| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}|x| < 1 \Rightarrow |x| < 3 \text{ Conv.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Div.} \\ x = -3 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ Conv.} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = [-3, 3)$$

Ejemplo 8.8. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n x^n}{n!}\right| = \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}n!}{2^n x^n (n+1)!}\right| = \left|\frac{2x}{n+1}\right| =$$
$$= \left|\frac{2}{n+1}\right| |x| \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \text{ Conv. } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow IC = (-\infty, +\infty)$$

Ejemplo 8.9. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}(2n)!}{x^{2n}(2n+2)!}\right| = \left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right|$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^2}{\infty} = 0 < 1 \text{ Conv. } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow IC = (-\infty, +\infty)$$

Ejemplo 8.10. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Solución. Aplicando el criterio de la raíz, resulta:

$$\sqrt[n]{|t_n|} = |nx| \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \quad (?) \end{cases}$$

Luego la serie converge sólo para $x = 0$.

Ejemplo 8.11. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Solución. Podemos elegir entre aplicar el criterio del cociente o calcular el radio de convergencia directamente. Tenemos

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

de donde,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

Por consiguiente, el intervalo de convergencia es $(-\infty, +\infty)$, es decir, la serie converge en toda la recta real.

Ejemplo 8.12. *Hallar el campo de convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

Solución. Podemos elegir entre aplicar el criterio del cociente o calcular el radio de convergencia directamente. Tenemos

$$a_n = n! \qquad q - n + 1 = (n+1)!$$

de donde,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Por consiguiente, la serie converge sólo en el punto $x = 0$.

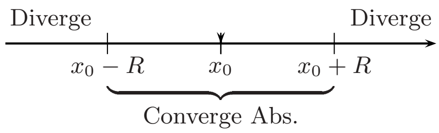
Series de potencias centradas en un punto x_0.

Teorema 8.5. *En una serie de potencias de la forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

solamente caben las tres posibilidades siguientes:

1. *la serie converge únicamente en el punto $x = x_0$,*
2. *la serie converge en toda la recta real $(-\infty, +\infty)$,*
3. *la serie converge en un intervalo centrado en el punto x_0 y diverge fuera de él. Pudiendo ser convergente o no en los extremos de dicho intervalo.*



Nota: La serie siempre es convergente en $x = x_0$.

Ejemplo 8.13. *Determinar el intervalo de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n\sqrt{n}}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente, resulta:

$$\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \left|\frac{(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}} : \frac{(x-2)^n}{4^n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(x-2)^{n+1}4^n\sqrt{n}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}(x-2)^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-2)\sqrt{n}}{4\sqrt{n+1}}\right| = \frac{|x-2|}{4}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x-2|}{4} < 1 \Rightarrow |x-2| < 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{4^n}{4^n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ Con.} \\ x=-2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(-4)^n}{4^n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ Div.} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad IC \quad = \quad (-2,6]$$

Ejemplo 8.14. *Hallar el campo de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x+1)^n$$

Solución. Podemos elegir entre aplicar el criterio del cociente o calcular el radio de convergencia directamente. Tenemos

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$$

de donde,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\big(1+\frac{1}{n}\big) = 3$$

Por consiguiente, la serie converge absolutamente en el intervalo $|x+1| < 3$, y eliminando el valor absoluto tenemos

$$|x+1| < 3 \;\Rightarrow\; -3 < x+1 < 3 \;\Rightarrow\; -4 < x < 2$$

Tenemos que comprobar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo

– Cuando $x=-4$, obtenemos la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que es la serie armónica divergente.

– Cuando $x=2$, obtenemos la serie numérica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

que es una serie alternada condicionalmente convergente.

Por lo tanto el campo de convergencia de la serie es $-4 < x \leq 2$.

Ejemplo 8.15. *Hallar el campo de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}(x+1)^n$$

Solución. Podemos elegir entre aplicar el criterio de la raíz o calcular el radio de convergencia directamente. Tenemos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

de donde,

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a-n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Por consiguiente, la serie converge absolutamente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, es decir, la serie converge para todos los valores de x.

Teorema 8.6 (Continuidad uniforme). *La serie de potencias converge absolutamente y de manera uniforme en cualquier intervalo cerrado totalmente comprendido en el intervalo de convergencia*

$$[-a, a] \subset (-R, R)$$

Demostración. Sea $(-x_0, x_0) \subset (-R, R)$. Y sea $x \in (-x_0, x_0)$, será:

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| < |a_n|x_0^n$$

Y como $\sum a_n x_0^n$ es una serie numérica convergente resulta que $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente de manera uniforme. □

Teorema 8.7 (Continuidad y derivabilidad).

1. *La suma de la serie de potencias $S(x)$ es continua en cada punto x de su intervalo de convergencia $(-R, R)$*

2. *La serie de potencias puede derivarse e integrarse dentro del intervalo de convergencia, conservándose el radio de convergencia.*

8.2.1. Desarrollo de funciones en series de potencias

Se trata de encontrar una serie de potencias que converja hacia una función conocida. Para hallar el desarrollo de una función en serie de potencias se suele seguir uno de los dos procedimientos siguientes:

1. mediante la serie geométrica,
2. mediante la serie de Taylor.

Desarrollo de funciones en series de potencias mediante la serie geométrica

Teniendo en cuenta que la suma de la serie geométrica viene definida por

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

y que la convergencia en este caso viene determinada por $|r| < 1$. Resulta que aquellas funciones que puedan expresarse en la forma del primer miembro podrán desarrollarse en serie de potencia mediante la serie geométrica, sin más que sustituir r por la expresión correspondiente, y el intervalo de convergencia vendrá determinado por la razón correspondiente (en este caso la convergencia en los extremos no será necesaria verificarla, ya que la serie geométrica diverge en los mismos).

Ejemplo 8.16. *Desarrollar en serie de potencias, indicando el intervalo de convergencia, la función*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Solución. Teniendo en cuenta la suma geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

cambiando x por $-x$, obtenemos el desarrollo pedido:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Ejemplo 8.17. *Desarrollar en serie de potencias, indicando el intervalo de convergencia, la función*

$$f(x) = \frac{5}{3-x}$$

Solución. Teniendo en cuenta la suma geométrica

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Tratamos de expresar la función en la forma del primer miembro y sustituimos r por la expresión correspondiente

$$f(x) = \frac{5}{3-x} = \frac{5}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \cdots\right)$$

El intervalo de convergencia viene dado por $|r| = |\frac{x}{3}| < 1$, de donde $|x| < 3$, es decir $IC = (-3, 3)$.

Ejemplo 8.18. *Desarrollar en serie de potencias, centrada en $x_0 = 1$, indicando el intervalo de convergencia, la función*

$$f(x) = \frac{5}{3-x}$$

Solución. Teniendo en cuenta la suma geométrica

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Tratamos de expresar la función en la forma del primer miembro, intentado que r sea del tipo $(x-1)$, y sustituimos r por la expresión correspondiente

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{5}{3-x} &= \frac{5}{3-(x-1+1)} = \frac{5}{3-(x-1)-1} = \frac{5}{2-(x-1)} = \\ &= \frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

El intervalo de convergencia viene dado por $|r| = |\frac{x-1}{2}| < 1$, de donde $|x-1| < 2$, y quitando el valor absoluto resulta $-2 < x-1 < 2$, de donde $-1 < x < 3$, es decir $IC = (-1, 3)$.

Desarrollo de funciones en series de potencias mediante la serie de Taylor

Toda función infinitamente derivable en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ puede desarrollarse en este intervalo mediante una serie infinita de potencias de la forma:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

Cuando $x = 0$ obtenemos la llamada serie de Mac Laurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Teorema 8.8 (Convergencia de la serie de Taylor). *Para que sea posible desarrollar la función $f(x)$ en serie de Taylor en un intervalo I es necesario y suficiente que el término complementario $R_n(x)$ tienda a cero, cuando $n \to \infty$, para todos los $x \in I$.*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0 \quad \textit{para todos los } x \in I$$

Teorema 8.9 (Condición suficiente de convergencia). *Para que sea posible desarrollar la función $f(x)$ en el intervalo $I = (x_0 - R, x_0 + R)$, en una serie de Taylor, es suficiente que $f(x)$ tenga en este intervalo derivadas de todos los órdenes y que exista una constante $K > 0$ tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots \textit{ y para todos los } x \in I$$

El intervalo de convergencia vendrá definido por todos aquellos puntos para los cuales la derivada n-sima de la función está acotada, es decir, donde no se hace infinita.

Series de Taylor de las funciones elementales

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \ -\infty < x < +\infty \\
(1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots, \begin{cases} m \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ -1 < m < 0 \Rightarrow -1 < x \leq 1 \\ m \leq -1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \ -\infty < x < +\infty \\
\arctan x x &- \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \ -\infty < x < +\infty
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.19. *Desarrollar en series de potencias las funciones*

$$f(x) = e^{-x} \quad y \quad g(x) = e^{-x^2}$$

Solución. En el desarrollo de

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty$$

sustituimos x por $-x$ y obtenemos

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty$$

y si sustituimos x por $-x^2$ obtenemos

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty$$

Series que coinciden con el desarrollo de una función en un punto

Conocido el desarrollo en serie de las funciones elementales, se trata de reconocer en dichos desarrollos el valor de una serie determinada.

Ejemplo 8.20. *Calcular* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$.

Solución. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = e^{\ln 2} = 2$$

8.2.2. Desarrollo de funciones en series de potencias a partir de otros desarrollos conocidos

Teorema 8.10. *Dos series de potencia se pueden sumar miembro a miembro y multiplicar por la regla de multiplicación de polinomios. La nueva serie obtenida, tendrá un intervalo de convergencia, que coincidirá con el intervalo común de los intervalos de convergencia de las series primitivas. Pudiendo ser o no convergente en los extremos de dicho intervalo.*

Teorema 8.11. *Las series de potencias se pueden derivar e integrar término a término. El radio de convergencia de la serie obtenida por derivación o integración es el mismo que el de la serie original, sin embargo, el intervalo de convergencia puede cambiar, porque unas sean convergentes en los extremos y las otras no.*

Ejemplo 8.21. *Desarrolla en serie de potencias la función*

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Solución. Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo conocido de $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \text{ para } (-1 < x \leq 1)$$

Cambiando x por $-x$ tenemos

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots, \text{ para } (-1 \leq x < 1)$$

Restando miembro a miembro ambas series resulta

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \text{ para } (-1 < x < 1)$$

Ejemplo 8.22. *Desarrollar en serie de potencias la función*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

Solución. Descomponemos la fracción en fracciones simples

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Transformamos las fracciones buscando la serie geométrica

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}$$

Desarrollamos en serie cada una de las fracciones

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \text{ con } IC = (-1, 1)$$
$$\frac{1}{1-x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots, \text{ con } IC = (-2, 2)$$

luego, las dos series convergen en el intervalo común $(-1, 1)$, y en ese intervalo las podemos sumar término a término

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \cdots$$

Ejemplo 8.23. *Desarrolla en serie de potencias la función*

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

Solución. Partimos de que

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x`2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Cambiando x por $-x^2$ obtenemos el desarrollo de la función subintegral

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

E integrando término a término obtenemos es desarrollo pedido

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - \cdots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \text{ con } (1 \le x \le 1)$$

Ejemplo 8.24. *Determinar el desarrollo en serie de potencias, alrededor del punto $x_0 = 0$, de la función*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Estudiar el intervalo máximo de convergencia de la serie funcional resultante y utilizarla para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$

Solución. Si intentamos aplicar el desarrollo de Taylor directamente a la función dada resulta que las derivadas sucesivas son cada vez más complicadas. Por eso puede convenir descomponer el logaritmo en una diferencia

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Podemos ahora aplicar el desarrollo de Taylor conjuntamente a los dos términos, o bien desarrollar en serie cada término por separado y después sumar las series resultantes término a término. Sin embargo, en este caso, podemos observar que al derivar la serie inicial obtenemos una serie geométrica de razón x^2. En efecto,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Con lo cual podemos obtener el desarrollo en serie de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2+2x^2+2x^4+\cdots+2x^{2n}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \quad \text{para } x \in (-1,1)$$

Ahora bien, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$ que podemos obtener integrando término a término la serie obtenida. Para determinar la constante de integración buscamos un punto donde $f(x) = 0$, y desde él integramos. Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, resulta

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x 2x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

que es la serie buscada.

Para estudiar la convergencia de la serie podemos aplicar sobre la misma el criterio del cociente, o bien utilizar el intervalo obtenido para su derivada, comprobando la convergencia en los extremos del mismo.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{1}{2n+1} \text{ divergente} \\ f(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{-1}{2n+1} \text{ divergente} \end{aligned}\right\} IC = (-1,1)$$

La serie numérica dada se obtiene de la inicial, para $x = 1/3$, en efecto,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

de donde despejando la suma de la serie propuesta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{3}$$

8.2.3. Derivación e integración de las series de potencias

La suma de algunas series de potencias puede conseguirse transformándolas mediante derivación, integración o sacando factor común, hasta conseguir una serie conocida (normalmente la geométrica), sumamos esta serie conocida y deshacemos las operaciones anteriores.

Ejemplo 8.25. *Halla el intervalo de convergencia y la suma de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Solución. Llamamos $f(x)$ a la serie dada

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, o sacando factor común) hasta conseguir una serie geométrica. En este caso, derivando obtenemos una serie geométrica.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Al tratarse de una serie geométrica de razón $r = x$, el intervalo de convergencia viene definido por $|x| < 1$, es decir, $-1 < x < 1$, y, por tanto, $IC = (-1, 1)$, sin que sea convergente en los extremos del mismo, ya que las series geométricas no convergen en los extremos del intervalo.

La función buscada $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$ que además, en este caso, ha de cumplir $f(0) = 0$, en consecuencia:

$$f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|$$

Nota: También podemos hacer primero la primitiva y después determinar la constante, teniendo en cuenta cualquier valor concreto de la función $f(x)$.

En consecuencia,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$$
Para determinar el intervalo de convergencia sólo tenemos que comprobar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo de convergencia de su derivada.
$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Divergente} \\ f(-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ Convergente} \end{aligned}\right\} IC = [-1,1)$$

Ejemplo 8.26. *Halla el intervalo de convergencia y la suma de la serie:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$$

Solución. Llamamos $f(x)$ a la serie dada
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$$
Transformamos la serie (derivando, integrando, o sacando factor común) hasta conseguir una serie geométrica. En este caso, integrando hacemos desaparecen el factor n y obtenemos una serie geométrica. Llamemos $F(x)$ a una primitiva cualquiera.
$$F(x) = \int f(x)\,dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = C + (e^x + e`2x + e^{3x} + \cdots) = C + \frac{e^x}{1-e^x}$$
El intervalo de convergencia de esta serie geométrica de razón $r = e^x$ viene dado por $|e^x| < 1$, de donde, $e^x < 1$, luego, $x < 0$, y, por tanto, $IC = (-1, 0)$

La serie dada la obtenemos derivando la obtenida
$$f(x) = F'(x) = 0 + \frac{e^x(1-e^x) - e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$$
En consecuencia,
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$$
para determinar el intervalo de convergencia sólo tenemos que estudiar la convergencia en el extremo del intervalo obtenido.
$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \text{ Divergente } \Rightarrow IC = (-\infty, 0)$$

Ejemplo 8.27. *Hallar el intervalo de convergencia y la suma de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n}$$

Utiliza el resultado para calcular: $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} - \cdots$

Solución. Llamamos f(x) a la serie dada

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n}$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, o sacando factor común) hasta conseguir una serie geométrica. En este caso, ni al derivar ni al integrar se elimina el $3n$ del denominador, pero sí lo podemos conseguir eliminando previamente una x del numerador. En efecto, sacando x factor común, resulta:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$$

Llamando $g(x)$ a la serie obtenida, resulta:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$$

Que se convierte en una serie geométrica por derivación, en efecto:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3nx^{3n-1}}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n-1} = x^2 + x^5 + x^8 + \cdots = \frac{x^2}{1-x^3}$$

El intervalo de convergencia de esta serie $g'(x)$ al ser una serie geométrica de $r = x^3$ viene dado por $|x^3| < 1$, luego $|x| < 1$, y por tanto $IC = (-1, 1)$.

La función $g(x)$ la obtenemos integrando $g'(x)$ y teniendo en cuenta un valor concreto de $g(x)$ para determinar la constante, en este caso $g(0) = 0$ y, en consecuencia

$$g(x) = \int_0^x g'(x)\,dx = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^x \frac{-3x^2}{1-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3|$$

En consecuencia,

$$f(x) = x\,d(x) = -\frac{x}{3}\ln|1-x^3|$$

luego la serie buscada es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n} = -\frac{x}{3}\ln|1-x^3|$$

Para calcular el intervalo de convergencia bastará con estudiar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo obtenido para $g'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ Divergente} \\ f(-1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n} \text{ Convergente} \end{array}\right\} IC = [-1, 1)$$

La serie numérica dada se obtiene de la inicial, para $x = -1$, por lo tanto,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n} = f(-1) = \frac{1}{3} \ln 2$$

Ejemplo 8.28. *hallar el intervalo de convergencia y la suma de la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n \cdot x^n}{n+1} \quad \textit{con } p > 0$$

Utiliza el resultado para calcular: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)}$

Solución. La convergencia de la serie puede estudiarse directamente sobre la serie dada o bien utilizar el intervalo de convergencia de su derivada, que aparece al sumar la serie.
Llamamos $f(x)$ a la serie dada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1}$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, sacando factor común, etc.) hasta conseguir una serie geométrica.
En este caso, ni al derivar ni al integrar se elimina el $n+1$ del denominador, pero sí lo podemos conseguir introduciendo previamente una x en el numerador. En efecto, multiplicando y dividiendo por x, resulta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^{n+1}}{n+1}$$

Llamando $g(x)$ a la serie obtenida, resulta:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^{n+1}}{n+1}$$

Que se convierte en una serie geométrica por derivación, en efecto:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n(n+1)x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (px)^n =$$
$$= 1 + px + (px)^2 + (px)^3 + \cdots = \frac{1}{1-px}$$

El intervalo de convergencia de esta serie $g'(x)$ al ser una serie geométrica de $r = px$ viene dado por $|px| < 1$, luego $|x| < \frac{1}{p}$, y por tanto, el intervalo es $IC = (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$
La función $g(x)$ la obtenemos integrando $g'(x)$ y teniendo en cuenta un valor concreto de $g(x)$ para determinar la constante, en este caso $g(0) = 0$ y, en consecuencia

$$g(x) = \int_0^x g'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-px}dx = \frac{-1}{p}\int_0^x \frac{-p}{1-px}dx = \frac{-1}{p}\ln|1-px|$$

De donde:

$$f(x) = \frac{1}{x}g(x) = -\frac{1}{px}\ln|1-px|$$

luego la serie buscada es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1} = -\frac{1}{px}\ln|1-px|$$

Para calcular el intervalo de convergencia bastará con estudiar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo obtenido para la serie $g'(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} f(1/p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} & \text{Divergente} \\ f(-1/p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} & \text{Convergente} \end{array}\right\} IC = [-1/p, 1/p)$$

La serie numérica dada se obtiene de la inicial, para $p = 1$ y $x = 1/4$, por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)} = -\frac{1}{1/4}\ln|1-\frac{1}{4}| = -4\ln\frac{3}{4} = 4(\ln 4 - \ln 3)$$

Ejemplo 8.29. *Determinar el campo de convergencia y sumar la siguiente serie de potencias:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}(x-3)^n$

Solución. Llamamos $f(x)$ a la serie dada

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}(x-3)^n$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, sacando factor común, etc.) hasta conseguir una serie geométrica.
En este caso, ni al derivar ni al integral se elimina el $n+2$ del denominador, pero sí lo podemos conseguir introduciendo previamente un $(x-3)^2$ en el numerador. En efecto, multiplicando y dividiendo por $(x-3)^2$, resulta:

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+2}}{n+2}$$

Llamando $g(x)$ a la serie obtenida, resulta:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+2}}{n+2}$$

Que se convierte en una serie geométrica por derivación. En efecto:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^{n+1}=(x-3)^2+(x-3)^3+(x-3)^4+\cdots=$$
$$=\frac{(x-3)^2}{1-(x-3)}=\frac{x^2-6x+9}{-4+4}$$

El intervalo de convergencia de esta serie $g'(x)$, al ser una serie geométrica de $r=x-3$, viene dado por $|x-3|<1$, luego $-1<x-3<1$, y, por tanto, $IC=(2,4)$.
La función $g(x)$ la obtenemos integrando $g'(x)$ y teniendo en cuenta un valor concreto de $g(x)$ para determinar la constante. En este caso, $g(3)=0$ y, en consecuencia:

$$g(x)=\int_3^x g'(t)\,dt=\int_3^x\frac{t^2-6t+9}{-t+4}\,dt=\int_3^x\big(-t+2+\frac{1}{-t+4}\big)dt=$$
$$=\Big[-\frac{t^2}{2}+2t-\ln|4-t|\Big]_3^x=-\frac{x^2}{2}+2x-\ln|4-x|-\frac{3}{2}$$

En consecuencia,

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}\left(-\frac{x^2}{2}+2x-\ln|4-x|-\frac{3}{2}\right)$$

luego la serie buscada es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}(x-3)^n=\frac{-x^2+4x-2\ln|4-x|-3}{2(x-3)^2}$$

Para calcular el intervalo de convergencia bastará con estudiar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo obtenido para $g'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \ \mathit{Divergente} \\ f(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \ \mathit{Convergente} \end{array}\right\} IC = [2, 4)$$

Nota: La función $g(x)$ puede obtenerse a partir de $g'(x)$ mediante integración indefinida, sólo que en este caso habrá que determinar la constante de integración mediante la igualación de los dos valores que se obtienen para $g(3)$: uno en la serie; y el otro en el resultado de la integral.

Para estudiar la convergencia también se puede utilizar directamente la serie dada, aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+3} : \frac{(x-3)^n}{n+2}\right| = \left|\frac{n+2}{n+3}(x-3)\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x-3|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$
Divergente cuando $|x-3| > 1$
y habrá duda cuando $|x-3| = 1 \Rightarrow x = 2,\ x = 4$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie, como se ha hecho anteriormente.

Ejemplo 8.30. *Determinar el campo de convergencia y sumar la serie:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n$$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{n} : \frac{(x+5)^n}{n-1}\right| = \left|\frac{n-1}{n}\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x+5|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x+5| < 1 \Rightarrow -1 < x+5 < 1 \Rightarrow -6 < x < -4$
Divergente cuando $|x+5| > 1$
y habrá duda cuando $|x+5| = 1 \Rightarrow x = -6,\ x = -5$

La duda la resolvemos sustituyendo los valores en la serie

$$\left.\begin{array}{l} x = -6 \Rightarrow \sum \frac{1}{n-1}(-1)^n \text{ alternada Convergente} \\ x = -4 \Rightarrow \sum \frac{1}{n-1}(1)^n \text{ armónica Divergente} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = [-6, -4)$$

Para sumar la serie le ponemos un nombre, le llamamos $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n$$

y transformamos la expresión hasta conseguir una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término que aparece en el denominador. Si derivamos la serie, dicho término no desaparece, necesitaríamos, para ello, que el exponente fuera $n-1$. Pero esto lo podemos conseguir sacando factor común. En efecto:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n = (x+5)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^{n-1}$$

Llamamos $g(x)$ a la nueva serie, y ésta ya si se convierte en geométrica por derivación:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^{n-1}$$

Y derivando término a término resulta:

$$g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n-1}(x+5)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}(x+5)^{n-2} = 1 + (x+5) + (x+5)^2 + \cdots$$

que es una serie geométrica de razón $r = x+5$, cuya suma es:

$$g'(x) = \frac{1}{1-(x+5)} = \frac{1}{1-x-5} = \frac{1}{-x-4} = \frac{-1}{x+4}$$

de donde:

$$g(x) = \int \frac{-1}{x+4}dx = -\ln|x+4| + C$$

La constante de integración la determinamos igualando g(-5) en ambas expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} g(-5) = \sum 0 = 0 \\ g(-5) = -\ln 1 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Con lo cual resulta: $g(x) = -\ln|x+4|$, y en consecuencia:

$$f(x) = -(x+5)\ln|x+4|$$

8.2.4. Aplicaciones de las series de potencias para el cálculo de integrales definidas

Para calcular el valor aproximado de la integral definida de una función $f(x)$, se desarrolla la función en series de potencias $f(x) = S(x)$, se integra la serie término a término, y se toma como valor aproximado de la integral la suma de los n primeros términos de la serie. Para estimar el error del valor aproximado distinguiremos tres situaciones:

1. Si la serie numérica resultante es alternada, que satisface el criterio de Leibniz, el error cometido vendrá determinado por el primer término que no se suma, es decir: $|R_n| < t_{n+1}$.

2. Si la serie resultante es de signo constante entonces el error se puede determinar comparando el resto de la serie con una progresión geométrica infinita decreciente.

3. En cualquier otro caso acudimos a la fórmula de resto de Taylor.

Ejemplo 8.31. *Calcular, con un error menor que una milésima:*

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Solución. Desarrollamos la función subintegral en series de potencias. Para ello utilizamos el desarrollo de e^x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sustituyendo en esta serie x por $-x^2$, obtenemos:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

de donde,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx = \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots\right]_0^1 = \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \cdots
\end{aligned}$$

Como hemos obtenido una serie alternada que cumple el criterio de Leibniz, el error de la aproximación vendrá determinado por el valor absoluto del primer término que no sumemos. Observamos que:

$$|t_5| = \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < \frac{1}{1000}$$

Por consiguiente, para calcular la suma, con la precisión requerida, bastará con sumar los cinco primeros términos de la serie, es decir,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0{,}747$$

Ejemplo 8.32. *Calcular, con precisión de hasta* 0,001*,*

$$\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

Solución. Desarrollamos la función subintegral en series de potencias. Para ello utilizamos el desarrollo de $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Sustituyendo en la expresión subintegral obtenemos:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \cdots$$

de donde,

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \cdots \right) dx =$$
$$= \left[\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \frac{x^5}{5\cdot 6!} + \cdots \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 6!} + \cdots$$

Como hemos obtenido una serie alternada que cumple el criterio de Leibniz, el error de la aproximación vendrá determinado por el valor absoluto del primer término que no sumemos. Observamos que:

$$|t_2| = \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!} = \frac{1}{576} > \frac{1}{1000} \quad \text{y} \quad |t_3| = \frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 6!} = \frac{1}{115200} < \frac{1}{1000}$$

Por consiguiente, para calcular la suma, con la precisión requerida, bastará con sumar los dos primeros términos de la serie, es decir,

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \simeq \frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!} = 0{,}25 - 0{,}0017 = 0{,}24831$$

Ejemplo 8.33. *Calcular, con precisión de hasta* 0,001*,*

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

Solución. Desarrollamos la función subintegral en series de potencias. Para ello utilizamos el desarrollo de $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Sustituyendo en la expresión subintegral obtenemos:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$$

de donde,

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \simeq \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right) =$$
$$= \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \cdots\right]_0^{0,1} = 0{,}1 - \frac{0{,}01}{4} + \frac{0{,}001}{9} - \cdots$$

Como hemos obtenido una serie alternada que cumple el criterio de Leibniz, el error de la aproximación vendrá determinado por el valor absoluto del primer término que no sumemos. Observamos que:

$$|t_2| = \frac{0{,}01}{4} = \frac{1}{400} > \frac{1}{1000} \quad \text{y} \quad |t_3| = \frac{0{,}001}{9} = \frac{1}{9000} < \frac{1}{1000}$$

Por consiguiente, para calcular la suma, con la precisión requerida, bastará con sumar los dos primeros términos de la serie, es decir,

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \simeq 0{,}1 - \frac{0{,}01}{4} = 0{,}1 - 0{,}0025 = 0{,}098$$

Ejercicios propuestos de la sección 8.2. Series de potencias

Soluciones en la página 161

8.2.1.

8.3. Series de Fourier

8.3.1. Funciones periódicas

Una función $y = f(x)$ se llama periódica si sus valores se repiten periódicamente.

$$f(x+p) = f(x)$$

Al número p se le llama período. Si una función tiene por período p, entonces también tiene por período: $2p$, $3p$,...

$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x)$$

El producto de un número por una función periódica sigue siendo periódico.

$$(\lambda f)(x+p) = \lambda f(x+p) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

La suma de dos funciones periódicas del mismo período es otra función periódica, también del mismo período.

$$(f+g)(x+p) = f(x+p) + g(x+p) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Nota: Las siguientes funciones tienen todas período 2π

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \cos 3x,\ \operatorname{sen} 3x, \ldots$$

No obstante, también tienen otros períodos más pequeños. Por ejemplo,

La función $f(x) = 1$ tiene cualquier período

La función $f(x) = \cos 2x$ también tiene de periodo π.

8.3.2. Serie de Fourier de periodo 2π

Definición 8.4. *Se llama serie de Fourier de la función $f(x)$ a la siguiente serie trigonométrica:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

cuyos coeficientes a_0, a_n, b_n se determinan a través de la función $f(x)$ mediante las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

Los coeficientes a_0, a_n, b_n, que se determinan según estas fórmulas, se denominan coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Nota: Si todos los coeficientes a_n son ceros, la serie se llama serie de senos. Si todos los b_n son ceros, la serie se llama serie de cosenos.

En la práctica, el coeficiente a_0 debe calcularse de manera separada del resto de los coeficientes a_n, es decir:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

En el cálculo de los coeficientes de Fourier aparecen las siguientes expresiones:

$$\cos n\pi = (-1)^n, \qquad \operatorname{sen} n\pi = 0$$

Cálculo de los coeficientes de Fourier

Conocida la función $f(x)$ se trata de ver cuál sería su desarrollo en serie de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big) \tag{8.1}$$

Integrando, entre 0 y 2π, la ecuación (8.1), se tiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx\right)$$

Donde,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}dx = \left[\frac{a_0 x}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi a_0}{2} - 0 = \pi a_0$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} a_n \cos nx\,dx = \left[\frac{a_n \operatorname{sen} nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx = \left[\frac{-b_n \cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{-b_n \cos 2n\pi + b_n \cos 0}{2} = \frac{-b_n + b_n}{2} = 0$$

luego, resulta,

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(0+0) = \pi a_0 + 0 = \pi a_0$$

y, en consecuencia, resulta,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

Multiplicando la ecuación (8.1) por $\cos kx$, sacando del sumatorio el término $n = k$, e integrando entre 0 y 2π, resulta,

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big)\cos kx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\cos kx + a_k \cos^2 kx + b_k \operatorname{sen} kx \cos kx + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\big(a_n \cos nx \cos kx + b_n \operatorname{sen} nx \cos kx\big)$$

luego,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx = \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx dx + \int_0^{2\pi} a_k \cos^2 kx\, dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} b_k \operatorname{sen} kx \cos kx\, dx + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\Big(\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \cos kx\, dx + \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx\Big)$$

donde,

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx dx = \left[\frac{a_0 \operatorname{sen} kx}{2k}\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$
$$I_2 = \int_0^{2\pi} a_k \cos^2 kx\, dx = \int_0^{2\pi} a_k \frac{1+\cos 2kx}{2}dx = \left[\frac{a_k x}{2} + \frac{a_k \operatorname{sen} 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi a_k}{2} = \pi a_k$$
$$I_3 = \int_0^{2\pi} b_k \operatorname{sen} kx \cos kx\, dx = \int_0^{2\pi} b_k \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2}dx = \left[\frac{-b_k \cos 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{-b_k + b_k}{4k} = 0$$
$$I_4 = \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \cos kx\, dx = 0$$
$$I_5 = \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx = 0$$

y, en consecuencia, resulta:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = 0 + \pi a_k + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(0+0) = \pi a_k$$

luego,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

Nota: Aunque a_0 normalmente se calcula por separado, también puede calcularse como un caso particular de a_k.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 0\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

Del mismo modo, multiplicando la ecuación (8.1) por $\operatorname{sen} kx$, sacando del sumatorio el término $n = k$, e integrando entre 0 y 2π, resulta,

$$f(x)\operatorname{sen} kx = \frac{a_0}{2}\operatorname{sen} kx + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big)\operatorname{sen} kx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\operatorname{sen} kx + a_k \cos kx \operatorname{sen} kx + b_k \operatorname{sen}^2 kx + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\big(a_n \cos nx \operatorname{sen} kx + b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\big)$$

luego,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\operatorname{sen} kx\,dx + \int_0^{2\pi} a_k \cos kx \operatorname{sen} kx\,dx +$$
$$+\int_0^{2\pi} b_k \operatorname{sen}^2 kx\,dx + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \operatorname{sen} kx\,dx + \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\,dx\Big)$$

donde,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\operatorname{sen} kx dx = \left[\frac{-a_0\cos kx}{2k}\right]_0^{2\pi} = \frac{-a_0+a_0}{2k} = 0$$
$$I_2 = \int_0^{2\pi} a_k \cos kx \operatorname{sen} kx\,dx = \int_0^{2\pi} a_k \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2} dx = \left[\frac{-a_k\cos 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{-a_k+a_k}{4k} = 0$$
$$I_3 = \int_0^{2\pi} b_k \operatorname{sen}^2 kx\,dx = \int_0^{2\pi} b_k \frac{1-\cos 2kx}{2} dx = \left[\frac{b_k x}{2} - \frac{b_k \operatorname{sen} 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi b_k}{2} = \pi b_k$$
$$I_4 = \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \operatorname{sen} kx\,dx = 0$$
$$I_5 = \int_0^{2\pi} b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\,dx = 0$$

y, en consecuencia, resulta:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx dx = 0 + 0 + \pi b_k + \sum_{n=1}^{\infty}(0+0) = \pi b_k$$

luego,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx$$

En consecuencia, el desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi,\pi]$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\[2ex] a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{con} \quad n = 1,2,3,\cdots \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \quad \text{con} \quad n = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Cálculo simplificado de los coeficientes de Fourier

Aunque la integración entre 0 y 2π no presenta ninguna dificultad, ya que uno de los límites de integración es cero. Sin embargo, en el cálculo de las series de Fourier suele resultar más conveniente integrar entre $-\pi$ y π, ya que, aunque ninguno de los límites de integración sea cero, en este caso, es posible utilizar las siguientes igualdades

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

lo que suele simplificar los cálculos.

Esto es posible debido a la siguiente propiedad de las funciones periódicas

Proposición 8.1. *Para toda función periódica, de periodo 2π y continua a trozos, el valor de la integral en cualquier intervalo de longitud 2π, es siempre el mismo.*

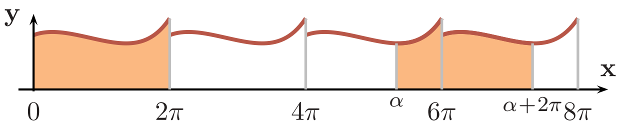


Figura 8.1: Función periódica

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

En particular, el intervalo de integración siempre se podrá centrar en el origen, manteniendo la amplitud. Así,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

En consecuencia, el desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\;dx \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3\cdots \end{cases}$$

8.3.3. Condiciones suficientes de la desarrollabilidad de una función en serie de Fourier

A cada función $f(x)$ integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se le puede poner en correspondencia su serie de Fourier

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Sin embargo, en general, esta correspondencia no se corresponde con una igualdad. Para que así sea, la serie tiene que converger hacia la función.

Teorema 8.12 (Teorema de Dirichlet). *Si una función periódica $f(x)$ de periodo 2π es monótona a trozos y acotada en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces su serie de Fourier converge en cada punto x de este intervalo. Además para la suma*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

de esta serie, se cumplen las igualdades:

1. *$S(x) = f(x)$ si x es un punto de continuidad de $f(x)$.*
2. *$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x es un punto de discontinuidad de $f(x)$.*

Ejemplo 8.34. *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de periodo 2π,*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [-\pi, 0] \\ x & si \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Utiliza el resultado para calcular la suma de la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Solución. La función dada satisface las condiciones del teorema. Hallamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right) = 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

Calculamos la integral por partes

$$\int x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx\,dx \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx = \frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

Luego,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\ \operatorname{sen} n\pi}{n} - 0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - 0 + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{-2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-2}{(2n-1)^2\pi} \qquad \forall n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = 0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx$$

Calculamos la integral por partes

$$\int x\operatorname{sen} nx\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} nx\,dx \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{-x\ \cos nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n}\,dx = \frac{-x\ \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Luego,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\ \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\ \cos n\pi}{n} - 0 + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2} - 0\right) =$$

$$= \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{-(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier será:

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n} \right)$$

En todos los puntos de continuidad de la función será: $S(x) = f(x)$, mientras que en los extremos del intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir, en los puntos de discontinuidad de la función, los valores de la serie vendrán dado por:

$$S(x) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Para hallar la suma de la serie numérica damos un valor adecuado a x de modo que obtengamos la serie que nos interesa. En este caso, haciendo $x = 0$, desaparecen todos los senos, y los cosenos se transforman en 1.

$x = 0 \Rightarrow S(0) = f(0) = 0$, con lo cual,

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right)$$

de donde,

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) = \frac{\pi}{4}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

El mismo resultado se obtiene si en vez de darle a x el valor $x = 0$, le damos el valor $x = \pi$, sin embargo, en este caso la función no es continua en este punto, y, por lo tanto, el valor de la serie hay que calcularlo como la media aritmética de los valores laterales, es decir,

$$x = \pi \Rightarrow S(x) = \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

con lo cual,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

de donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ejemplo 8.35. *Utilizando el desarrollo de Fourier de la extensión periódica de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi)$, probar que*

$$e^x = \frac{2 \cdot \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx - \frac{n(-1)^n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx \right) \right], \forall x \in (-\pi, \pi)$$

Además, utilizar la igualdad anterior para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

(*Indicación:* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*;* $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$).

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi)$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\ \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

Al no ser $f(x)$ ni par ni impar, los coeficientes han de calcularse por la forma general

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[e^x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx =$$

Calculamos esta integral por partes (dos veces).

$$\int e^x \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x \, dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n} \int e^x \operatorname{sen} nx dx$$

$$\int e^x \operatorname{sen} nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \operatorname{sen} nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{-e^x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int e^x \cos nx dx$$

Con lo cual aparece nuevamente la integral que queríamos calcular. La pasamos al primer miembro y la sumamos con la existente

$$\int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{e^x \cos nx}{n^2} - \frac{1}{n^2} \int e^x \cos nx \, dx$$

Pasando esta integral al primer miembro y operando resulta

$$\frac{n^2+1}{n^2} \int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x (n \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2}$$

luego

$$\int e^x \cos nx\,dx = \frac{e^x(n\ \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2+1}$$

de donde resulta,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\ \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2+1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{\pi}(n\ \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi) - e^{-\pi}(-n\ \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi)\right] = \\ &= \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

Análogamente,

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\ dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen} nx\ dx =$

Calculamos esta integral por partes (dos veces).

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} nx\,dx &= \left[\begin{array}{ll} u = e^x & \\ dv = \operatorname{sen} nx\,dx & \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = e^x\,dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array}\right] = \\ &= -\frac{e^x\ \cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int e^x \cos nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x\ \cos nx\,dx &= \left[\begin{array}{ll} u = e^x & \\ dv = \cos nx\,dx & \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array}\right] = \\ &= \frac{e^x\ \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n}\int e^x \operatorname{sen} nx dx \end{aligned}$$

Con lo cual aparece nuevamente la integral que queríamos calcular. La pasamos al primer miembro y la sumamos con la existente

$$\int e^x \operatorname{sen} nx\,dx = -\frac{e^x \cos nx}{n} + \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int e^x \operatorname{sen} nx\,dx$$

Pasando esta integral al primer miembro y operando resulta

$$\frac{n^2+1}{n^2}\int e^x \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{e^x(-n\ \cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2}$$

luego

$$\int e^x \cos nx\,dx = \frac{e^x(-n\ \cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2+1}$$

de donde resulta,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(-n\,\cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2+1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{\pi}(-n\,\cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi) - e^{-\pi}(-n\,\cos n\pi - \operatorname{sen} n\pi)\right] = \\
&= \frac{-2n(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los coeficientes en la serie de Fourier resulta

$$
\begin{aligned}
e^x &= \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \cos nx + \frac{-2n(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \operatorname{sen} nx = \\
&= \frac{2\cdot \operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx - \frac{n(-1)^n}{1+n^2}\operatorname{sen} nx\right)\right]
\end{aligned}
$$

que se cumple $\forall x \in (-\pi, \pi)$.

Para encontrar la serie numérica dada, hacemos $x = \pi$ con lo cual eliminamos todos los senos de la serie de Fourier y al mismo tiempo eliminamos la alternancia de signos de los términos a_n. Pero con esta sustitución hay que tener en cuenta que se realiza en un punto de discontinuidad, luego el valor de la serie se obtiene de la media aritmética de los valores laterales de la función, es decir,

$$
S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \cosh\pi
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\cosh\pi &= \frac{2\cdot \operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}(-1)^n - 0\right)\right] = \\
&= \frac{2\cdot \operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Y despejando la serie pedida resulta

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\cosh\pi}{2\operatorname{senh}\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi} - 1\right)
$$

8.3.4. Desarrollo de las funciones pares e impares en series de Fourier

Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se llama *par* si

$$
f(-x) = f(x) \quad \text{para todos los} \quad x \in [-\pi, \pi]
$$

La gráfica de la función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se llama *impar* si

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para todos los} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

La gráfica de la función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Las siguientes propiedades permiten facilitar los cálculos de los coeficientes de Fourier en las funciones pares e impares.

Proposición 8.2. *La integral de una función par en un intervalo simétrico* $[-a, a]$*, es el doble de la integral en el intervalo* $[0, a]$*.*

$$f \text{ par } \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Proposición 8.3. *La integral de una función impar en un intervalo simétrico* $[-a, a]$*, es cero.*

$$f \text{ impar } \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

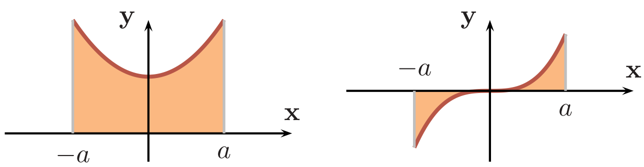


Figura 8.2: Funciones par e impar

En consecuencia, podemos enunciar los siguientes

Teorema 8.13. *Los coeficientes de Fourier de una función par* $f(x)$ *se pueden obtener, de manera simplificada, mediante las siguientes fórmulas:*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de una función par contiene sólo los cosenos, es decir, tiene la forma:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx)$$

Teorema 8.14. *Los coeficientes de Fourier de una función impar* $f(x)$ *se pueden obtener, de manera simplificada, mediante las siguientes fórmulas:*

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de una función impar contiene sólo los senos, es decir, tiene la forma:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \operatorname{sen} nx)$$

De manera esquemática,

Si f es par

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)\cos x = [\text{Par} \times \text{Par} = \text{Par}] \Rightarrow a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \\ f(x)\operatorname{sen} x = [\text{Par} \times \text{Impar} = \text{Impar}] \Rightarrow b_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La serie de Fourier de una función par es una serie de cosenos.

Si f es impar

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)\cos x = [\text{Impar} \times \text{Par} = \text{Impar}] \Rightarrow a_n = 0 \\ f(x)\operatorname{sen} x = [\text{Impar} \times \text{Impar} = \text{Par}] \Rightarrow b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La serie de Fourier de una función impar es una serie de senos.

Nota: Obsérvese el 2 de la forma simplificada.

$$f \text{ par } \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\int_{\mathbf{0}}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0$$

$$f \text{ impar } \Rightarrow a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\int_{\mathbf{0}}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

Ejemplo 8.36. *Desarrollar en serie de Fourier la siguiente función periódica de periodo 2π,*

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi \le x \le \pi$$

Utiliza el resultado para calcular la suma de la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Solución. La función cumple las condiciones del teorema de desarrollabilidad. La función es par, luego se trata de una serie de cosenos, y los coeficientes se pueden calcular mediante la forma simplificada. La serie de fourier tendrá la forma:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx)$$

Los coeficientes de Fourier, por la forma simplificada, son:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2 \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx \end{aligned}$$

Calculamos esta integral por partes (dos veces)

$$\int x^2 \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2x \, dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{2}{n} \int x \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$\int x \operatorname{sen} nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{-x \cos nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n} \, dx = \frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Luego,

$$\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{2}{n} \left(\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen} nx}{n^3}$$

de donde,

$$a_n = \frac{2}{n} \left[\frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen} nx}{n^3} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

Por lo tanto la serie de Fourier de la función dada es:

$$x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

o, en forma desarrollada,

$$x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots \right)$$

Dado que la función dada es continua en todo $\mathbb{R}$, la serie coincide con la función $S(x) = f(x)$ para cualquier número real x. Sin embargo hay que tener en cuenta que fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$ tenemos que $f(x) \neq x^2$, y habrá que calcular el valor de $f(x)$ de acuerdo con la periodicidad definida. La serie numérica pedida podemos obtenerla haciendo $x = \pi$.

$x = \pi \Rightarrow S(\pi) = f(\pi) = \pi^2$, luego

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots \right)$$

de donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ejemplo 8.37. *Desarrolla en serie de Fourier la siguiente función periódica de periodo 2π*

$$f(x) = x \qquad -\pi < x \leq \pi$$

Utiliza el resultado para calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Solución. La función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de desarrollabilidad. Además, la función $f(x)$ es impar, luego se trata de una serie de senos, y los coeficientes se pueden calcular por las fórmulas reducidas. La serie será de la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

los coeficientes serán:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

Calculamos la integral por partes

$$\int x \operatorname{sen} nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right] =$$
$$= \frac{-x \cos nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n} dx = \frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Luego

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi \cos n\pi}{n} - 0 + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2} - 0\right) =$$
$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier será:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \cdots\right)$$

Esta igualdad tiene lugar para todos los $x \in (-\pi, \pi)$, sin embargo, en los extremos del intervalo la función no es continua y el valor de la serie hay que calcularlo mediante la media aritmética correspondiente, en este caso $S(\pm\pi) = 0$. Fuera del intervalo habrá que tener en cuenta el valor correspondiente debido a la periodicidad.
La serie numérica dada la obtenemos haciendo $x = \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

luego,

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\operatorname{sen}2\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\operatorname{sen}3\frac{\pi}{2}}{3} - \cdots\right) = 2\left(1 - 0 - \frac{1}{3} + \cdots\right) =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

y por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 8.38. *Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.*
Usar el desarrollo obtenido para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\ \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

Ahora bien, la función $f(x) = |x|$ es par, ya que:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

por lo tanto se trata de una serie de cosenos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad b_n = 0$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

hacemos la integral por partes:

$$\int x \cos nx \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \Bigg\} =$$
$$= \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx = \frac{x \ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

con lo cual:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3 \cdots$$

De donde.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = 0$, donde la función es continua. Luego:

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

de donde:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ejemplo 8.39. *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π definida por:*

$$f(x) = \left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{si } x \in (0, \pi) \\ -1 & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{array}\right.$$

Aplicar dicho desarrollo para sumar la serie:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Solución. Se trata de una función impar, luego es una serie de senos. En consecuencia, $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{n} + \frac{\cos 0}{n}\right) = \frac{2}{\pi}(-\cos n\pi + 1) = \frac{2}{\pi}((-1)^n + 1) =$$

$$= \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{array}\right\} = \frac{4}{(2n-1)\pi},\ \forall n$$

de donde, sustituyendo en la expresión

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big)$$

resulta,

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right)$$

Para obtener a serie numérica pedida, damos a x el valor $x = \pi/2$, donde la función es continua, y, por tanto, coincide can la serie. Así,

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

De donde, despejando la serie, resulta

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicios propuestos de la sección 8.3. Series de Fourier

Soluciones en la página 161

8.3.1. Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } x \in (0, \pi) \\ -\pi/4 & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Aplicar dicho desarrollo para calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

8.3.2. Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Aplicar dicho desarrollo para calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Ejercicios y problemas del Capítulo 8

Ejercicios resueltos del Capítulo 8

8.1. Series de funciones

8.2. Series de potencias

8.1 (Serie funcional). *Determina el campo de convergencia de la serie funcional* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)^2}$.

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2} : \frac{x^n}{2^n(n+1)^2}\right| = \left|\frac{x^{n+1}2^n(n+1)^2}{x^n 2^{n+1}(n+2)^2}\right| = \left|\frac{x(n+1)^2}{2(n+2)^2}\right| \to \left|\frac{x}{2}\right|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x/2| < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$
Divergente cuando $|x/2| > 1$
y habrá duda cuando $|x/2| = 1 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie.

$$\left.\begin{array}{lll} x = -2 \Rightarrow & \sum \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)^2} = \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} & \text{alternada convergente} \\ x = 2 \Rightarrow & \sum \frac{2^n}{2^n(n+1)^2} = \sum \frac{1}{(n+1)^2} & \text{armónica convergente} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow IC = [-2, 2]$$

8.2 (Serie funcional). *Determinar el campo de convergencia de*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\cdot x^{2n}}{n^3 \cdot 2^{n+1}}$$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+3)\cdot x^{2n+2}}{(n+1)^3\cdot 2^{n+2}} : \frac{(n+2)\cdot x^{2n}}{n^3\cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+3)\cdot x^{2n+2}\cdot n^3\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 2^{n+2}\cdot(n+2)\cdot x^{2n}}\right| =$$
$$= \left|\frac{(n+3)x^2n^3}{(n+1)^3 2(n+2)}\right| = \left|\frac{n+3}{n+2}\frac{n^3}{(n+1)^3}\frac{x^2}{2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\frac{x^2}{2}\right| = \frac{x^2}{2}$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $\frac{x^2}{2} < 1 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
Divergente cuando $\frac{x^2}{2} > 1$
y habrá duda cuando $\frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \to \sum \frac{(n+2)(-\sqrt{2})^{2n}}{n^3 2^{n+1}} = \sum \frac{(n+2)2^n}{n^3 2^{n+1}} = \sum \frac{n+2}{2n^3} \text{ Conv.} \\ x = \sqrt{2} \to \sum \frac{(n+2)(\sqrt{2})^{2n}}{n^3 2^{n+1}} = \sum \frac{(n+2)2^n}{n^3 2^{n+1}} = \sum \frac{n+2}{2n^3} \text{ Conv.} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow IC = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Nota: (Radio de convergencia). Obsérvese que si para calcular el intervalo de convergencia de la serie de potencias hubiéramos utilizado la fórmula del radio de convergencia $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}$ hubiéramos obtenido un resultado erróneo. En efecto, se hubiera obtenido

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 2$$

mientras que, realmente, $R = \sqrt{2}$.

Esta anomalía se debe a que la fórmula del radio $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ solamente es válida cuando el exponente de x es n, pero no en los demás casos. En efecto, en dicho caso, al aplicar el criterio del cociente resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{L} < 1 \quad\Rightarrow\quad |x| < L \quad\Rightarrow\quad R = L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Sin embargo, en los demás casos, resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^k}{L} < 1 \quad\Rightarrow\quad |x|^k < L \quad\Rightarrow\quad R \neq L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Hemos llamado a_n al término completo de la serie y c_n a la parte numérica.

Cuando el radio de convergencia es $R = 1$, en la práctica, el error no se produce, ya que $|x|^k < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

8.3 (Series funcionales). *Determinar el campo de convergencia y sumar la siguiente serie de potencias:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}(x-3)^n$

Solución. Llamamos $f(x)$ a la serie dada

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}(x-3)^n$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, sacando factor común, etc.) hasta conseguir una serie geométrica.

En este caso, ni al derivar ni al integral se elimina el $n+2$ del denominador, pero sí lo podemos conseguir introduciendo previamente un $(x-3)^2$ en el numerador. En efecto, multiplicando y dividiendo por $(x-3)^2$, resulta:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+2}}{n+2}$$

Llamando $g(x)$ a la serie obtenida, resulta:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+2}}{n+2}$$

Que se convierte en una serie geométrica por derivación. En efecto:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^{n+1} = (x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4 + \cdots =$$

$$= \frac{(x-3)^2}{1-(x-3)} = \frac{x^2-6x+9}{-4+4}$$

El intervalo de convergencia de esta serie $g'(x)$, al ser una serie geométrica de $r = x-3$, viene dado por $|x-3| < 1$, luego $-1 < x-3 < 1$, y, por tanto, $IC = (2,4)$.

La función $g(x)$ la obtenemos integrando $g'(x)$ y teniendo en cuenta un valor concreto de $g(x)$ para determinar la constante. En este caso, $g(3) = 0$ y, en consecuencia:

$$g(x) = \int_3^x g'(t)\,dt = \int_3^x \frac{t^2-6t+9}{-t+4}\,dt = \int_3^x \Big(-t+2+\frac{1}{-t+4}\Big)dt =$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} + 2t - \ln|4-t|\right]_3^x = -\frac{x^2}{2} + 2x - \ln|4-x| - \frac{3}{2}$$

En consecuencia,

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} g(x) = \frac{1}{(x-3)^2}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \ln|4-x| - \frac{3}{2}\right)$$

luego la serie buscada es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}(x-3)^n = \frac{-x^2 + 4x - 2\ln|4-x| - 3}{2(x-3)^2}$$

Para calcular el intervalo de convergencia bastará con estudiar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo obtenido para $g'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \text{ Divergente} \\ f(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \text{ Convergente} \end{array}\right\} IC = [2, 4)$$

Nota: La función $g(x)$ puede obtenerse a partir de $g'(x)$ mediante integración indefinida, sólo que en este caso habrá que determinar la constante de integración mediante la igualación de los dos valores que se obtienen para $g(3)$: uno en la serie; y el otro en el resultado de la integral.

Para estudiar la convergencia también se puede utilizar directamente la serie dada, aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+3} : \frac{(x-3)^n}{n+2}\right| = \left|\frac{n+2}{n+3}(x-3)\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x-3|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$
Divergente cuando $|x-3| > 1$
y habrá duda cuando $|x-3| = 1 \Rightarrow x = 2,\ x = 4$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie, como se ha hecho anteriormente.

8.4 (Series funcionales). *Determinar el campo de convergencia y sumar la serie:* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{n} : \frac{(x+5)^n}{n-1}\right| = \left|\frac{n-1}{n}\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x+5|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x+5| < 1 \Rightarrow -1 < x+5 < 1 \Rightarrow -6 < x < -4$
Divergente cuando $|x+5| > 1$
y habrá duda cuando $|x+5| = 1 \Rightarrow x = -6,\ x = -5$

La duda la resolvemos sustituyendo los valores en la serie

$$\left.\begin{array}{l} x = -6 \Rightarrow \sum \frac{1}{n-1}(-1)^n \text{ alternada Convergente} \\ x = -4 \Rightarrow \sum \frac{1}{n-1}(1)^n \text{ armónica Divergente} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = [-6, -4)$$

Para sumar la serie le ponemos un nombre, le llamamos $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n$$

y transformamos la expresión hasta conseguir una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término que aparece en el denominador. Si derivamos la serie, dicho término no desaparece, necesitaríamos, para ello, que el exponente fuera $n-1$. Pero esto lo podemos conseguir sacando factor común. En efecto:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^n = (x+5)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^{n-1}$$

Llamamos $g(x)$ a la nueva serie, y ésta ya si se convierte en geométrica por derivación:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}(x+5)^{n-1}$$

Y derivando término a término resulta:

$$g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n-1}(x+5)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}(x+5)^{n-2} = 1 + (x+5) + (x+5)^2 + \cdots$$

que es una serie geométrica de razón $r = x+5$, cuya suma es:

$$g'(x) = \frac{1}{1-(x+5)} = \frac{1}{1-x-5} = \frac{1}{-x-4} = \frac{-1}{x+4}$$

de donde:

$$g(x) = \int \frac{-1}{x+4}dx = -\ln|x+4| + C$$

La constante de integración la determinamos igualando g(-5) en ambas expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} g(-5) = \sum 0 = 0 \\ g(-5) = -\ln 1 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Con lo cual resulta: $g(x) = -\ln|x+4|$, y en consecuencia:

$$f(x) = -(x+5)\ln|x+4|$$

8.5 (Serie funcional). *Determinar el campo de convergencia de la serie funcional* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n+2}$ *y determinar su suma.*

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+4}}{n+2} : \frac{x^{n+3}}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\frac{x^{n+4}}{x^{n+3}}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\,x\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $|x| > 1$
y habrá duda cuando $|x| = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow \sum \dfrac{(-1)^{n+4}}{n+2} \text{ alternada Convergente} \\ x=1 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n+2} \text{ armónica Divergente} \end{array}\right\} \Rightarrow IC=[-1,1)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n+2}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término que aparece en el denominador. Si derivamos la serie dicho término no desaparece, necesitaríamos, para ello, que el exponente fuera $n+2$, pero esto lo podemos conseguir sacando factor común x^2. En efecto,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n+2}=x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Llamamos $g(x)$ a la nueva serie y ésta sí se convierte en geométrica por derivación.

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Y derivando término a término resulta,

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}=x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

de donde,

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int \frac{x}{1-x}\,dx=\int \left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=-x-\ln|1-x|+C$$

La constante de integración la determinamos igualando $g(0)$ en ambas expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=\sum 0=0 \\ g(0)=-0-\ln 1+C=0+C=C \end{array}\right\} \Rightarrow C=0$$

Con lo cual resulta: $g(x)=-x-\ln|1-x|$, y en consecuencia:

$$f(x)=x^2 g(x)=x^2(-x-\ln|1-x|)=-x^3-x^2\ln|1-x|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+1}=-x^3-x^2\ln|1-x|$$

8.6 (Serie funcional). *Estudiar el intervalo de convergencia y sumar la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}:\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|=\left|\frac{(2n+1)x^{2n+3}}{(2n+3)x^{2n+1}}\right|=\left|\frac{2n+1}{2n+3}x^2\right|\to|x^2|=x^2$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$
y habrá duda cuando $x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n+1} \text{ Divergente} \\ x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{ Divergente } (\sim \text{armónica}) \end{array}\right\} \Rightarrow IC = (-1, 1)$$

Para calcular la suma transformamos el término general buscando una serie geométrica, y después deshacemos los cambios realizados.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \frac{\left(x^2\right)^0}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

de donde,

$$\begin{aligned} S(x) &= \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x}{(1+x)(1-x)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1-x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx = \\ &= \frac{-1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \end{aligned}$$

Para determinar la constante hacemos $x = 0$, tanto en la serie como en el resultado final,

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow S(0) = 0 \\ S(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \Rightarrow S(0) = 0 + C \end{array}\right\} C = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

8.7 (Series funcionales). *Determinar el intervalo máximo de convergencia de las siguientes series y expresar su suma en términos de funciones elementales:*

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$$

Con ayuda de los resultados obtenidos, determina el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$

Solución.

(a) La serie dada es una serie de potencias centrada en el punto $x_0 = 0$, luego su intervalo de convergencia estará centrado en $x_0 = 0$ y su radio será:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Para determinar la convergencia en los extremos del intervalo, estudiamos las series numéricas que se obtienen al sustituir la variable x por dichos valores. Así,

$$\text{para } x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \Rightarrow \text{ divergente}$$

$$\text{para } x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} \Rightarrow \text{ divergente}$$

Luego el intervalo máximo de convergencia de la serie funcional dada es $I = (-1, 1)$. Su suma la obtenemos a partir de la serie geométrica, mediante el método de derivación-integración término a término. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) Se trata de otra serie de potencias centrada en el punto $x_0 = 0$ y podemos seguir el mismo procedimiento. Su intervalo de convergencia estará centrado en $x_0 = 0$ y su radio será:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = 1$$

Para determinar la convergencia en los extremos del intervalo, estudiamos las series numéricas que se obtienen al sustituir la variable x por dichos valores. Así,

$$\text{para } x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \Rightarrow \text{ divergente}$$

$$\text{para } x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \Rightarrow \text{ divergente}$$

Luego el intervalo máximo de convergencia de la serie funcional dada es $I = (-1, 1)$. Su suma la obtenemos a partir de la serie geométrica, mediante el método de derivación-integración término a término y teniendo en cuenta el resultado anterior. En efecto, llamemos $f(x)$ a la serie dada,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Será,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

De donde,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\,dt = -\int_0^x \frac{-t}{(1-t)^2}\,dt = \\ &= -\int_0^x \frac{1-t-1}{(1-t)^2}\,dt = -\int_0^x \frac{1-t}{(1-t)^2}\,dt - \int_0^x \frac{-1}{(1-t)^2}\,dt = \\ &= \int_0^x \frac{-1}{1-t}\,dt + \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

La serie numérica propuesta se obtiene de la serie dada en el apartado (b), para $x = 1/2$. En consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = \frac{1}{1-1/2} + \ln(1/2) = 2 - \ln 2$$

8.8 (Serie de Taylor). *Determinar el desarrollo de Taylor de la función* $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *alrededor del punto* $x_0 = 0$. *Estudiar el intervalo máximo de convergencia de la serie funcional resultante y utilizarla para calcular* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}}$

(*Indicación: Recordar que* $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$)

Solución. Si intentamos aplicar el desarrollo de Taylor directamente a la función dada resulta que las derivadas sucesivas son cada vez más complicadas. Por eso puede convenir descomponer el logaritmo en una diferencia

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Podemos ahora aplicar el desarrollo de Taylor conjuntamente a los dos términos, o bien desarrollar en serie cada término por separado y después sumar las series resultantes término a término. Sin embargo, en este caso podemos observar que al derivar la serie inicial obtenemos una serie geométrica de razón x^2. En efecto

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Con lo cual podemos obtener el desarrollo en serie de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \cdots + 2x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \quad \text{para } x \in (-1, 1)$$

Ahora bien, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$ que podemos obtener integrando término a término la serie obtenida. Para determinar la constante de integración buscamos un punto donde $f(x) = 0$, y desde él integramos. Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$ resulta

$$f(x) = \int_o^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_o^x 2x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

que es la serie buscada.

Para estudiar la convergencia de la serie podemos aplicar sobre la misma el criterio del cociente, o bien utilizar el intervalo obtenido para su derivada, comprobando la convergencia en los extremos del mismo.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{1}{2n+1} \quad \text{Divergente} \\ f(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(-1)}{2n+1} \quad \text{Divergente} \end{aligned}\right\} IC = (-1, 1)$$

La serie numérica dada se obtiene de la inicial, para $x = 1/3$, en efecto,

$$f(\frac{1}{3}) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

de donde despejando la suma de la serie propuesta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{3}$$

8.9 (Serie de potencias). *Estudiar el intervalo máximo de convergencia de la siguiente serie funcional* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n \cdot x^n}{n+1}$ *con* $p > 0$ *expresar su suma en términos de las funciones elementales y, con su ayuda, calcular* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)}$

Solución. La convergencia de la serie puede estudiarse directamente sobre la serie dada o bien utilizar el intervalo de convergencia de su derivada, que aparece al sumar la serie. Llamamos $f(x)$ a la serie dada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1}$$

Transformamos la serie (derivando, integrando, sacando factor común, etc.) hasta conseguir una serie geométrica.
En este caso, ni al derivar ni al integrar se elimina el $n+1$ del denominador, pero sí lo podemos conseguir introduciendo previamente una x en el numerador. En efecto, multiplicando y dividiendo por x, resulta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^{n+1}}{n+1}$$

Llamando $g(x)$ a la serie obtenida, resulta:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^{n+1}}{n+1}$$

Que se convierte en una serie geométrica por derivación, en efecto:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (n+1) x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (px)^n =$$

$$= 1 + px + (px)^2 + (px)^3 + \cdots = \frac{1}{1-px}$$

El intervalo de convergencia de esta serie $g'(x)$ al ser una serie geométrica de $r = px$ viene dado por $|px| < 1$, luego $|x| < \frac{1}{p}$, y por tanto, el intervalo es $IC = (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$
La función $g(x)$ la obtenemos integrando $g'(x)$ y teniendo en cuenta un valor concreto de $g(x)$ para determinar la constante, en este caso $g(0) = 0$ y, en consecuencia

$$g(x) = \int_0^x g'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-px}dx = \frac{-1}{p} \int_0^x \frac{-p}{1-px}dx = \frac{-1}{p} \ln|1-px|$$

De donde:

$$f(x) = \frac{1}{x} g(x) = -\frac{1}{px} \ln|1-px|$$

luego la serie buscada es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n x^n}{n+1} = -\frac{1}{px} \ln|1-px|$$

Para calcular el intervalo de convergencia bastará con estudiar la convergencia de la serie dada en los extremos del intervalo obtenido para la serie $g'(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1/p)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} \quad \text{Divergente} \\ f(-1/p)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{Convergente} \end{array}\right\} IC=[-1/p,1/p)$$

La serie numérica dada se obtiene de la inicial, para $p=1$ y $x=1/4$, por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+1)}=-\frac{1}{1/4}\ln|1-\frac{1}{4}|=-4\ln\frac{3}{4}=4(\ln 4-\ln 3)$$

8.10 (Series funcionales). *Determinar el campo de convergencia de la serie funcional* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+1}$ *y determinar su suma.*

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x^{n+4}}{n+2}:\frac{x^{n+3}}{n+1}\right|=\left|\frac{n+1}{n+2}\frac{x^{n+4}}{x^{n+3}}\right|=\left|\frac{n+1}{n+2}\,x\right|\xrightarrow{n\to\infty}|x|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x|<1\Rightarrow -1<x<1$
Divergente cuando $|x|>1$
y habrá duda cuando $|x|=1\Rightarrow x=1, x=-1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow\sum\dfrac{(-1)^{n+3}}{n+1} \text{ alternada Convergente} \\ x=1\Rightarrow\sum\dfrac{1}{n+1} \text{ armónica Divergente} \end{array}\right\}\Rightarrow IC=[-1,1)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+1}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término que aparece en el denominador. Si derivamos la serie dicho término no desaparece, necesitaríamos, para ello, que el exponente fuera $n+1$, pero esto lo podemos conseguir sacando factor común x^2. En efecto,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+1}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Llamamos $g(x)$ a la nueva serie y ésta si se convierte en geométrica por derivación.

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Y derivando término a término resulta,

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

de donde,

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \frac{-1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + C$$

La constante de integración la determinamos igualando $g(0)$ en ambas expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = \sum 0 = 0 \\ g(0) = -\ln 1 + C = 0 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Con lo cual resulta: $g(x) = -\ln|1-x|$, y en consecuencia:

$$f(x) = x^2 g(x) = -x^2 \ln|1-x| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+1} = -x^2 \ln|1-x|$$

8.11 (Series funcionales). *Calcular el intervalo de convergencia de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. *Utilizar el valor de la suma para calcular* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n-1}}$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\,\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\,x\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $|x| > 1$
y habrá duda cuando $|x| = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow \sum n(-1)^{n-1} \text{ Divergente} \\ x = 1 \Rightarrow \sum n \text{ Divergente} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = (-1,\ 1)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término n que aparece multiplicando. Pero podemos observar que es la derivada de una serie geométrica. En efecto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

La serie numérica pedida se obtiene de la serie de funciones, para $x = -1/2$, que pertenece al intervalo de convergencia de la misma. En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n-1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{n-1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = -f\left(\frac{-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2} = \frac{-4}{9}$$

8.12 (Serie funcional). *Estudiar el máximo intervalo de convergencia de la serie funcional* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$*, y con la ayuda de su suma calcula* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{n+1} : \frac{x^{2n}}{n}\right| = \left|\frac{x^{2n}x^2 n}{x^{2n}(n+1)}\right| = \left|\frac{n}{n+1}x^2\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|x^2\right| = x^2$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $x^2 > 1$
y habrá duda cuando $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow \sum \dfrac{(-1)^{2n}}{n} = \sum \dfrac{1}{n} \text{ Div.} \\ x = 1 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n} \text{ Div.} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = (-1, 1)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término que aparece en el denominador. Si derivamos la serie dicho término desaparece, en efecto:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1} = 2\big[x + x^3 + x^5 + \cdots\big] = 2\frac{x}{1-x^2}$$

de donde,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{2x}{1-x^2}dx = -\ln|1-x^2| + C$$

la constante de integración la determinamos igualando $f(0)$ en ambas expresiones,

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \sum 0 = 0 \\ f(0) = -\ln 1 + C = 0 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Con lo cual, $\quad f(x) = -\ln|1-x^2|,\ $ y en consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^{2n}}{n} = f(1/2) = -\ln|1-\frac{1}{4}| = -\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3}$$

8.13 (Serie de Taylor). *Calcular la serie de Taylor de la función* $h(x) = \operatorname{sen} x - x\cdot\cos x$ *centrada en* $x_0 = 0$*, determina su campo de convergencia y utilízala para calcular* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\cdot\pi^{2n}}{(2n+1)!}$

Solución. Utilizando el desarrollo de Taylor de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ resulta:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{sen} x - x\cos x = \\ &= [x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots] - x[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots] = \\ &= x - x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^7}{6!} + \cdots = \\ &= -\frac{x^3}{3!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{5x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{7x^7}{7!} + \cdots = \\ &= \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + \frac{6}{7!}x^7 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \end{aligned}$$

Convergente en todo $\mathbb{R}$. La convergencia viene determinada por la convergencia de los dos desarrollos utilizados.

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = \pi$, donde es convergente. Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\cdot\pi^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\cdot\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2\pi}[\operatorname{sen}\pi - \pi\cos\pi] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}[0+\pi] = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

8.14 (Serie funcional). *Determinar el intervalo de convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$*, calcular su suma y usarla para calcular la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2x^n}{n^2x^{n-1}}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 x\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $|x| > 1$
y habrá duda cuando $|x| = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-1)^{n-1} \text{ Divergente (ya que } a_n \nrightarrow 0) \\ x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \text{ Divergente (ya que } a_n \nrightarrow 0) \end{array}\right\} IC = (-1,1)$$

Para calcular la suma transformamos el término general buscando una serie geométrica, y después deshacemos los cambios realizados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(nx^n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = \left(x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' =$$
$$= \left(x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'\right)' = \left(x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'\right)' = \left(x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'\right)' = \left(x\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)' =$$
$$= \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + x2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Para sumar la serie numérica identificamos el valor corrrespondiente de x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1+1/3}{(1-1/3)^3} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{4/3}{(2/3)^3} = \frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

8.15 (Serie de Taylor y aproximación de integral definida).

Dada la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

a) Usar la serie de Taylor de $f'(x)$ centrada en $x_0 = 0$ para sumar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n)\pi^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

b) Aproximar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ *con* $E < \dfrac{1}{1000}$.

Solución. Para evitar el problema de discontinuidad de la función supondremos que $f(0) = 1$.
a) Para hallar el desarrollo en serie de la función dada partimos del desarrollo de la función $\operatorname{sen} x$, y lo transformamos como sea preciso.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \; x \in \mathbb{R}$$

de donde,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

con lo que resulta,

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = -\frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \frac{6x^5}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n\pi^{2n-1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n\pi^{2n-1}}{(2n+1)!} = -f(\pi) =$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi - \operatorname{sen} \pi}{\pi^2} = -\frac{-\pi - 0}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$$

b) Para calcular la integral pedida, utilizamos el desarrollo en serie de la función dada. Así,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

Al resultar una serie alternada que cumple las condiciones de convergencia de Leibnitz, el error viene determinado por el primer término no sumado. En nuestro caso:

$$\begin{aligned}&3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18 < 1000,\\&5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = 600 < 1000,\\&7 \cdot 7! = 7 \cdot 5040 = 35280 > 1000 \text{ OK}\end{aligned}$$

En consecuencia, la integral pedida con el error admitido es:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = $$
$$= \frac{1800 - 100 + 3}{1800} = \frac{1703}{1800} = 0'946$$

8.16 (Serie funcional). *Determina el campo de convergencia de la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,4^n}$. *Calcula su suma y utilízala para obtener la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}} : \frac{x^n}{n\,4^n}\right| = \left|\frac{x^n x\, n 4^n}{(n+1)4^n 4 x^n}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\,\frac{x}{4}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \left|\frac{x}{4}\right|$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $|x/4| < 1 \Rightarrow -4 < x < 4$
Divergente cuando $|x| > 4$
y habrá duda cuando $|x| = 4 \Rightarrow x = -4,\ x = 4$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{aligned}&x = -4 \Rightarrow \sum \frac{(-4)^n}{n\,4^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ Convergente}\\&x = 4 \Rightarrow \sum \frac{4^n}{n\,4^n} = \sum \frac{1}{n} \text{ Divergente}\end{aligned}\right\} \Rightarrow IC = \big[-4,\,4\big)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,4^n}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término n que aparece multiplicando en el denominador. Pero si derivamos la serie, dicho término desaparece. En efecto:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{n\,4^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - x/4} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{4-x} = \frac{1}{4-x}$$

de donde,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{4-x} = -\ln|4-x| + C$$

La constante de integración la determinamos igualando $f(0)$ en ambas expresiones:

$$\left.\begin{aligned}&f(0) = \sum 0 = 0\\&f(0) = -\ln 4 + C\end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \ln 4$$

Con lo cual

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,4^n} = -\ln|4-x| + \ln 4 = \ln\frac{4}{4-x}$$

La serie numérica pedida se obtiene de la serie de funciones, para $x = 2$, que pertenece al intervalo de convergencia de la misma. En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\,4^n} = f(2) = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$$

8.17 (Serie funcional). *Estudiar el intervalo de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+2}$, *expresa dicha función en términos de las funciones elementales y, con su ayuda, calcula* $1 + \dfrac{1}{4\cdot 2} + \dfrac{1}{6\cdot 8} + \dfrac{1}{8\cdot 32} + \cdots$.

Solución. Para estudiar la convergencia aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{2n+4} : \frac{x^{2n}}{2n+2}\right| = \left|\frac{x^{2n}x^2(2n+2)}{(2n+4)x^{2n}}\right| = \left|\frac{2n+2}{2n+4}\,x^2\right| \xrightarrow{n\to\infty} x^2$$

Luego la serie será:

Convergente cuando $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$
Divergente cuando $x^2 > 1$
y habrá duda cuando $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La duda se resuelve sustituyendo los valores en la serie:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow \sum \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+2} = \sum \dfrac{1}{2n+2} \text{ Divergente} \\ x = 1 \Rightarrow \sum \dfrac{(1)^{2n}}{2n+2} = \sum \dfrac{1}{2n+2} \text{ Divergente} \end{array}\right\} \Rightarrow IC = \big(-1,\, 1\big)$$

Para sumar la serie lo primero que hacemos es ponerle nombre, llamarle $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+2}$$

y transformamos la expresión hasta convertirla en una serie geométrica. La serie dada no es geométrica debido al término $2n+2$ que aparece en el denominador. Para que dicho término desaparezca al derivar, debemos multiplicar y dividir, previamente por x^2. En efecto:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

llamando $g(x)$ a la nueva serie obtenida, resulta

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

y derivando, tenemos

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)\,x^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$$

de donde,

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{-1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \frac{-1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

La constante de integración la determinamos igualando $g(0)$ en ambas expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = \sum 0 = 0 \\ g(0) = \frac{-1}{2}\ln 1 + C = 0 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Con lo cual

$$g(x) = \frac{-1}{2}\ln|x^2-1|$$

de donde,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+2} = \frac{1}{x^2}\,g(x) = \frac{-1}{2x^2}\ln|x^2-1|$$

La serie numérica pedida se obtiene de la serie de funciones, para $x = 1/2$, que pertenece al intervalo de convergencia de la misma. En consecuencia,

$$1 + \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 32} + \cdots = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{4} + \frac{(1/2)^4}{6} + \frac{(1/2)^6}{8} + \cdots\right) =$$
$$= 2f\big(\frac{1}{2}\big) = 2\frac{-1}{2(1/4)}\ln|\frac{1}{4} - 1| = -4\ln\frac{3}{4} = 4\ln\frac{4}{3}$$

8.18 (Serie de potencias). *La función seno hiperbólico se define como* $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) *Calcula la serie de Taylor de f centrada en $a = 0$, así como su intervalo de convergencia (puede utilizar el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial).*

b) *Suma, si es posible, la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)!}$.

Solución. *a*) El desarrollo de potencias de la función exponencial viene dado por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \;\Rightarrow\; e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

luego,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \cdots + \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) =$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) La serie numérica dada se puede obtener a partir de la serie funcional, obtenida en el apartado anterior, para $x = 1/2$. En efecto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} =$$
$$= 2\operatorname{senh}(1/2) = 2\frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{2} = e^{1/2} - e^{-1/2}$$

8.19 (Serie de potencias). *Calcula el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias y su suma en el intervalo en que sea posible*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$$

Solución. La serie dada puede expresarse de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$$

Luego se trata de una serie geométrica de razón $r = 2x$. En consecuencia, su intervalo de convergencia viene determinado por la razón

$$|2x| < 1 \Rightarrow |x| < 1/2 \Rightarrow -1/2 < x < 1/2 \Rightarrow IC = (-1/2, 1/2)$$

y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = \frac{2x}{1-2x}$$

8.20 (Serie de potencias). *Calcula la suma, indicando el intervalo de convergencia, de la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$.

Solución. La serie dada puede expresarse de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Luego se trata de una serie geométrica de razón $r = x/3$. En consecuencia, su intervalo de convergencia viene determinado por la razón

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow IC = (-3, 3)$$

y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-x/3} = \frac{3}{3-x}$$

8.21 (Serie funcional). *Dada la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)x^n$, *se pide:*

a) Radio de convergencia.

b) Intervalo de convergencia.

c) Suma, si es posible.

Solución. *a) Radio de convergencia.*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+n} = 1$$

b) *Intervalo de convergencia*. Estudiamos la convergencia en los extremos,

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) \text{ divergente}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)(-1)^n \text{ divergente}$$

Luego el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.
c) *Suma*. Tratamos de relacionarla con una serie geométrica, mediante el método de integración-derivación término a término.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)' =$$
$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

8.22 (Serie funcional). *Determina el campo de convergencia y la suma, donde sea posible, de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$$

Solución. Se trata de una serie geométrica de razón $r = x+1$. En consecuencia, su intervalo de convergencia viene determinado por la razón

$$|x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow IC = (-2, 0)$$

y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n = \frac{1}{1-(x+1)} = \frac{1}{-x} = \frac{-1}{x}$$

??. Series de Fourier

8.23 (Serie de Fourier). *Calcular la serie de Fourier*[1] *de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.*

Usar el desarrollo obtenido para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

[1] Ver Ejer. 8.25 en la Pág. 150 y Ejer. 8.29 en la Pág. 157

Ahora bien, la función $f(x) = |x|$ es par, ya que:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

por lo tanto, se trata de una serie de cosenos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = 0$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\, dx$$

hacemos la integral por partes:

$$\int x\cos nx\, dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx\, dx \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x\operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n}dx = \frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

con lo cual:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3\cdots$$

De donde.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = 0$, donde la función es continua. Luego:

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

de donde:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

8.24 (Serie de Fourier). *Desarrolla en serie de Fourier la siguiente función periódica de periodo 2π*

$$f(x) = x \qquad -\pi < x \le \pi$$

Utiliza el resultado para calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Solución. La función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de desarrollabilidad. Además, la función $f(x)$ es impar, luego se trata de una serie de senos, y los coeficientes se pueden calcular por las fórmulas reducidas. La serie será de la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

los coeficientes serán:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx$$

Calculamos la integral por partes

$$\int x \operatorname{sen} nx\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} nx\,dx \end{array}\right\}\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} u \\ v \end{array}}\right] =$$
$$= \frac{-x\,\cos nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n} dx = \frac{-x\,\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Luego

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\,\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\,\cos n\pi}{n} - 0 + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2} - 0\right) =$$
$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier será:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \cdots\right)$$

Esta igualdad tiene lugar para todos los $x \in (-\pi, \pi)$, sin embargo, en los extremos del intervalo la función no es continua y el valor de la serie hay que calcularlo mediante la media aritmética correspondiente, en este caso $S(\pm\pi) = 0$. Fuera del intervalo habrá que tener en cuenta el valor correspondiente debido a la periodicidad.
La serie numérica dada la obtenemos haciendo $x = \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

luego,

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\frac{\pi}{2}}{3} - \cdots\right) = 2\left(1 - 0 - \frac{1}{3} + \cdots\right) =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

y por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{\pi}{4}$$

8.25 (Serie de Fourier). *Desarrollar en serie de Fourier*[2] *la función* $p(x) = |x|$ *definida en* $(-\pi, \pi]$ *y extendida periódicamente. Utilizar ese desarrollo para calcular* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{array} \right.$$

Ahora bien, la función $f(x) = |x|$ es par, ya que:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

por lo tanto se trata de una serie de cosenos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = 0$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

hacemos la integral por partes:

$$\int x \cos nx \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \Bigg\} =$$

$$= \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx = \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

con lo cual:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2} \right] =$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3 \cdots$$

De donde.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right]$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = 0$, donde la función es continua. Luego:

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

[2] Ver Ejer. 8.23 en la Pág. 148 y Ejer. 8.29 en la Pág. 157

de donde:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

8.26 (Serie de Fourier). *Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)=\frac{x}{\pi}$ definida en $(-\pi,\pi]$ y extendida periódicamente. Utiliza ese desarrollo para calcular $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.*

Solución. El desarrollo de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi,\pi]$ se puede escribir como:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo}\quad\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & \text{con}\quad n=0,1,2\cdots\\[2ex] b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx & \text{con}\quad n=1,2,3\cdots\end{cases}$$

Ahora bien, la función $f(x)=x/\pi$ es impar, ya que

$$f(-x)=-x/\pi=-(x/\pi)=-f(x)$$

por lo tanto, se trata de una serie de senos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0=a_n=0,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

de donde,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\operatorname{sen} nx\,dx$$

Hacemos la integral por partes,

$$\int x\operatorname{sen} nx\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\\ dv=\operatorname{sen} nx\,dx\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} du=dx\\ v=\frac{-\cos nx}{n}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-x\cos nx}{n}+\int\frac{\cos nx}{n}\,dx=\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

con lo cual;

$$b_n=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n}+0\right]=\frac{-2\pi\cos n\pi}{\pi^2 n}=$$

$$=\frac{-2\cos n\pi}{\pi n}=\frac{-2(-1)^n}{\pi n}$$

De donde,

$$\frac{x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n \operatorname{sen} n\pi}{\pi n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots \right]$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = \pi/2$, donde la función es continua, luego:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2(\pi/2)}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3(\pi/2)}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4(\pi/2)}{4} \cdots \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[1 - 0 + \frac{-1}{3} - 0 + \cdots \right]$$

de donde,

$$\frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \right] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Con lo que resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

8.27 (Serie de Fourier). *Dada la función, $f(x) = \pi - |x|$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$, determina el desarrollo de Fourier de su extensión periódica y utilízalo para determinar la suma de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad \text{siendo}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

Ahora bien, la función $f(x) = \pi - |x|$ es par, ya que:

$$f(-x) = \pi - |-x| = \pi - |x| = f(x)$$

por lo tanto se trata de una serie de cosenos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = 0$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = 2\pi - \pi = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx$$

hacemos la integral por partes:

$$\int (\pi - x)\cos nx\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \pi - x \\ dv = \cos nx\, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = -dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \bigg\} =$$

$$= \frac{(\pi - x)\operatorname{sen} nx}{n} + \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, dx = \frac{(\pi - x)\operatorname{sen} nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2}$$

con lo cual:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)\ \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 + \frac{\cos 0}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{2(-\cos n\pi + \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2(-(-1)^n + 1)}{\pi n^2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3 \cdots$$

De donde.

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

Nota: También podíamos haber hecho el desarrollo de Fourier de la función $g(x) = |x|$, y hubiéramos obtenido, de una manera más fácil

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

y, a partir de él, obtener el desarrollo de $f(x) = \pi - |x|$, por simple resta. En efecto,

$$\pi - |x| = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = 0$, donde la función es continua. Luego:

$$\pi - |0| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

de donde:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

8.28 (Serie de Fourier). *Utilizando el desarrollo de Fourier de la extensión periódica de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi)$, probar que*

$$e^x = \frac{2 \cdot \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx - \frac{n(-1)^n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx \right) \right], \forall x \in (-\pi, \pi)$$

Además, utilizar la igualdad anterior para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

(*Indicación:* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*;* $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$).

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi)$ se puede escribir como

$$f(x) \approx S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

Al no ser $f(x)$ ni par ni impar, los coeficientes han de calcularse por la forma general

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[e^x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx =$$

Calculamos esta integral por partes (dos veces).

$$\int e^x \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x \, dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n} \int e^x \operatorname{sen} nx dx$$

$$\int e^x \operatorname{sen} nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \operatorname{sen} nx \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{-e^x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int e^x \cos nx dx$$

Con lo cual aparece nuevamente la integral que queríamos calcular. La pasamos al primer miembro y la sumamos con la existente

$$\int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{e^x \cos nx}{n^2} - \frac{1}{n^2} \int e^x \cos nx \, dx$$

Pasando esta integral al primer miembro y operando se tiene

$$\frac{n^2 + 1}{n^2} \int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x (n \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2}$$

luego

$$\int e^x \cos nx\, dx = \frac{e^x(n \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2+1}$$

de donde resulta,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n \operatorname{sen} nx + \cos nx)}{n^2+1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{\pi}(n \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi) - e^{-\pi}(-n \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi)\right] = \\ &= \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen} nx\, dx =$$

Calculamos esta integral por partes (dos veces).

$$\int e^x \operatorname{sen} nx\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^x & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} du = e^x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} nx\, dx & \quad v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array}\right] = -\frac{e^x \cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int e^x \cos nx dx$$

$$\int e^x \cos nx\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^x & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} du = e^x dx \\ dv = \cos nx\, dx & \quad v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array}\right] = \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n}\int e^x \operatorname{sen} nx dx$$

Con lo cual aparece nuevamente la integral que queríamos calcular. La pasamos al primer miembro y la sumamos con la existente

$$\int e^x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{e^x \cos nx}{n} + \frac{e^x \operatorname{sen} nx}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int e^x \operatorname{sen} nx\, dx$$

Pasando esta integral al primer miembro y operando se tiene

$$\frac{n^2+1}{n^2}\int e^x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{e^x(-n \cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2}$$

luego

$$\int e^x \cos nx\, dx = \frac{e^x(-n \cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2+1}$$

de donde resulta,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(-n \cos nx + \operatorname{sen} nx)}{n^2+1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{\pi}(-n \cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi) - e^{-\pi}(-n \cos n\pi - \operatorname{sen} n\pi)\right] = \\ &= \frac{-2n(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes en la serie de Fourier resulta

$$e^x = \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \cos nx + \frac{-2n(-1)^n \operatorname{senh}\pi}{\pi(n^2+1)} \operatorname{sen} nx =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx - \frac{n(-1)^n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx \right) \right]$$

que se cumple $\forall x \in (-\pi, \pi)$.

Para encontrar la serie numérica dada, hacemos $x = \pi$ con lo cual eliminamos todos los senos de la serie de Fourier y al mismo tiempo eliminamos la alternancia de signos de los términos a_n. Pero con esta sustitución hay que tener en cuenta que se realiza en un punto de discontinuidad, luego el valor de la serie se obtiene de la media aritmética de los valores laterales de la función, es decir,

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi$$

de donde

$$\cosh \pi = \frac{2 \cdot \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} (-1)^n - 0 \right) \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n^2} \right) \right]$$

Y despejando la serie pedida resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \operatorname{senh} \pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1 \right)$$

8.29 (Serie de Fourier). *Desarrollar en serie de Fourier*[3] *la función* $p(x) = |x|$ *definida en* $(-\pi, \pi]$ *y extendida periódicamente. Utilizar ese desarrollo para calcular* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Solución. El desarrollo de Fourier de la extensión periódica de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ se puede escribir como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx & \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

Ahora bien, la función $f(x) = |x|$ es par, ya que:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

por lo tanto se trata de una serie de cosenos y los coeficientes pueden calcularse por el método simplificado.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = 0$$

de donde:

[3] Ver Ejer. 8.23 en la Pág. 148 y Ejer. 8.25 en la Pág. 150

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\, dx$$

hacemos la integral por partes:

$$\int x\cos nx\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx\, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{array} \Bigg\} =$$
$$= \frac{x\operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx = \frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

con lo cual:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\ \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right] =$$
$$= \frac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si n es par} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3\cdots$$

De donde.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

La serie numérica pedida se obtiene de la obtenida, para $x = 0$, donde la función es continua. Luego:

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

de donde:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ejercicios propuestos del Capítulo 8

Soluciones en la página 161

A. Relación de ejercicios mínimos

8.1. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\ x^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n \qquad f)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{2^n}$$

8.2. Sumar las siguientes series expresándolas en términos de funciones elementales:

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!} \qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$$

8.3. Probar que las series trigonométricas

$$\sum(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \qquad\qquad \sum\frac{\operatorname{sen} nx}{n\sqrt{n}} \qquad\qquad \sum\frac{1}{n!}(\cos nx-\operatorname{sen} nx)$$

son uniformemente convergentes.

8.4. Calcular las series de Fourier de las siguientes funciones de periodo 2π:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{en} \quad [-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]\\ 1 & \text{en} \quad [-\pi/2,\pi/2]\end{cases} \qquad\qquad g(x)=\frac{x}{\pi} \quad \text{en} \quad [-\pi,\pi]$$

8.5. Desarrollar en serie de Fourier la función de periodo 2π:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\pi x & \text{si} \quad x\in[-\pi,0]\\ \pi x-x^2 & \text{si} \quad x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Aplicar dicho desarrollo para obtener la suma de la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{(2n+1)^3}$$

B. Relación de ejercicios adicionales

Problemas resueltos del Capítulo 8

Problemas propuestos del Capítulo 8

Soluciones en la página 162

8.1.

Soluciones a los ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 7. Series Numéricas

Ejercicios de la sección 7.1. Sumatorio (pág. 3)

7.1.1. *a*) 10 400

Ejercicios de la sección 7.2. Definiciones (pág. 17)

7.2.1. *a*) $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{10}{(n+3)(n+4)}$; *b*) Convergente, $S = 3$.

Ejercicios de la sección 7.3. Criterios ce convergencia (pág. 41)

7.3.1.

Ejercicios de la sección 7.4. Suma de series (pág. 55)

7.4.1.

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 7 (pág. 84)

7.1. *a*) Div. ($a_n \to 1/2$); *b*) Div. (div-con=Div);

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 7 (pág. 85)

7.1. $e^{7/3}$

7.2. 2

Capítulo 8. Series funcionales

Ejercicios de la sección 8.1. Definiciones (pág. 90)

8.1.1.

Ejercicios de la sección 8.2. Series de potencias (pág. 113)

8.2.1.

Ejercicios de la sección 8.3. Series de Fourier (pág. 129)

8.3.1. $f(x) \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

8.3.2. $f(x) \approx \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 8 (pág. 158)

8.1.

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 8 (pág. 159)

8.1.

8.2.

Bibliografía

[1] Larson - Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc Graw Hill, 1992.

[2] Claudio Pita Ruiz, *Calculo Vectorial*, Prentice Hall Hispanoamericana, Mexico, 1994.

[3] Robert G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, S.A. México, 1982.

Índice alfabético