INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO EN 3D

CURSO GA
PROFESOR: ANTONIO HERRERA ESCUDERO
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA, ZONA XALAPA
UNIVERSIDAD VERACRUZANA
MÉXICO

Sabemos que una línea recta puede expresarse analíticamente mediante una ecuación con tres variables (x, y, z), la cual puede tener diversas formas, como son las más comunes:

1. **Forma vectorial**:

$$\overrightarrow{PP_0} := t \cdot \vec{v}$$

donde P representa a cualquier punto (x, y, z) perteneciente a la recta, P_0 es un punto específico (x_0, y_0, z_0) perteneciente a la recta, t es un parámetro cualquiera con valores reales, y $\vec{v} = (a, b, c)$ es un vector en la dirección de la recta (vector director de la recta)

2. **Forma paramétrica**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y_0} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z_0} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{c}$$

con $\vec{v} := (a, b, c)$

3. **Forma cartesiana o rectangular**:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ahora, para el plano, de igual manera lo representamos con una ecuación que puede tomar diversas formas, como lo son las más comunes:

1. **Forma general**:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

siendo $\vec{n} = (A, B, C)$ un vector normal al plano y $\mathbf{D} = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X_0} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y_0} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z_0})$, con $\overrightarrow{\mathbf{P_0}} = (\mathbf{X_0}, \mathbf{Y_0}, \mathbf{Z_0})$ un punto específico perteneciente al plano

2. **Forma paramétrica**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X_0} + \mathbf{r} \cdot \alpha_{\mathbf{x}} + \mathbf{q} \cdot \beta_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y_0} + \mathbf{r} \cdot \alpha_{\mathbf{y}} + \mathbf{q} \cdot \beta_{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z_0} + \mathbf{r} \cdot \alpha_{\mathbf{z}} + \mathbf{q} \cdot \beta_{\mathbf{z}}$$

donde $\vec{\alpha} = (\alpha_{\mathbf{x}}, \alpha_{\mathbf{y}}, \alpha_{\mathbf{z}})$ y $\vec{\beta} = (\beta_{\mathbf{x}}, \beta_{\mathbf{y}}, \beta_{\mathbf{z}})$, siendo r y q dos parámetros cualesquiera

3. **Forma vectorial**:

$$\vec{\mathbf{P}} = \overrightarrow{\mathbf{P_0}} + \mathbf{r} \cdot \vec{\alpha} + \mathbf{q} \cdot \vec{\beta}$$

Con $\vec{\mathbf{P}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un punto cualquiera del plano, $\overrightarrow{\mathbf{P_0}} = (\mathbf{X_0}, \mathbf{Y_0}, \mathbf{Z_0})$ un punto específico del plano, $\vec{\alpha} = (\alpha_{\mathbf{x}}, \alpha_{\mathbf{y}}, \alpha_{\mathbf{z}})$ y $\vec{\beta} = (\beta_{\mathbf{x}}, \beta_{\mathbf{y}}, \beta_{\mathbf{z}})$ dos vectores pertenecientes al plano

Para establecer la forma de encontrar la intersección de una recta con un plano, debemos tener la ecuación de la recta en forma paramétrica y la ecuación del plano en forma general, como sigue:

$$A\cdot x + B\cdot y + Cz + D = 0$$

$$x = x_0 + t\cdot a$$

$$y = y_0 + t\cdot b$$

$$z = z_0 + t\cdot c$$

Ahora bien, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano:

$$A\cdot\left(x_0 + t\cdot a\right) + B\cdot\left(y_0 + t\cdot b\right) + C\cdot\left(z_0 + t\cdot c\right) + D = 0$$

de la que:

$$\left(A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0\right) + t\cdot(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c) = -D$$

$$t\cdot(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c) = -D - \left(A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0\right)$$

$$t = \frac{-D - \left(A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0\right)}{(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c)}$$

$$t = \frac{\left(A\cdot X_0 + B\cdot Y_0 + C\cdot Z_0\right) - \left(A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0\right)}{(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c)}$$

$$t = \frac{\left[A\cdot\left(X_0 - x_0\right) + B\cdot\left(Y_0 - y_0\right) + C\cdot\left(Z_0 - z_0\right)\right]}{(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c)}$$

siendo $\overrightarrow{P_0} = \left(X_0, Y_0, Z_0\right)$ un punto específico perteneciente al plano, $\vec{n} = (A, B, C)$ un vector normal al plano, $\overrightarrow{P_0} = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ un punto específico perteneciente a la recta, y $\vec{v} := (a, b, c)$ un vector director de la recta.

a continuación se sustituye en las ecuaciones paramétricas de la recta al valor obtenido de t , y con ello se tendrá el punto de intersección entre el plano y la recta.