COORDENADAS CILÍNDRICAS

Ejemplo 1:

Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

Solución:

Con las formulas de conversión de cilíndricas a rectangulares obtenemos.

$X = 4 \cos 5\pi / 6 = 4 (-\sqrt{3} / 2) = -2 (\sqrt{3})$.

$Y = 4 \operatorname{sen} 5\pi / 6 = 4 (1/2) = 2$

$Z = 3$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2)(\sqrt{3}, 2, 2)$.

Ejemplo 2:

Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación:

a) $x2 + y2 = 4z2$

b) $y2 = x$

Solución a)

Por la sección procedente sabemos que la grafica de $x2 + y2 = 4z2$ es un cono «de dos hojas» con su eje en el eje z. si sustituimos $x2 + y2$ por $r2$, obtenemos su ecuación en cilíndricas.

$x2 + y2 = 4z2$ ecuación en coordenadas rectangulares.

$r2 = 4z2$ ecuación en coordenadas cilíndricas.

Solución b)

La superficie $y2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z. Sustituyendo $y2$ por $r2 \operatorname{sen}2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, obtenemos:

$y2 = x$ ecuación rectangular.

$r2 \operatorname{sen}2 \theta = r \cos \theta$ sustituir y por sen θ, x por r cos θ.

$r(r \operatorname{sen}2 \theta - \cos \theta) = 0$ agrupar términos y factorizar

$r \operatorname{sen}2 \theta - \cos \theta = 0$ dividir los dos miembros por r

$r = \cos \theta / \operatorname{sen}2 \theta$ despejar r

$r \operatorname{csec} \theta \operatorname{ctan} \theta$ ecuación en cilíndricas.

Nótese que esta ecuación incluye un punto con r = 0, así que no se ha perdido nada al dividir ambos miembros por el factor r.

Ejemplo 3:

Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la grafica determinada por la ecuación en cilíndricas:

$r2 \cos 2\theta + z2 + 1 = 0$

Solución:

$r2 \cos 2\theta + z2 + 1 = 0$ ecuación en cilíndricas

$r2 (\cos2\theta - \mathrm{sen}2\, \theta) + z2 = 0$ identidad trigonométrica.

$r2 \cos2\, \theta - r2\, \mathrm{sen}2\, \theta + z2 = -1$

$X2 - y2 + z2 = -1$ sustituir $r \cos \theta$ por x y $r\, \mathrm{sen}\, \theta$ por y

$Y2 - x2 - z2 = 1$ ecuación rectangular.

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje y.

COORDENADAS ESFERICAS.

Ejemplo 1:

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican.

a).- cono: $x2 + y2 = z2$

b).- esfera: $-4z = 0$

Solución:

a).-haciendo las sustituciones adecuadas para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$x2 + y2 = z2$

$p2\, \mathrm{sen}2\, \Phi \cos2\theta + p2\, \mathrm{sen}2\Phi\, \mathrm{sen}2\theta = p2 \cos2\Phi$

$p2\, \mathrm{sen}2\, \Phi (\cos2\theta + \mathrm{sen}2\theta) = p2 \cos2\Phi$

$p2\, \mathrm{sen}2\, \Phi = p2 \cos2\, \Phi$

$\mathrm{sen}2\, \Phi / \cos2\, \Phi = 1 \quad p > 0$

$\mathrm{tg}2\, \Phi = 1 \quad \Phi = \pi/4$ o $\Phi = 3\pi/4$

La ecuación $\Phi = \pi/4$ representa la mitad superior del cono y la ecuación $\Phi = 3\pi/4$ su mitad inferior.

b).-como $p2 = x2 + y2 + z2$ y $z = p \cos \Phi$, la ecuación dada adopta la siguiente forma en coordenadas esféricas.

$P2 - 4\, p \cos \Phi = 0 \rightarrow p (p - 4 \cos \Phi) = 0$

Descartando por el momento la posibilidad de que $p = 0$, obtenemos la ecuación en esféricas.

$P - 4 \cos \Phi = 0$ o $p = 4\cos \Phi$