ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI

Recibe el nombre de ecuación de Riccati toda ecuación diferencial de la forma:

$$y' = q_1(x) + q_2(x) \cdot y + q_3(x) \cdot y^2 \quad (R1)$$

En general, esta ecuación no se integra en cuadraturas (la búsqueda de la solución no puede reducirse a un número finito de integraciones sucesivas).

Si se conoce una solución particular, $y_1(x)$, entonces, introduciendo una nueva variable z tal que:

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

La ecuación diferencial de Riccati se reduce a una ecuación diferencial lineal puesto que podemos poner:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y'_1 - \frac{z'}{z^2}$$

Y sustituyendo en (R1):

$$y'_1 - \frac{z'}{z^2} = q_1(x) + q_2(x) \cdot \left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + q_3(x) \cdot y \left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2$$

Pero teniendo en cuenta que y_1 es solución de (R1) se verificará:

$$y_1' = q_1(x) + q_2(x) \cdot y_1 + q_3(x) \cdot y_1^2$$

Por lo que sustituyendo y simplificando tendremos:

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{q_2(x)}{z} + \frac{q_3(x)}{z^2} + 2 \cdot \frac{q_3(x) \cdot y_1}{z} = 0 \ ; \ z' + (q_2 + 2 \cdot q_3 \cdot y_1)z + q_3 = 0$$

Que es una ecuación lineal en z.

Integrada esta última ecuación y hallada z, se podrá pasar a y por la equivalencia dada.

Si se conoce otra solución más, y_2, de la ecuación diferencial del Riccati, entonces:

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

Es una solución particular de la ecuación lineal para la variable z, lo cual nos permite simplificar su integración.

Si para la ecuación diferencial de Riccati se conocen tres soluciones particulares y_1, y_2 e y_3, entonces su integral general es:

$$\frac{y - y_{12}}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$$

Resultado que se puede enunciar diciendo que la razón doble de cuatro integrales particulares de la ecuación diferencial de Riccati es constante.