Ecuación diferencial de Clairaut

La **ecuación diferencial de Clairaut**, así llamada en honor a su inventor, el físico francés Alexis-Claude Clairaut, es una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Para resolver la ecuación, diferenciamos respecto a x, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

por tanto

$$0 = \left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

y así:

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ó

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

En el primer caso, $C = dy/dx$ para cualquier constante arbitraria C. Sustituyéndolo en la ecuación de Clairaut, tenemos la familia de ecuaciones dadas por

$$y(x) = Cx + f(C),$$

llamadas *soluciones generales* de la ecuación de Clairaut.

El otro caso,

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

define sólo una solución $y(x)$, llamada *solución singular*, cuyo gráfico es envolvente de las gráficas de las soluciones generales. La solución singular se representa normalmente usando notación paramétrica, como: $(x(p), y(p))$, donde p representa dy/dx.

Ejemplo:

Resolver:

$$xy''' + (y''')^2 = y''.$$

Hacemos

$$y'' = p,$$

por tanto

$$xp' + (p')^2 = p,$$

obteniendo la ecuación de Clairaut, cuya solución es

$$p = y'' = Cx + C^2,$$

de la cual podemos obtener *y* integrando dos veces, así

$$y = \int\int y''\,dxdx = \int\int (Cx+C^2)\,dxdx = \int (\frac{Cx^2}{2}+C^2x+D)\,dx = \frac{Cx^3}{6}+\frac{C^2x^2}{2}+Dx+E,$$

siendo *D* y *E* otras dos constantes cualquiera.

Solución:

$$y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + Dx + E.$$