Ecuación de Clairaut

Suponga que $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real. Si $(c, f(c)) \in D$ la recta tangente a la gráfica de la función en este punto está dada por

$$y - f(c) = f'(x)\,(x - c)$$

Observe que esta ecuación es una familia de curvas uniparamétricas con parámetro c. Entonces podemos encontrar una ecuación diferencial cuya solución general sea esta familia de curvas.
Si $y' = f'(c)$ y $f'(x)$ tiene una inversa $g(x)$ cerca de c, entonces $c = g(y')$ y podemos reescribir la ecuación de la recta tangente como

$$y = xy' + g(y')$$

La cual es la ecuación diferencial buscada. A este tipo de ecuaciones se les conoce como ecuaciones de Clairaut 1.3.

Definición [Ecuación de Clairaut]
Una ecuación diferencial de primer orden $f(x, y, y') = 0$ que puede escribirse en la forma

$$y = xy' + g\,(y')$$

se conoce como ecuación de Clairaut. Donde $g(x)$ es una función continuamente diferenciable.

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular, de la ecuación de Clairaut.

Teorema[Solución de la ecuación de Clairaut]

la ecuación de Clairaut

$$y = xy' + f(y') \tag{1.18}$$

donde $f(x)$ es una función derivable, tiene como solución general $y = cx + f(c)$ y como solución singular

$$\begin{cases} x &= -f'(t) \\ y &= -tf'(t) + f(t) \end{cases}$$

Demostración
Para resolver la ecuación 1.18 hacemos la sustitución $u = y'$ para obtener

$$y = xu + f(u) \tag{1.19}$$

Derivando ambos lados respecto a x

$$y' = xu' + u + f'(u)u'$$

de donde obtenemos que

$$u'\,(x + f'(u)) = 0$$

Surgen dos casos

Caso 1:
Si $u' = 0$, entonces $u = c$ y sustituyendo en la ecuación 1.19 obtenemos la solución general $y = cx + f(c)$.

Observe que la solución general se obtiene simplemente sustituyendo en la ecuación 1.18 y' por c.

Caso 2:

Si $x+f'(u)=0$, entonces $x=-f'(u)$ y sustituyendo en la ecuación 1.19 $y=-uf'(u)+f(u)$, es decir

$$\begin{cases} x &= -f'(u) \\ y &= -tf'(u)+f(u) \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una curva donde u es el parámetro. Observe que esta solución no es un caso particular de la solución general, por lo que se trata de una solución singular.

Ejemplo:
Resuelva la ecuación diferencial

$$y = xy' + 2\sqrt{1+t^2}$$

Solución:

La solución general es la familia de rectas $y = cx \pm 2\sqrt{1+t^2}$ y como $f(t) = 2\sqrt{1+t^2}$ la solución singular está dada por

$$\begin{cases} x &= \frac{-2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Observe que estas son las ecuaciones paramétricas de una círculo de radio 2, $x^2+y^2=4$. En la figura 1.2 se muestra la familia de rectas tangentes $y = cx + 2\sqrt{1+c^2}$ y la envolvente $x^2+y^2=4$.

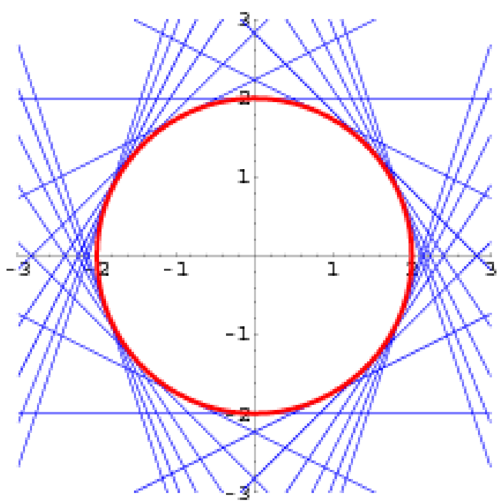

Figura 1.2: Envolvente $x^2+y^2=4$ y rectas tangentes $y = cx \pm 2\sqrt{1+c^2}$.