Ejercicios 1.1

En los problemas 1 a 10, diga si las ecuaciones diferenciales dadas son lineales o no lineales. Indique el orden de cada ecuación:

1. $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$

Solución:

$(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$: ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden.

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4+y=0$

Solución:

$x\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4+y=0$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de tercer orden.

3. $yy'+2y=1+x^2$

Solución:

$yy'+2y=1+x^2$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de primer orden.

4. $x^2dy+(y-xy-xe^x)dx=0$

Solución:

$$x^2dy+(y-xy-xe^x)dx=0 \Leftrightarrow x^2\frac{dy}{dx}+(1-x)y=xe^x :$$

ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden.

5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

Solución:

$x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$: ecuación diferencial lineal ordinaria de cuarto orden.

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$

Solución:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y \Leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y - \operatorname{sen} y = 0$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de segundo ord

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

Solución:

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de segundo orden

8. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}$

Solución:

$\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2} \Leftrightarrow \dfrac{d^2r}{dt^2} + \dfrac{k}{r^2} = 0$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de segundo orden.

9. $(\operatorname{sen} x)y''' - (\cos x)y' = 2$

Solución:

$(\operatorname{sen} x)y''' - (\cos x)y' = 2$: ecuación diferencial lineal ordinaria de tercer orden.

10. $(1 - y^2)dx + xdy = 0$

Solución:

$(1 - y^2)dx + xdy = 0 \Leftrightarrow x\dfrac{dy}{dx} - y^2 = -1$: ecuación diferencial no-lineal ordinaria de primer orden.

En los problemas 11 a 40, verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Donde sea apropiado, c_1 y c_2 son constantes.

11. $2y'+y=0;\ \ y=e^{-x/2}$

Solución:

$$2y'+y=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=e^{-x/2} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y'=-\frac{1}{2}e^{-x/2} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$2\left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)+e^{-x/2}=0 \Leftrightarrow -e^{-x/2}+e^{-x/2}=0.$$

12. $y'+4y=32;\ \ y=8$

Solución:

$$y'+4y=32 \Leftrightarrow y'+4y-32=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=8 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y'=0 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$0+4\times 8-32=0 \Leftrightarrow 32-32=0.$$

13. $\dfrac{dy}{dx}-2y=e^{3x};\ \ y=e^{3x}+10e^{2x}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}-2y-e^{3x}=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=e^{3x}+10e^{2x} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=3e^{3x}+20e^{2x} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$3e^{3x}+20e^{2x}-2\left(e^{3x}+10e^{2x}\right)-e^{3x}=0 \Leftrightarrow 3e^{3x}+20e^{2x}-2e^{3x}-20e^{2x}-e^{3x}=0.$$

14. $\dfrac{dy}{dt}+20y=24;\ \ y=\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{5}e^{-20t}$

Solución:

$$\frac{dy}{dt}+20y=24 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}+20y-24=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=24e^{-20t} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$24e^{-20t}+20\left(\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}\right)-24=0 \Leftrightarrow 24e^{-20t}+24-24e^{-20t}-24=0.$$

15. $y' = 25 + y^2;\ \ y = 5\tan 5x$

Solución:

$$y' = 25 + y^2 \Leftrightarrow y' - y^2 - 25 = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = 5\tan 5x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 25\sec^2 5x \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$25\sec^2 5x - (5\tan 5x)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 25\sec^2 5x - 25\tan^2 5x - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 25(\tan^2 5x + 1) - 25\tan^2 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow 25\tan^2 5x + 25 - 25\tan^2 5x - 25 = 0.$$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{y}{x}};\ \ y = \left(\sqrt{x} + c_1\right)^2,\ x > 0,\ c_1 > 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - \sqrt{\frac{y}{x}} = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + c_1\right)^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\left(\sqrt{x} + c_1\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{x} + c_1\right)^2}{x}} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} - \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{c_1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} - \left(1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

17. $y' + y = \text{sen}\, x;\;\; y = \frac{1}{2}\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$

Solución:

$$y' + y = \text{sen}\, x \Leftrightarrow y' + y - \text{sen}\, x = 0 \quad (♣)$$

$$y = \frac{1}{2}\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen}\, x - 10e^{-x} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$\cancel{\frac{1}{2}\cos x} + \frac{1}{2}\text{sen}\, x - \cancel{10e^{-x}} + \frac{1}{2}\text{sen}\, x - \cancel{\frac{1}{2}\cos x} + \cancel{10e^{-x}} - \text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x - \text{sen}\, x = 0$$

18. $2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0;\;\; x^2y + y^2 = c_1$

Solución:

$$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0 \Leftrightarrow 2xy + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (♣)$$

$$x^2y + y^2 = c_1 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x^2y + y^2) = \frac{dy}{dx}c_1 \Leftrightarrow 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2xy + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 + 2y} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (♣), se obtiene:

$$2xy + (x^2 + 2y)\left(-\frac{2xy}{(x^2 + 2y)}\right) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2xy = 0.$$

19. $x^2dy + 2xydx = 0;\ \ y = -\dfrac{1}{x^2}$

Solución:

$$x^2dy + 2xydx = 0 \Leftrightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = -\frac{1}{x^2} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$x^2 \times \frac{2}{x^3} + 2x\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0.$$

20. $(y')^3 + xy' = y;\ \ y = x + 1$

Solución:

$$(y')^3 + xy' = y \Leftrightarrow (y')^3 + xy' - y = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = x + 1 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 1 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$(1)^3 + x(1) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow 1 + x - x - 1 = 0.$$

21. $y = 2xy' + y(y')^2;\ \ y^2 = c_1\left(x + \dfrac{1}{4}c_1\right)$

Solución:

$$y = 2xy' + y(y')^2 \Leftrightarrow y - 2xy' - y(y')^2 = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y^2 = c_1\left(x + \frac{1}{4}c_1\right) \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{c_1}{2y} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$y - 2x\left(\frac{c_1}{2y}\right) - y\left(\frac{c_1}{2y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y - \frac{c_1x}{y} - \frac{c_1{}^2}{4y} = 0 \Leftrightarrow y - \frac{1}{y} \times c_1\left(x + \frac{c_1}{4}\right) \quad (3)$$

Sustituyendo (1) en (3), se obtiene:

$$y - \frac{1}{y} \times y^2 = 0 \Leftrightarrow y - y = 0.$$

22. $y' = 2\sqrt{|y|};\ \ y = x|x|$

Solución:

$$y' = 2\sqrt{|y|} \Leftrightarrow y' - 2\sqrt{|y|} = 0 \quad (♣)$$

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases} = 2|x| \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (♣), se obtiene:

$$2|x| - 2\sqrt{\big|x|x|\big|} = 0 \Leftrightarrow 2|x| - 2\sqrt{|x^2|} = 0 \Leftrightarrow 2|x| - 2\sqrt{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2|x| - 2|x| = 0.$$

23. $y' - \frac{1}{x}y = 1;\ \ y = x\ln x,\ x > 0$

Solución:

$$y' - \frac{1}{x}y = 1 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} - 1 = 0 \quad (♣)$$

$$y = x\ln x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \ln x + 1 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (♣), se obtiene:

$$\ln x + 1 - \frac{x\ln x}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x - \ln x = 0.$$

24. $\frac{dP}{dt} = P(a - bP);\ \ P = \frac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}}$

Solución:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} - P(a - bP) = 0 \quad (♣)$$

$$P = \frac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = \frac{a^2c_1e^{at}\left(1 + bc_1e^{at}\right) - ac_1e^{at}bc_1e^{at}}{\left(1 + bc_1e^{at}\right)^2} = \frac{a^2c_1e^{at}}{\left(1 + bc_1e^{at}\right)^2} = \frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$\frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} - P\left(a - \frac{abc_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} - P\left(\frac{a + abc_1e^{at} - abc_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} - P\left(\frac{a}{1 + bc_1e^{at}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} - \frac{aP}{1 + bc_1e^{at}} = 0.$$

25. $\frac{dX}{dt}=(2-X)(1-X);\quad \ln\frac{2-X}{1-X}=t$

<u>Solución</u>:

$$\frac{dX}{dt}=(2-X)(1-X)\Leftrightarrow\frac{dX}{dt}-(2-X)(1-X)=0 \quad (\clubsuit)$$

$$\ln\frac{2-X}{1-X}=t,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\ln\frac{2-X}{1-X}\right)=\frac{d}{dt}t\Leftrightarrow\left(\frac{1-X}{2-X}\right)\left(\frac{-(1-X)+(2-X)}{(1-X)^2}\right)\frac{dX}{dt}=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2-X}\right)\left(\frac{1}{(1-X)}\right)\frac{dX}{dt}=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt}=(2-X)(1-X) \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$(2-X)(1-X)-(2-X)(1-X)=0.$$

26. $y'+2xy=1;\ \ y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2}$

<u>Solución</u>:

$$y'+2xy=1\Leftrightarrow y'+2xy-1=0 \quad (\spadesuit)$$

$$y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y'=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+e^{-x^2}\left(e^{x^2}\right)-2xc_1e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+e^{-x^2+x^2}-2xc_1e^{-x^2},$$

$$\Rightarrow \quad y'=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+e^0-2xc_1e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+1-2xc_1e^{-x^2} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\spadesuit$), obtiene:

$$-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+1-2xc_1e^{-x^2}+2x\left(e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt-2xc_1e^{-x^2}+2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+2xc_1e^{-x^2}=0.$$

27. $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0;\ \ c_1(x+y)^2=xe^{y/x}$

Solución:

$$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(x^2-xy)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \{\text{dividiendo cada término por } dx\}$$

$$c_1(x+y)^2=xe^{y/x} \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \quad c_1\frac{d}{dx}(x+y)^2=\frac{d}{dx}xe^{y/x} \Leftrightarrow c_1 2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=e^{y/x}+xe^{y/x}\frac{d}{dx}\left(x^{-1}y\right).$$

$$\Rightarrow \quad 2c_1(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=e^{y/x}+xe^{y/x}\left(-x^{-2}y+x^{-1}\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\Rightarrow \quad 2c_1(x+y)+2c_1(x+y)\frac{dy}{dx}=e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y+e^{y/x}\frac{dy}{dx},$$

$$\Rightarrow \quad 2c_1(x+y)\frac{dy}{dx}-e^{y/x}\frac{dy}{dx}=e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\ -2c_1(x+y),$$

$$\Rightarrow \quad \left(2c_1(x+y)-e^{y/x}\right)\frac{dy}{dx}=e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\ -2c_1(x+y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\ -2c_1(x+y)}{\left(2c_1(x+y)-e^{y/x}\right)} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (♥), se obtiene:

$$x^2+y^2+(x^2-xy)\frac{e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\ -2c_1(x+y)}{\left(2c_1(x+y)-e^{y/x}\right)}=0,$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(x^2-xy)\frac{e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\ -\dfrac{2c_1(x+y)^2}{(x+y)}}{\left(\dfrac{2c_1(x+y)^2}{(x+y)}-e^{y/x}\right)}=0,$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+x(x-y)\frac{\left(e^{y/x}-e^{y/x}x^{-1}y\right)(x+y)\ -2c_1(x+y)^2}{\left(2c_1(x+y)^2-e^{y/x}(x+y)\right)}=0,$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(x-y)\frac{e^{y/x}\left(x-y\right)(x+y)\ -2c_1x(x+y)^2}{\left(2c_1(x+y)^2-e^{y/x}(x+y)\right)}=0,$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(x-y)\frac{e^{y/x}\left(x^2-y^2\right)\ -2c_1x(x+y)^2}{\left(2c_1(x+y)^2-e^{y/x}(x+y)\right)}=0 \qquad (3)$$

De (1) se despeja

$$(x+y)^2=\frac{xe^{y/x}}{c_1} \qquad (4)$$

Al sustituir (4) en (3), se obtiene:

$$x^2+y^2+(x-y)\frac{e^{y/x}\left(x^2-y^2\right)\ -2c_1x\dfrac{xe^{y/x}}{c_1}}{\left(2c_1\dfrac{xe^{y/x}}{c_1}-e^{y/x}(x+y)\right)}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(x-y)\frac{e^{y/x}\left(x^2-y^2\right)\ -2x^2e^{y/x}}{\left(2xe^{y/x}-e^{y/x}(x+y)\right)}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(x-y)\frac{-e^{y/x}\left(x^2+y^2\right)}{e^{y/x}\left(x-y\right)}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)\ =0.$$

28. $y''+y'-12y=0;\ \ y=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}$

Solución:

$$y''+y'-12y=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y'=3c_1e^{3x}-4c_2e^{-4x} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'=9c_1e^{3x}+16c_2e^{-4x} \quad (3)$$

Sustitiuyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$9c_1e^{3x}+16c_2e^{-4x}+3c_1e^{3x}-4c_2e^{-4x}-12\left(c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}\right)=0,$$

$$\Rightarrow \quad 12c_1e^{3x}+12c_2e^{-4x}-12\left(c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}\right)=0 \Leftrightarrow 12\left(c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}\right)-12\left(c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}\right)=0.$$

29. $y''-6y'+13y=0;\ \ y=e^{3x}\cos 2x$

Solución:

$$y''-6y'+13y=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=e^{3x}\cos 2x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y'=3e^{3x}\cos 2x-2e^{3x}\operatorname{sen} 2x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y''=9e^{3x}\cos 2x-6e^{3x}\operatorname{sen} 2x-6e^{3x}\operatorname{sen} 2x-4e^{3x}\cos 2x=5e^{3x}\cos 2x-12e^{3x}\operatorname{sen} 2x \quad (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$5e^{3x}\cos 2x-12e^{3x}\operatorname{sen} 2x-6\left(3e^{3x}\cos 2x-2e^{3x}\operatorname{sen} 2x\right)+13e^{3x}\cos 2x=0,$$

$$\Rightarrow \quad 5e^{3x}\cos 2x-12e^{3x}\operatorname{sen} 2x-18e^{3x}\cos 2x+12e^{3x}\operatorname{sen} 2x+13e^{3x}\cos 2x=0,$$

$$\Rightarrow \quad 18e^{3x}\cos 2x-18e^{3x}\cos 2x+12e^{3x}\operatorname{sen} 2x-12e^{3x}\operatorname{sen} 2x=0.$$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0;\ \ y=e^{2x}+xe^{2x}$

Solución:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0 \quad (\clubsuit)$$

$$y=e^{2x}+xe^{2x} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2e^{2x}+e^{2x}+2xe^{2x}=3e^{2x}+2xe^{2x} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=8e^{2x}+4xe^{2x} \quad (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$8e^{2x}+4xe^{2x}-4\left(3e^{2x}+2xe^{2x}\right)+4\left(e^{2x}+xe^{2x}\right)=0,$$

$$\Rightarrow \quad 8e^{2x}+4xe^{2x}-12e^{2x}-8xe^{2x}+4e^{2x}+4xe^{2x}=0 \Leftrightarrow 12e^{2x}-12e^{2x}+8xe^{2x}-8xe^{2x}=0.$$

31. $y'' = y;\ \ y = \cosh x + \operatorname{senh} x$

Solución:

$$y'' = y \Leftrightarrow y'' - y = 0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \qquad y' = \cosh x + \operatorname{senh} x, \ \Rightarrow \ y'' = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad (2),$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\cosh x + \operatorname{senh} x - (\cosh x + \operatorname{senh} x) = 0.$$

32. $y'' + 25y = 0;\ \ y = c_1 \cos 5x$

Solución:

$$y'' + 25y = 0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y = c_1 \cos 5x \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \qquad y' = -5c_1 \operatorname{sen} 5x, \ \Rightarrow \ y'' = -25c_1 \cos 5x \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$-25c_1 \cos 5x + 25c_1 \cos 5x = 0.$$

33. $y'' + (y')^2 = 0;\ \ y = \ln|x + c_1| + c_2$

Solución:

$$y'' + (y')^2 = 0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y = \ln|x + c_1| + c_2,$$

$$\Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{x + c_1} \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \qquad y'' = -\frac{1}{(x + c_1)^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$-\frac{1}{(x + c_1)^2} + \left(\frac{1}{x + c_1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x + c_1)^2} + \frac{1}{(x + c_1)^2} = 0.$$

34. $y'' + y = \tan x;\;\; y = -\cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|$

Solución:

$$y'' + y = \tan x \Leftrightarrow y'' + y - \tan x = 0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y = -\cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| \qquad (1),$$

$\Rightarrow \qquad y' = \operatorname{sen} x \ln\left|\sec x + \tan x\right| - \cos x \cdot \dfrac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right),$

$\Rightarrow \qquad y' = \operatorname{sen} x \ln\left|\sec x + \tan x\right| - \dfrac{\cos x \sec x(\tan x + \sec x)}{\left(\sec x + \tan x\right)} = \operatorname{sen} x \ln\left|\sec x + \tan x\right| - 1,$

$\Rightarrow \qquad y'' = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \operatorname{sen} x \dfrac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x},$

$\Rightarrow \qquad y'' = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \operatorname{sen} x \dfrac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \operatorname{sen} x \sec x,$

$\Rightarrow \qquad y'' = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$

$\Rightarrow \qquad y'' = \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \tan x \qquad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \tan x - \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right| - \tan x = 0.$$

35. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0;\;\; y = c_1 + c_2 x^{-1},\; x > 0$

Solución:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y = c_1 + c_2 x^{-1},$$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{dy}{dx} = -c_2 x^{-2} \qquad (1),$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 x^{-3} \qquad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$x\left(2c_2 x^{-3}\right) + 2\left(-c_2 x^{-2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2c_2 x^{-2} - 2c_2 x^{-2} = 0.$$

36. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ y = x\cos(\ln x),\ x > 0$

Solución:

$$x^2y'' - xy' + 2y = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = x\cos(\ln x) \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \cos(\ln x) - x\,\mathrm{sen}(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \cos(\ln x) - \mathrm{sen}(\ln x) \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = -\mathrm{sen}(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\mathrm{sen}(\ln x)}{x} - \frac{\cos(\ln x)}{x} \quad (3)$$

Sustitiuyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$x^2\left(-\frac{\mathrm{sen}(\ln x)}{x} - \frac{\cos(\ln x)}{x}\right) - x\left(\cos(\ln x) - \mathrm{sen}(\ln x)\right) + 2\left(x\cos(\ln x)\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad -x\,\mathrm{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad -x\,\mathrm{sen}(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x) - 2x\cos(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0.$$

37. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0;\ y = x^2 + x^2\ln x,\ x > 0$

Solución:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$y = x^2 + x^2\ln x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2x + 2x\ln x + x = 3x + 2x\ln x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = 3 + 2\ln x + 2 = 5 + 2\ln x \quad (3)$$

Sustitiuyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$x^2(5 + 2\ln x) - 3x(3x + 2x\ln x) + 4(x^2 + x^2\ln x) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 + 2x^2\ln x - 9x^2 - 6x^2\ln x + 4x^2 + 4x^2\ln x = 0,$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2 - 9x^2 + 6x^2\ln x - 6x^2\ln x = 0.$$

38. $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0;\ y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$

Solución:

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 0 \quad (♣)$$

$$y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 3c_1 \cos 3x - 3c_2 \operatorname{sen} 3x + 4e^x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = -9c_1 \operatorname{sen} 3x - 9c_2 \cos 3x + 4e^x \quad (3),$$

$$\Rightarrow \quad y''' = -27c_1 \cos 3x + 27c_2 \operatorname{sen} 3x + 4e^x \quad (4)$$

Sustituyendo (1), (2), (3) y (4) en (♣), se obtiene:

$$-27c_1 \cos 3x + 27c_2 \operatorname{sen} 3x + 4e^x - \left(-9c_1 \operatorname{sen} 3x - 9c_2 \cos 3x + 4e^x\right)$$
$$+ 9\left(3c_1 \cos 3x - 3c_2 \operatorname{sen} 3x + 4e^x\right) - 9\left(c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad -27c_1 \cos 3x + 27c_2 \operatorname{sen} 3x + 4e^x + 9c_1 \operatorname{sen} 3x + 9c_2 \cos 3x - 4e^x$$
$$+ 27c_1 \cos 3x - 27c_2 \operatorname{sen} 3x + 36e^x - 9c_1 \operatorname{sen} 3x - 9c_2 \cos 3x - 36e^x = 0,$$

$$\Rightarrow \quad -\cancel{27c_1 \cos 3x} + \cancel{27c_2 \operatorname{sen} 3x} + 4e^x + \cancel{9c_1 \operatorname{sen} 3x} + \cancel{9c_2 \cos 3x} - 4e^x$$
$$+ \cancel{27c_1 \cos 3x} - \cancel{27c_2 \operatorname{sen} 3x} + 36e^x - \cancel{9c_1 \operatorname{sen} 3x} - \cancel{9c_2 \cos 3x} - 36e^x = 0.$$

39. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;\ y = x^2 e^x$

Solución:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad (♣)$$

$$y = x^2 e^x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2xe^x + x^2 e^x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x \quad (3),$$

$$\Rightarrow \quad y''' = 2e^x + 4e^x + 4xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = 6e^x + 6xe^x + x^2 e^x \quad (4)$$

Sustituyendo (1), (2), (3) y (4) en (♣), se obtiene:

$$6e^x + 6xe^x + x^2 e^x - 3\left(2e^x + 4xe^x + x^2 e^x\right) + 3\left(2xe^x + x^2 e^x\right) - x^2 e^x = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{6e^x} + 6xe^x + \cancel{x^2 e^x} - \cancel{6e^x} - 12xe^x - \cancel{3x^2 e^x} + 6xe^x + \cancel{3x^2 e^x} - \cancel{x^2 e^x} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad 12xe^x - 12xe^x = 0.$$

40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=12x^2;\ \ y=c_1x+c_2x\ln x+4x^2,\ \ x>0$

Solución:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=12x^2 \Leftrightarrow x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y-12x^2=0 \qquad (\clubsuit)$$

$$y=c_1x+c_2x\ln x+4x^2 \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=c_1+c_2\ln x+c_2+8x \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c_2}{x}+8 \qquad (3),$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^3y}{dx^2}=-\frac{c_2}{x^2} \qquad (4)$$

Sustituyendo (1), (2), (3) y (4) en $(\clubsuit)$, se obtiene:

$$x^3\left(-\frac{c_2}{x^2}\right)+2x^2\left(\frac{c_2}{x}+8\right)-x(c_1+c_2\ln x+c_2+8x)+c_1x+c_2x\ln x+4x^2-12x^2=0,$$

$$\Rightarrow \qquad -c_2x+2c_2x^2+16x^2-\cancel{c_1x}-\cancel{c_2x\ln x}-c_2x-8x^2+\cancel{c_1x}+\cancel{c_2x\ln x}+4x^2-12x^2=0,$$

$$\Rightarrow \qquad -2c_2x+2c_2x^2+20x^2-20x^2=0.$$

Ejercicios 1.2

En los problemas 1 a 10, determine una región del plano xy para la cual la ecuación diferencial
dada tenga una solución única que pase por un punto (x_0, y_0) en la región.

1. $\dfrac{dy}{dx}=y^{2/3}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=y^{2/3}\\ (x_0,y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y)=y^{2/3}$: f es continua $\forall (x,y)\in\mathbb{R}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{3y^{1/3}}$: $\partial f/\partial y$ es discontinua en $y=0$.

Conclusión: en cualquier semiplano $y>0$ ó $y<0$ existe un intervalo abierto centrado en x_0 en el cual el problema con valor inicial (1) tiene una única solución.

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

<u>Solución</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy} \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \sqrt{xy}$: f es continua si $x \leq 0$ e $y \leq 0$, o bien, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$: $\partial f / \partial y$ es continua en $x \leq 0$ e $y < 0$, o bien, $x \geq 0$ e $y > 0$.

Conclusión: el problema con valor inicial (1) tiene una única solución en

$x \geq 0$ e $y > 0$, o bien, $x \leq 0$ e $y < 0$;

esto es, para cada punto (x_0, y_0) en el primer y tercer cuadrantes del plano cartesiano, existe un intervalo centrado en x_0 en el cual (1) tiene una solución única.

3. $x\dfrac{dy}{dx} = y$

<u>Solución</u>:

$$\left.\begin{array}{l}x\dfrac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \dfrac{y}{x}$: f es continua si $x \neq 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$: $\partial f / \partial y$ es continua en si $x \neq 0$.

Conclusión: para cualquier intervalo, centrado en x_0, existe una solución única para (1) si el punto (x_0, y_0) pertenece al semiplano $x < 0$ ó bien al semiplano $x > 0$.

4. $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

<u>Solución</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} - y = x \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = x + y$: f es continua en la totalidad del plano xy.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$: $\partial f / \partial y$ es continua en la totalidad del plano xy.

Conclusión: para cada punto (x_0, y_0) del plano xy existe una única solución de (1).

5. $(4-y^2)y' = x^2$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}(4-y^2)y' = x^2 \Leftrightarrow y' = \dfrac{x^2}{4-y^2} \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{4-y^2} = \dfrac{x^2}{(2-y)(2+y)}$: f es discontinua en $\{-2,\ 2\}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^2 y}{(4-y^2)^2}$: $\partial f/\partial y$ es discontinua en -2 y en 2.

Conclusión: por cada punto (x_0, y_0) que se encuentre en alguna de las regiones $y < -2$, ó en $y > 2$, ó en $-2 < y < 2$ pasa una solución única del problema con valor inicial (1).

6. $(1+y^3)y' = x^2$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}(1+y^3)y' = x^2 \Leftrightarrow y' = \dfrac{x^2}{1+y^3} \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^3}$: f es discontinua en -1.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{3x^2 y^2}{(1+y^3)^2}$: $\partial f/\partial y$ es discontinua en -1.

Conclusión: por cada punto (x_0, y_0) que se encuentre en alguna de las regiones $y < -1$, ó en $y > -1$ pasa una solución única del problema (1).

7. $(x^2+y^2)y' = y^2$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2)y' = y^2 \Leftrightarrow y' = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$: f es continua en todo el plano, excepto en el punto (0, 0).

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$: $\partial f/\partial y$ continua en todo el plano, excepto en el punto (0, 0).

Conclusión: existe una solución única del problema con valor inicial (1) en cualquier región del plano xy q
no contenga el punto (0, 0).

8. $(y-x)y' = y+x$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}(y-x)y' = y+x \Leftrightarrow y' = \dfrac{y+x}{y-x}\\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \dfrac{y+x}{y-x}$: f es discontinua si $y = x$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{(y-x)^2}$: $\partial f/\partial y$ es discontinua si $y = x$.

Conclusión: existe una solución única del problema con valor inicial (1) cuando el punto (x_0, y_0) está ubic en cualquiera de las regiones (semiplanos) definidas por $y < x$ ó $y > x$. Esto es, por la región por debajo de la recta $y = x$ ó de la región por encima de la recta $y = x$.

9. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 \cos y$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} = x^3 \cos y\\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = x^3 \cos y$: f es continua en todo el plano xy.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^3 \operatorname{sen} y$: $\partial f/\partial y$ es continua en todo el plano xy.

Conclusión: para cada punto (x_0, y_0) del plano xy existe una única solución de (1).

10. $\dfrac{dy}{dx} = (x-1)e^{y/(x-1)}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} = (x-1)e^{y/(x-1)}\\ (x_0, y_0)\end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = (x-1)e^{y/(x-1)}$: f es discontinua en $x = 1$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{y/(x-1)}$: $\partial f/\partial y$ es discontinua en $x = 1$.

Conclusión: para cada punto (x_0, y_0) ubicado en alguno de los semiplanos definidos por $x < 1$ ó $x > 1$ pasa una única solución del problema con valor inicial (1).

En los problemas 11 y 12 determine por inspección al menos dos soluciones del problema dado de valor inicial.

11. $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dos soluciones del problema con valor inicial (1), son $y = 0$ e $y = x^3$.

12. $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} \\ y(0) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dos soluciones del problema con valor inicial (1), son $y = 0$ e $y = x^2$.

En los problemas 13 a 16 determine si el teorema 1.1 (Teorema de existencia y unicidad) garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tiene una solución única que pase por el punto dado.

13. (1, 4).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \sqrt{y^2 - 9} \\ y(1) = 4 \end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \sqrt{y^2 - 9}$: f es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3]$ ó al intervalo $[3,\infty)$ (2)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 9}}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3)$ ó al intervalo $(3,\infty)$ (3)

El punto (1,4) pertenece a la región definida por $y > 3$; por lo que de acuerdo con (2) y (3), el teorema 1.1 garantiza que el problema con valor inicial (1) tiene solución única.

14. (5, 3).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \sqrt{y^2 - 9} \\ y(5) = 3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \sqrt{y^2 - 9}$: f es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3]$ ó al intervalo $[3,\infty)$ (2)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 9}}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3)$ ó al intervalo $(3,\infty)$ (3)

El punto (5,3) no pertenece a ninguna de las regiones definidas por $y < -3$ ó $y > 3$; por lo tanto el teorem no garantiza la existencia de una solución del problema con valor inicial (1).

15. (2,−3).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \sqrt{y^2 - 9} \\ y(2) = -3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \sqrt{y^2 - 9}$: f es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3]$ ó al intervalo $[3,\infty)$ (2)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 9}}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3)$ ó al intervalo $(3,\infty)$ (3)

El punto (2,−3) no pertenece a ninguna de las regiones definidas por $y < -3$ ó $y > 3$; por lo tanto el teorema 1.1 no garantiza la existencia de una solución del problema con valor inicial (1).

16. $(-1,\ 1)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \sqrt{y^2-9} \\ y(-1) = 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

De (1) se deduce que:

$f(x,y) = \sqrt{y^2-9}$: f es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3]$ ó al intervalo $[3,\infty)$ (2)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-9}}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua si y pertenece al intervalo $(-\infty,-3)$ ó al intervalo $(3,\infty)$ (3)

El punto $(-1,\ 1)$ no pertenece a ninguna de las regiones definidas por $y < -3$ ó $y > 3$; por lo tanto el teorema 1.1 no garantiza la existencia de una solución del problema con valor inicial (1).

17. a) Determine por inspección una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = y$. Compruebe que cada miembro de la familia sea una solución del problema de valor inicial $xy' = y,\ \ y(0) = 0$

b) Explique la parte a) determinando la región R del plano xy, para la que la ecuación diferencial xy' tenga solución única que pase por un punto (x_0, y_0) de R.

c) Compruebe que la función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

satisfaga la condición $y(0) = 0$. Determine si la función también es una solución del problema de v inicial en la parte a).

Solución:

$$xy' = y \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \quad (1)$$

a) La solución general de la ecuación diferencial (1), es

$$y = cx \quad (2)$$

b) De (1), se tiene que:

$f(x,y) = \dfrac{y}{x}$: f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

De tal modo que el problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{y}{x} \\ (x_0, y_0) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \text{tiene un solución única que pasa por el punto } (x_0, y_0) \text{ si dicho punto se} \\ \text{halla en uno de los semiplanos definidos por } x < 0 \text{ ó } x > 0. \end{array}\right.$$

Ejercicios 1.3

1. Con base en las hipótesis del modelo de la ecuación $dP/dt = kP$, determine una ecuación diferencial que describa la población, $P(t)$, de un país, cuando se permite una inmigración de tasa constante r.

<u>Solución</u>:

Sea

$P(t)$: población del país en el tiempo t (t en años)

$\dfrac{dP}{dt}$: rapidez de cambio de la población

k : constante de proporcionalidad

r : población que ingresa al país anualmente en forma constante

Bajo la hipótesis de que la razón de cambio de la población en cuakquier instante t es proporcional a la cantidad de población presente en ese instante, la ecuación diferencial asociada a este fenómeno es

$$\frac{dP}{dt} = kP + r.$$

3. Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente a un flujo constante de r g/s. Al mism tiempo, esa medicina desaparece con una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en cualquier mom t. Formule una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.

<u>Solución</u>:

$x(t)$: cantidad de medicina, en g/s, en el torrente sanguíneo en el tiempo t (t en segundos)

r : cantidad constante de medicina que ingresa al torrente sanguíneo del paciente continuamente

$\dfrac{dx}{dt}$: rapidez con la que varía la cantidad de medicina en el torrente sanguíneo del paciente

k : constante de proporcionalidad, $k > 0$

Suponiendo que la cantidad de medicina disminuye proporcionalmente a la cantidad presente en cualquier instante de tiempo t, la ED que describe esta situación es

$$\frac{dx}{dt} = -kx + r.$$

5. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene 300 galones de agua en un inicio, en los que se disolvieron 50 libras de sal. Al tanque entra agua pura con flujo de 3 gal/min y, con el tanque bien agitado, el mismo flujo. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque cuando el tiempo es t.

Sea

$A(t)$: cantidad de sal presente en el tanque en el tiempo t (t en segundos)

$\frac{dA}{at}$: rapidez de cambio de la cantidad de sal en el tanque

R_1: rapidez con que entra la sal en el tanque

R_2: rapidez con que la sal es desalojada del tanque

De tal manera que

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2 \qquad (1)$$

Se tiene que

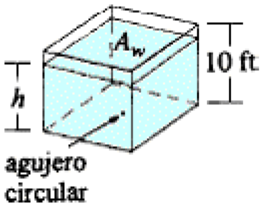
$R_1 = 0$: no está ingresando sal al tanque (entra agua pura) (2)

$$R_2 = (3 \text{ gal/min})\left(\frac{A}{300} \text{ lib/gal}\right) = \frac{A}{300} \text{ lib/min} \qquad (3)$$

Así

$$\frac{dA}{dt} = 0 - \frac{A}{300} \text{ lib/min} \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = -\frac{A}{300} \text{ lib/min}.$$

7. Por un agujero circular de área A_0, en el fondo de un tanque, sale agua. Debido a la fricción y a la contracción de la corriente cerca del agujero, el flujo de agua, por segundo, se reduce a $cA_0\sqrt{2gh}$, donde $0<c<1$. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la altura h del agua en cualquier momento t, que en el tanque cúbico de la fig.1. El radio del agujero es de 2 pulg. y $g=32$ pie/s^2.



(fig.1)

Solución:

Sea

V: volumen del tanque

$$\left.\begin{array}{l} A_w: \text{ base cuadrada del tanque} \\ l=10: \text{ arista del cubo} \end{array}\right\}: \ A_w=100$$

h: altura del agua en el tiempo t

De tal modo que:

$$V=100h \quad (1)$$

Derivando, respecto al tiempo t, ambos miembros de la ecuación (1), se halla la relación entre las razones de cambio del volumen y la altura del tanque:

$$\frac{dV}{dt}=100\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{100}\frac{dV}{dt} \quad (2)$$

Pero

$$\frac{dV}{dt}=cA_0\sqrt{2gh}=c\left(\pi r^2\right)\sqrt{2(32)h}=c\left(\pi(2\text{ pulg})^2\right)\sqrt{64h},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}=c\left(\pi\left(\frac{1}{6}\text{ pie}\right)^2\right)8\sqrt{h}=c\pi\frac{1}{36}\times 8\sqrt{h}=\frac{2}{9}c\pi\sqrt{h} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{100}\times\frac{2}{9}c\pi\sqrt{h} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{c\pi}{450}\sqrt{h}$$

Como la altura está disminuyendo se razón de cambio es negativa. Por lo que:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{c\pi}{450}\sqrt{h}.$$

11. En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algún tema es proporciona cantidad que queda por memorizar. Suponga que M representa la cantidad total de un tema que se debe memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada en un tiempo t cualquiera. Deduzca una ecuación difere para determinar la cantidad $A(t)$.

Con

$A(t)$: cantidad del tema memorizada en el tiempo t.
M: cantidad total del tema que se debe memorizar
$M - A(t)$: cantidad del tema que falta por memorizar
$\frac{dA}{dt}$: rapidez con que se memoriza
$k > 0$: constante de proporcionalidad

De tal modo que:

$$\frac{dA}{dt} = k(M - A).$$

Ejercicios 2.1(a)

Nota: la mayoría de las soluciones de las integrales (o similares) que aparecen en los siguientes ejercicios se encuentran en la página Cálculo integral en el apartado "Técnicas de integración", bien en los ejercicios resueltos de la sección correspondiente o bien en alguna de las misceláneas de ejercicios de ese apartado. En este momento del proceso de aprendizaje de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales es aconsejable que se dedique algún tiempo a repasar los métodos de integración.

En los problemas 1-40, resuelva la ecuación diferencial dada, por separación de variables.

1. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x \Leftrightarrow dy = \operatorname{sen} 5x dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int \operatorname{sen} 5x dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{5}\cos 5x + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

2. $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^2 \Leftrightarrow dy = (x+1)^2 dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int (x+1)^2 dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

3. $dx + e^{3x}dy = 0$

Solución:

$$dx + e^{3x}dy = 0 \Leftrightarrow e^{3x}dy = -dx \Leftrightarrow dy = -e^{-3x}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = -\int e^{-3x}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\},$$

$$\Rightarrow \quad y = -\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + c_1\right) \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c \qquad \{c = -c_1\}.$$

4. $dx - x^2dy = 0$

Solución:

$$dx - x^2dy = 0 \Leftrightarrow x^2dy = dx \Leftrightarrow dy = x^{-2}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int x^{-2}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad y = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

5. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$

Solución:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x + 6 \Leftrightarrow dy = \frac{x+6}{x+1}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int \frac{x+6}{x+1}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int \frac{x+1+5}{x+1}dx = \int\left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{5}{x+1}\right)dx = \int\left(1 + \frac{5}{x+1}\right)dx \qquad \{\text{separando fracciones}\};$$

$$\therefore \quad y = x + 5\ln|x+1| + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

6. $e^x\dfrac{dy}{dx} = 2x$

Solución:

$$e^x\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow dy = 2xe^{-x}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int 2xe^{-x}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad y = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

7. $xy' = 4y$

Solución:

$xy' = 4y \Leftrightarrow x\dfrac{dy}{dx} = 4y \Leftrightarrow y^{-1}dy = 4x^{-1}dx$ {separando variables},

$\Rightarrow \int y^{-1}dy = \int 4x^{-1}dx$ {aplicando la integral en ambos miembros},

$\Rightarrow \ln y = 4\ln x + 4\ln c_1$ {integrando},

$\Rightarrow \ln y = 4(\ln x + \ln c_1) \Leftrightarrow \ln y = 4\ln c_1 x \Leftrightarrow \ln y = \ln(c_1 x)^4 \Leftrightarrow y = (c_1 x)^4 \Leftrightarrow y = c_1{}^4 x^4;$

$\therefore \quad y = cx^4.$

8. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

Solución:

$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -2xy \Leftrightarrow y^{-1}dy = -2xdx$ {separando variables},

$\Rightarrow \int y^{-1}dy = \int -2xdx$ {aplicando la integral en ambos miembros},

$\Rightarrow \ln y = -x^2 + c_1$ {integrando},

$\Rightarrow y = e^{-x^2 + c_1} \Leftrightarrow y = e^{c_1}e^{-x^2};$

$\therefore \quad y = ce^{-x^2}. \quad \{c = e^{c_1}\}.$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

Solución:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2} \Leftrightarrow y^{-3}dy = x^{-2}dx$ {separando variables},

$\Rightarrow \int y^{-3}dy = \int x^{-2}dx$ {aplicando la integral en ambos miembros},

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}y^{-2} = -x^{-1} + c_1$ {integrando},

$\Rightarrow y^{-2} = 2x^{-1} - 2c_1;$

$\therefore \quad y^{-2} = 2x^{-1} + c. \quad \{c = -2c_1\}.$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y+1}dy = \frac{1}{x}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y+1}dy = \int \frac{1}{x}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\},$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c| \qquad \{\text{integrando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y+1| = \ln|cx| \Leftrightarrow y+1 = cx;$$

$$\therefore \quad y = cx - 1.$$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$

Solución:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y^2}{1+x} \Leftrightarrow \frac{1+x}{x^2}dx = y^2dy \Leftrightarrow y^2dy = \frac{1+x}{x^2}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int y^2dy = \int \frac{1+x}{x^2}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int y^2dy = \int (x^{-2} + x^{-1})dx,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 = -x^{-1} + \ln x + c_1 \qquad \{\text{integrando}\},$$

$$\therefore \quad y^3 = -3x^{-1} + 3\ln x + c.$$

12. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2y^2}{y\operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1+2y^2}{y\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x dx = \frac{1+2y^2}{y}dy \Leftrightarrow \left(y^{-1} + 2y\right)dy = \operatorname{sen} x dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(y^{-1} + 2y\right)dy = \int \operatorname{sen} x dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros}\},$$

$$\therefore \quad \ln y + y^2 = -\cos x + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

13. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{3x}e^{2y} \Leftrightarrow e^{-2y}dy = e^{3x}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{-2y}dy = \int e^{3x}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-2y} = \frac{1}{3}e^{3x} + c_1 \Leftrightarrow -3e^{-2y} = 2e^{3x} + 6c_1 \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad -3e^{-2y} = 2e^{3x} + c.$$

14. $e^x y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

Solución:

$$e^x y\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y} \Leftrightarrow e^x y\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(1 + e^{-2x}\right) \Leftrightarrow ye^y dy = e^{-x}\left(1 + e^{-2x}\right)dx,$$

$$\Leftrightarrow \quad ye^y dy = \left(e^{-x} + e^{-3x}\right)dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int ye^y dy = \int\left(e^{-x} + e^{-3x}\right)dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad ye^y - e^y = -e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x} - c \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad e^y - ye^y = e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c.$$

15. $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$

Solución:

$$(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0 \Leftrightarrow y(4 + x^2)dy = x(2 + y^2)dx,$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{2 + y^2}dy = \frac{x}{4 + x^2}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y}{2 + y^2}dy = \int \frac{x}{4 + x^2}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{2 + y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{4 + x^2} \qquad \{\text{transformando adecuadamente}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(2 + y^2) = \frac{1}{2}\ln(4 + x^2) + \frac{1}{2}\ln c \Leftrightarrow \ln(2 + y^2) = \ln c(4 + x^2) \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad 2 + y^2 = c(4 + x^2) \Leftrightarrow y^2 = c(4 + x^2) - 2.$$

16. $(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy = y^2dx$

Solución:

$$(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy = y^2dx \Leftrightarrow (1+x^2+y^2(1+x^2))dy = y^2dx \Leftrightarrow ((1+x^2)+y^2(1+x^2))dy = y^2d$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+x^2)(1+y^2)dy = y^2dx \Leftrightarrow \frac{1+y^2}{y^2}dy = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1+y^2}{y^2}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(y^{-2}+1\right)dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \Leftrightarrow -y^{-1}+y = \tan^{-1}x + c \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad y - y^{-1} = \tan^{-1}x + c.$$

17. $2y(x+1)dy = xdx$

Solución:

$$2y(x+1)dy = xdx \Leftrightarrow 2ydy = \frac{x}{x+1}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int 2ydy = \int \frac{x}{x+1}dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\};$$

$$\therefore \quad y^2 = x - \ln|x+1| + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

18. $x^2y^2dy = (y+1)dx$

Solución:

$$x^2y^2dy = (y+1)dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{y+1}dy = x^{-2}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y^2}{y+1}dy = \int x^{-2}dxdx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy = \int x^{-2}dxdx;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}y^2 - y + \ln|y+1| = -x^{-1} + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

19. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

Solución:

$$y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 \ln x dx = \frac{(y+1)^2}{y} dy \Leftrightarrow \frac{(y+1)^2}{y} dy = x^2 \ln x dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(y+1)^2}{y} dy = \int x^2 \ln x dx \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y^2+2y+1}{y} dy = \int x^2 \ln x dx \Leftrightarrow \int \left(y+2+y^{-1}\right) dy = \int x^2 \ln x dx;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} y^2 + 2y + \ln|y| = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c \qquad \{\text{integrando}\}.$$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{(2y+3)^2} = \frac{dx}{(4x+5)^2} \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(2y+3)^2} = \int \frac{dx}{(4x+5)^2} \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\};$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}(2y+3)^{-1} = -\frac{1}{4}(4x+5)^{-1} - \frac{1}{4}c \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad 2(2y+3)^{-1} = (4x+5)^{-1} + c.$$

21. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

Solución:

$$\frac{dS}{dr} = kS \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = kdr \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dS}{S} = \int kdr \qquad \{\text{aplicando la integral en ambos miembros de la igualdad}\};$$

$$\Rightarrow \quad \ln|S| = kr + c_1 \Leftrightarrow S = e^{kr+c_1} \Leftrightarrow S = e^{c_1} e^{kr} \qquad \{\text{integrando}\};$$

$$\therefore \quad S = ce^{kr}.$$

22. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q-70)$

Solución:

$$\frac{dQ}{dt} = k(Q-70) \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q-70} = kdt \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dQ}{Q-70} = \int kdt \Leftrightarrow \ln(Q-70) = kt + c \qquad \{\text{integrando}\},$$

$$\Rightarrow \quad Q-70 = e^{kt+c} \Leftrightarrow Q = e^{c}e^{kt} + 70;$$

$$\therefore \quad Q = ce^{kt} + 70.$$

23. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

Solución:

$$\frac{dP}{dt} = P - P^2 \Leftrightarrow \frac{dP}{P-P^2} = dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dP}{P-P^2} = \int dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}\right) dt = \int dt,$$

$$\Rightarrow \quad \ln P - \ln(1-P) = t + c,$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{P}{1-P} = t + c,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{1-P} = e^{t+c},$$

$$\frac{1}{P-P^2} = \frac{1}{P(1-P)}$$

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P} \Leftrightarrow 1 \equiv A(1-P) + BP$$

$$\Leftrightarrow 1 \equiv A - AP + BP \Leftrightarrow 1 \equiv A + (B-A)P$$

$A = 1$

$B - A = 0$

$B = 1$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{1-P} = ce^{t} \Leftrightarrow P = (1-P)ce^{t} \Leftrightarrow P = ce^{t} - Pce^{t} \Leftrightarrow P + Pce^{t} = ce^{t} \Leftrightarrow P(1+ce^{t}) = ce^{t};$$

$$\therefore \quad P = \frac{ce^{t}}{1+ce^{t}}.$$

24. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

Solución:

$$\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2} \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = Nte^{t+2} - N \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = N(te^{t+2} - 1) \Leftrightarrow \frac{dN}{N} = (te^{t+2} - 1)dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dN}{N} = \int (te^{t+2} - 1)dt \Leftrightarrow \ln N = \int te^{t+2}dt - t + c \qquad (1)$$

Para calcular la integral en (1), hacemos

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{t+2}dt \quad \Rightarrow \quad v = e^{t+2}$$

De tal modo que

$$\int te^{t+2}dt = te^{t+2} - \int e^{t+2}dt \Leftrightarrow \int te^{t+2}dt = te^{t+2} - e^{t+2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\ln N = te^{t+2} - e^{t+2} - t + c.$$

25. $\sec^2 xdy + \csc ydx = 0$

Solución:

$$\sec^2 xdy + \csc ydx = 0 \Leftrightarrow \sec^2 xdy = -\csc ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{\csc y} = -\frac{dx}{\sec^2 x} \Leftrightarrow \operatorname{sen} ydy = -\cos^2 xdx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen} ydy = -\int \cos^2 xdx \Leftrightarrow -\cos y = -\int \cos^2 xdx \Leftrightarrow \cos y = \int \cos^2 xdx,$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \frac{\cos x \operatorname{sen} x + x}{2} + c \Leftrightarrow 2\cos y = \cos x \operatorname{sen} x + x + c \Leftrightarrow 4\cos y = 2\operatorname{sen} x\cos x + 2x + c;$$

$$\therefore \quad 4\cos y = \operatorname{sen} 2x + 2x + c.$$

26. $\operatorname{sen} 3xdx + 2y\cos^3 3xdy = 0$

Solución:

$$\operatorname{sen} 3xdx + 2y\cos^3 3xdy = 0 \Leftrightarrow 2y\cos^3 3xdy = -\operatorname{sen} 3xdx \Leftrightarrow 2ydy = -\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int 2ydy = \int \frac{-\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}dx \Leftrightarrow y^2 = \int \frac{-\operatorname{sen} 3xdx}{\cos^3 3x} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{3}\int u^{-3}du \quad \left\{u = \cos 3x \Rightarrow \frac{1}{3}du = -\operatorname{sen} 3x\right\},$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = -\frac{1}{6}u^{-2} + c \Leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{6}(\cos 3x)^{-2} + c \Leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{6}\sec^2(3x) + c;$$

$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{c - \frac{1}{6}\sec^2 3x}.$$

27. $e^{y}\operatorname{sen}2xdx+\cos x(e^{2y}-y)dy=0$

Solución:

$$e^{y}\operatorname{sen}2xdx+\cos x(e^{2y}-y)dy=0\Leftrightarrow e^{-y}(e^{2y}-y)dy=-\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos x}dx,$$

$$\Rightarrow\quad (e^{y}-ye^{-y})dy=-\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x}dx\Leftrightarrow(e^{y}-ye^{-y})dy=-2\operatorname{sen}xdx,$$

$$\Rightarrow\quad \int(e^{y}-ye^{-y})dy=-\int 2\operatorname{sen}xdx\Leftrightarrow e^{y}-(-e^{-y}-ye^{-y})=2\cos x+c;$$

$$\therefore\quad e^{y}+e^{-y}+ye^{-y}=2\cos x+c.$$

28. $\sec xdy=x\cot ydx$

Solución:

$$\sec xdy=x\cot ydx\Leftrightarrow\tan ydy=x\cos xdx,$$

$$\Rightarrow\quad \int\tan ydy=\int x\cos xdx\Leftrightarrow\ln(\sec y)=\cos x+x\operatorname{sen}x\Leftrightarrow\sec y=e^{\cos x+x\operatorname{sen}x};$$

$$\therefore\quad y=arc\sec\left(e^{\cos x+x\operatorname{sen}x}\right).$$

29. $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$

Solución:

$$(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0 \Leftrightarrow \frac{e^y}{(e^y+1)^2}dy=-\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{e^y}{(e^y+1)^2}dy=-\int\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx \Leftrightarrow -(e^y+1)^{-1}=\frac{1}{2}(e^x+1)^{-2}+\frac{1}{2}c \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x+1)^{-2}-(e^y+1)^{-1}=\frac{1}{2}c;$$

$\therefore \quad (e^x+1)^{-2}-2(e^y+1)^{-1}=c.$

30. $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}$

Solución:

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2} \Leftrightarrow \frac{y}{(1+y^2)^{1/2}}dy=\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{y}{(1+y^2)^{1/2}}dy=\int\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}dx \Leftrightarrow \int(1+y^2)^{-1/2}2ydy=\int(1+x^2)^{-1/2}2xdx,$$

$$\Rightarrow \quad \int(1+y^2)^{-1/2}2ydy=\int(1+x^2)^{-1/2}2xdx$$

$$\Rightarrow \quad 2(1+y^2)^{1/2}=2(1+x^2)^{1/2}+2c \Leftrightarrow (1+y^2)^{1/2}=(1+x^2)^{1/2}+c;$$

$\therefore \quad (1+y^2)^{1/2}-(1+x^2)^{1/2}=c.$

31. $(y-yx^2)\frac{dy}{dx}=(y+1)^2$

Solución:

$$(y-yx^2)\frac{dy}{dx}=(y+1)^2 \Leftrightarrow y(1-x^2)dy=(y+1)^2dx \Leftrightarrow \frac{y}{(y+1)^2}dy=\frac{1}{(1-x^2)}dx \qquad \{\text{separando variabl}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{y}{(y+1)^2}dy=\int\frac{1}{(1-x^2)}dx \qquad (\spadesuit)$$

Integración del miembro izquierdo de $(\spadesuit)$:

$$\int\frac{y}{(y+1)^2}dy$$

sea

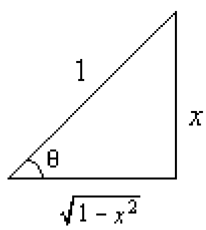
$$u=y+1, \;\Rightarrow\; du=dy; \;\text{ y }\; y=u-1$$

así

$$\int\frac{y}{(y+1)^2}dy=\int\frac{u-1}{u^2}du=\int\frac{1}{u}du-\int u^{2}du=\ln|u|+u^{-1}=\ln|y+1|+(y+1)^{-1} \qquad (1)$$

Integración del miembro derecho de $(\spadesuit)$:

$$\int\frac{1}{(1-x^2)}dx$$



sea

$$x=\operatorname{sen}\theta, \;\Rightarrow\; dx=\cos\theta d\theta$$

así

$$\int \frac{1}{(1-x^2)}dx = \int \frac{\cos\theta d\theta}{(1-\text{sen}^2\theta)} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta+\tan\theta) \quad (2)$$

A partir de la figura de la derecha, se deduce que:

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ y } \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} : \ \sec\theta+\tan\theta = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)}dx = \ln\sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (4)$$

Por último, al sustituir (1) y (4) en (♠) y adicionando una constante de integración, se obtiene la solución implícita:

$$\ln|y+1| + (y+1)^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

32. $2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = \frac{2x}{y}$

Solución:

$$2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \Leftrightarrow 2ydy - dx = 2xdx \Leftrightarrow 2ydy = (2x+1)dx \qquad \{\text{separando variables}\},$$

$$\Rightarrow \qquad \int 2ydy = \int (2x+1)dx \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x + c.$$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8} = \frac{x(y+3)-(y+3)}{x(y-2)+4(y-2)} = \frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)} \Leftrightarrow \frac{y-2}{y+3}dy = \frac{x-1}{x+4}dx,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{y-2}{y+3}dy = \int \frac{x-1}{x+4}dx \Leftrightarrow \int\left(1-\frac{5}{y+3}\right)dy = \int\left(1-\frac{5}{x+4}\right)dx \Leftrightarrow y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + c.$$

2.1(b)

En los problemas 41-48, resuelva las ecuaciones diferenciales dadas sujetas a la condición inicial que se indica.

41. $(e^{-y}+1)\operatorname{sen} x dx=(1+\cos x)dy,\ y(0)=0$

Solución:

$$y(0)=0 \quad (1)$$

$$(e^{-y}+1)\operatorname{sen} x dx=(1+\cos x)dy \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-y}+1}dy=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx \Leftrightarrow \int\frac{1}{e^{-y}+1}dy=\int\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{e^{y}}{e^{y}+1}dy=-\int\frac{-\operatorname{sen} x dx}{1+\cos x} \Leftrightarrow \ln(e^{y}+1)=\ln c-\ln(1+\cos x) \Leftrightarrow \ln(e^{y}+1)=\ln\left[\frac{c}{1+\cos x}\right],$$

$$\Rightarrow \quad e^{y}+1=\frac{c}{1+\cos x} \Leftrightarrow e^{y}=\frac{c}{1+\cos x}-1 \quad (2)$$

Sustituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene:

$$e^{0}=\frac{c}{1+\cos 0}-1 \Leftrightarrow 1=\frac{c}{1+1}-1 \Leftrightarrow 2=\frac{c}{2} \Leftrightarrow c=4 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$$e^{y}=\frac{4}{1+\cos x}-1.$$

42. $(1+x^{4})dy+x(1+4y^{2})dx=0,\ y(1)=0$

Solución:

$$y(1)=0 \quad (1)$$

$$(1+x^{4})dy+x(1+4y^{2})dx=0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+4y^{2})}dy=-\frac{x}{(1+x^{4})}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{1+(2y)^{2}}dy=-\int\frac{x}{1+x^{4}}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan^{-1}2y=\frac{1}{2}\tan^{-1}x^{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}c \Leftrightarrow \tan^{-1}2y=\tan^{-1}x^{2}+\tan^{-1}c,$$

$$\Rightarrow \quad 2y=\tan\left(\tan^{-1}x^{2}+\tan^{-1}c\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{\tan\left(\tan^{-1}x^{2}\right)+\tan\left(\tan^{-1}c\right)}{1-\tan\left(\tan^{-1}x^{2}\right)\times\tan\left(\tan^{-1}c\right)}\right] \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{2}+c}{1-x^{2}\times c}\right];$$

$$\therefore \quad y=\frac{x^{2}+c}{2(1-cx^{2})} \quad (2)$$

Sustituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene:

$$0=\frac{1+c}{2(1-c)} \Leftrightarrow c=-1 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$$y=\frac{x^{2}-c}{2(x^{2}+1)}.$$

43. $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx,\ y(0)=1$

Solución:

$y(0)=1 \quad (1)$

$ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx \Leftrightarrow (y^2+1)^{-1/2}ydy = 4xdx,$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int (y^2+1)^{-1/2}2ydy = \int 4xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 2(y^2+1)^{1/2} = 2x^2+c \Leftrightarrow (y^2+1)^{1/2} = 2x^2+c,$

$\therefore \quad y^2+1 = (2x^2+c)^2 \Leftrightarrow y^2 = (2x^2+c)^2-1 \quad (2)$

Sustituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene:

$1=(c)^2-1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2} \quad (3)$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$y^2 = \left(2x^2 \pm \sqrt{2}\right)^2 - 1.$

44. $\frac{dy}{dt} + ty = y,\ y(1)=3$

Solución:

$y(1)=3 \quad (1)$

$\frac{dy}{dt} + ty = y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y + ty \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y(1+t) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (1+t)dt,$

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (1+t)dt \Leftrightarrow \ln y = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}c \Leftrightarrow 2\ln y = 2t + t^2 + c \Leftrightarrow \ln y^2 = 2t + t^2 + c;$

$\therefore \quad y^2 = e^{2t+t^2+c} \Leftrightarrow y^2 = ce^{2t+t^2} \quad (2)$

Sustituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene:

$9 = ce^{2+1} \Leftrightarrow c = 9e^{-3} \quad (3)$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$y^2 = 9e^{-3}e^{2t+t^2} \Leftrightarrow y^2 = 9e^{t^2+2t-3}.$

2.2(a)

En los problemas 1 a 24 determine si la ecuación dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$

Solución:

$$(2x-1)dx+(3y+7)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=2x-1 \quad \text{y} \quad N(x,y)=3y+7$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2x-1)}{\partial y}=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(3y+7)}{\partial x}=0$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y+7 \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y)=x^2-x+g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y)=3y+7$:

$$g'(y)=3y+7,$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=\frac{3}{2}y^2+7y \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=x^2-x+\frac{3}{2}y^2+7y \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$x^2-x+\frac{3}{2}y^2+7y=c.$$

2. $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$

Solución:

$$(2x+y)dx-(x+6y)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=2x+y \quad \text{y} \quad N(x,y)=-(x+6y)=-x-6y$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(-x-6y)}{\partial x}=-1$$

así

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) no es exacta.

3. $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$

Solución:

$$(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=5x+4y \quad \text{y} \quad N(x,y)=4x-8y^3$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(5x+4y)}{\partial y}=4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(4x-8y^3)}{\partial x}=4$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x+4y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x-8y^3 \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y)=\frac{5}{2}x^2+g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y)=4x-8y^3$:

$$g'(y)=4x-8y^3,$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=4xy-2y^4 \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=\frac{5}{2}x^2+4xy-2y^4 \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$\frac{5}{2}x^2+4xy-2y^4=c.$$

4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0$

Solución:

$$(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y) = \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad N(x,y) = \cos x + x\cos y - y$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)}{\partial y} = \cos y - \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\cos x + x\cos y - y)}{\partial x} = -\operatorname{sen} x + \cos y$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x + x\cos y - y \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y\cos x + g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y + \cos x + g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y) = \cos x + x\cos y - y$:

$$x\cos y + \cos x + g'(y) = \cos x + x\cos y - y \Leftrightarrow g'(y) = -y,$$

$$\Rightarrow \quad g(y) = -\frac{1}{2}y^2 \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y\cos x - \frac{1}{2}y^2 \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$x \operatorname{sen} y + y\cos x - \frac{1}{2}y^2 = c.$$

5. $(2y^2x-3)dx+(2yx^2+4)dy=0$

Solución:

$$(2y^2x-3)dx+(2yx^2+4)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=2y^2x-3 \quad \text{y} \quad N(x,y)=2yx^2+4$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2y^2x-3)}{\partial y}=4xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(2yx^2+4)}{\partial x}=4xy$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2x-3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2yx^2+4 \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y)=y^2x^2-3x+g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2yx^2+g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y)=2yx^2+4$:

$$2yx^2+g'(y)=2yx^2+4 \Leftrightarrow g'(y)=4,$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=4y \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=y^2x^2-3x+4y \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$x^2y^2-3x+4y=c.$$

6. $\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x=0$

Solución:

$$\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x=0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x\right)dx+\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x \quad \text{y} \quad N(x,y)=2y-\frac{1}{x}+\cos 3x$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x\right)}{\partial y}=\frac{1}{x^2}+3\operatorname{sen}3x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-3\operatorname{sen}3x$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) no es exacta.

7. $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$

Solución:

$$(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0 \quad (1)$$

En este caso se tiene

$$M(x,y)=x^2-y^2 \quad \text{y} \quad N(x,y)=x^2-2xy$$

con

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=-2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-2xy)}{\partial x}=2x-2y$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) no es exacta.

En los problemas 25 - 30 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica:

25. $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0;\ \ y(1)=1$

Solución:

$$(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0 \quad (1)$$

$$y(1)=1 \quad (2)$$

La ecuación (1) es de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$; con:

$$M(x,y)=(x+y)^2 \quad \text{y} \quad N(x,y)=2xy+x^2-1$$

por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2(x+y)=2x+2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y+2x$$

esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+x^2-1 \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2+g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2xy+g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y)=2xy+x^2-1$:

$$x^2+2xy+g'(y)=2xy+x^2-1 \Leftrightarrow g'(y)=-1,$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=-y \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-y \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-y=c \quad (7)$$

Ahora, sustiuyendo (2) en (7), se obtiene:

$$\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2(1)+(1)(1)^2-1=c \Leftrightarrow \frac{1}{3}+1+1-1=c \Leftrightarrow c=\frac{4}{3} \quad (8)$$

Por último, al sustituir (8) en (7) se encuentra la solución particular que contiene al par ordenado (1, 1):

$$\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-y=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2-3y=4.$$

26. $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0$; $y(0) = 1$

Solución:

$$(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0 \quad (1)$$

$$y(0) = 1 \quad (2)$$

La ecuación (1) es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con:

$$M(x,y) = e^x + y \quad \text{y} \quad N(x,y) = 2 + x + ye^y$$

por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1\text{; esto es } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + x + ye^y \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y) = e^x + xy + g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y) = 2 + x + ye^y$:

$$x + g'(y) = 2 + x + ye^y \Leftrightarrow g'(y) = 2 + ye^y,$$

$$\Rightarrow \quad g(y) = 2y + ye^y - e^y \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = e^x + xy + 2y + ye^y - e^y \quad \{(6) \text{ en } (4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = c \quad (7)$$

Ahora, sustiuyendo (2) en (7), se obtiene:

$$e^0 + (0)(1) + 2(1) + 1e^1 - e^1 = c \Leftrightarrow c = 2 \quad (8)$$

Por último, al sustituir (8) en (7) se encuentra la solución particular que contiene al par ordenado (0, 1):

$$e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = 2.$$

27. $(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0;\ \ y(-1)=2$

Solución:

$$(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0 \quad (1)$$

$$y(-1)=2 \quad (2)$$

La ecuación (1) es de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$; con:

$$M(x,y)=4y+2x-5 \quad \text{y} \quad N(x,y)=6y+4x-1$$

por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4\,;\ \text{esto es}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4y+2x-5 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=6y+4x-1 \quad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y)=4xy+x^2-5x+g(y) \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x+g'(y) \quad (5)$$

Igualamos a (5) con $N(x,y)=6y+4x-1$:

$$4x+g'(y)=6y+4x-1 \Leftrightarrow g'(y)=6y-1,$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=3y^2-y \quad (6),$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=4xy+x^2-5x+3y^2-y \qquad \{(6)\text{ en }(4)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (1) es:

$$4xy+x^2-5x+3y^2-y=c \quad (7)$$

Ahora, sustiuyendo (2) en (7), se obtiene:

$$4(-1)(2)+(-1)^2-5(-1)+3(2)^2-2=c \Leftrightarrow c=8 \quad (8)$$

Por último, al sustituir (8) en (7) se encuentra la solución particular que contiene al par ordenado $(-1,2)$:

$$4xy+x^2-5x+3y^2-y=8.$$

2.2(b)

En los problemas 31-34 halle el valor de k de modo que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta:

31. $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$

Solución:

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0 \quad (1)$$

Para que (1) se una ecuación diferencial exacta, debe suceder que el miembro izquierdo corresponda a una diferencial exacta; esto es, que exista una función $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y^3 + kxy^4 - 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 3xy^2 + 20x^2y^3$$

Además, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(y^3 + kxy^4 - 2x)}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(3xy^2 + 20x^2y^3)}{\partial x},$$

$$\Rightarrow \qquad 3y^2 + 4kxy^3 = 3y^2 + 40xy^3 \Leftrightarrow 4k = 40 \Leftrightarrow k = 10.$$

32. $(2x - y\,\text{sen}\,xy + ky^4)dx - (20xy^3 + x\,\text{sen}\,xy)dy = 0$

Solución:

$$(2x - y\,\text{sen}\,xy + ky^4)dx - (20xy^3 + x\,\text{sen}\,xy)dy = 0 \quad (1)$$

Para que (1) se una ecuación diferencial exacta, debe suceder que el miembro izquierdo corresponda a una diferencial exacta; esto es, que exista una función $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2x - y\,\text{sen}\,xy + ky^4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = -(20xy^3 + x\,\text{sen}\,xy)$$

Además, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x - y\,\text{sen}\,xy + ky^4)}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-20xy^3 - x\,\text{sen}\,xy)}{\partial x},$$

$$\Rightarrow \qquad -\text{sen}\,xy - xy\cos xy + 4ky^3 = -20y^3 - \text{sen}\,xy - xy\cos xy \Leftrightarrow 4k = -20 \Leftrightarrow k = -5.$$

33. $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - 1)dy = 0$

Solución:

$$(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - 1)dy = 0 \quad (1)$$

Para que (1) se una ecuación diferencial exacta, debe suceder que el miembro izquierdo corresponda a una diferencial exacta; esto es, que exista una función $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2xy^2 + ye^x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2y + ke^x - 1$$

Además, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy^2 + ye^x)}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(2x^2y + ke^x - 1)}{\partial x},$$

$$\Rightarrow \qquad 4xy + e^x = 4xy + ke^x \Leftrightarrow ke^x = ke^x \Leftrightarrow k = 1.$$

35. Obtenga una función $M(x,y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

Solución:

$$M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0 \qquad (1)$$

Se debe cumplir que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

Integrando a (2) respecto a y (x representa una constante), se obtiene:

$$M(x,y) = \frac{1}{x}e^{xy} + \frac{(xy-1)}{x}e^{xy} + y^2 - \frac{1}{x^2}y + g(x) \Leftrightarrow M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{1}{x^2}y + g(x)$$

En los problemas 37-42 resuelva la ecuación diferencial dada verificando que la función $\mu(x,y)$ es un factor de integración:

37. $6xydx+(4y+9x^2)dy=0,\quad \mu(x,y)=y^2$

Solución:

$$6xydx+(4y+9x^2)dy=0 \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$; con

$$M(x,y)=6xy \quad \text{y} \quad N(x,y)=4y+9x^2$$

Con lo que

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=6x$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}=18x$, esto es $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$; de donde se concluye que la (1) no es exac

Sin embargo, al multiplicar la (1) por $\mu(x,y)=y^2$ se obtiene:

$$6xy^3dx+(4y^3+9x^2y^2)dy=0 \qquad (2)$$

Ahora

$$\frac{\partial(6xy^3)}{\partial y}=18xy^2=\frac{\partial(4y^3+9x^2y^3)}{\partial x} \qquad (3)$$

De (3) se comprueba que al multiplicar la (1) por el factor de integración $\mu(x,y)=y^2$ se obt
la ecuación exacta (2). Por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+9x^2y^2 \qquad (4)$$

Integrando la primera ecuación en (4) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene

$$f(x,y)=3x^2y^3+g(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2+g'(y) \qquad (5)$$

Esto es

$9x^2y^2+g'(y)=4y^3+9x^2y^2 \Leftrightarrow g'(y)=4y^3$ {igualando (4) y (5) y reduciendo},

$\Rightarrow \quad g(y)=y^4 \quad (6),$

$\Rightarrow \quad f(x,y)=3x^2y^3+y^4 \quad$ {(6) en (5)}

Por lo tanto, la solución general de la ED (2) y por ende de la (1) es:

$$3x^2y^3+y^4=c.$$

39. $(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x)dx + 2x\cos x\,dy = 0,\quad \mu(x,y) = xy$

<u>Solución</u>:

$$(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x)dx + 2x\cos x\,dy = 0 \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con

$$M(x,y) = -xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x \quad \text{y} \quad N(x,y) = 2x\cos x$$

Con lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos x - 2x\,\mathrm{sen}\,x = -2x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x, \text{ esto es } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x};$$

de donde se concluye que la (1) no es exacta.

Sin embargo, al multiplicar la (1) por $\mu(x,y) = xy$ se obtiene:

$$(-x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x)dx + 2x^2y\cos x\,dy = 0 \qquad (2)$$

Ahora

$$\frac{\partial(-x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x)}{\partial y} = -2x^2y\,\mathrm{sen}\,x + 4xy\cos x = \frac{\partial(2x^2y\cos x\,dy)}{\partial x} \qquad (3)$$

De (3) se comprueba que al multiplicar la (1) por el factor de integración $\mu(x,y) = xy$ se obt: la ecuación exacta (2); por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\cos x \qquad (4)$$

Integrando la segunda ecuación en (4) respecto a y (manteniendo a x constante), se obtiene:

$$f(x,y) = x^2y^2\cos x + g(x) \qquad (5),$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\cos x - x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + g'(x) \qquad (6)$$

Esto es

$$2xy^2\cos x - x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + g'(x) = -x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x \qquad \{\text{igualando (4) y (6)}\},$$

$$\Rightarrow \qquad g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = k \qquad (7),$$

$$\Rightarrow \qquad f(x,y) = x^2y^2\cos x + k \qquad \{(7) \text{ en } (5)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED (2) y por ende de la (1) es:

$$x^2y^2\cos x + k = c_1 \Leftrightarrow x^2y^2\cos x = c_1 - k \Leftrightarrow x^2y^2\cos x = c.$$

Ejercicio 2.3

En los problemas 1 a 40, determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Especifique un intervalo en el cual esté definida la solución general.

<u>Nota</u>: las soluciones, paso a paso, de las integrales (o de formas equivalentes) que surgen en los siguientes ejercicios las pueden hallar en mi página **"Cálculo integral"** en la sección correspondiente.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

<u>Solución</u>:

$$\frac{dy}{dx} = 5y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - 5y = 0 \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = -5$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int -5dx = e^{-5x} \qquad (2)$$

$$e^{-5x}y' - 5e^{-5x}y = 0 \qquad \{\text{multiplicando cada término de (1) por el factor integrante (2)}\} \quad ($$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{-5x}y$, se tien

$$\left(e^{-5x}y\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{-5x}y = c \qquad \{\text{integrando ambos miembros de la ecuación}\};$$

$\therefore \qquad y = ce^{5x} \qquad \{\text{multiplicando cada lado de la ecuación por } e^{5x}\} \qquad (4)$

Los coeficientes de (1) son funciones constantes, esto es, continuas en todo $x \in \mathbb{R}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$y = ce^{5x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x} \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = 1$; de modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int dx = e^{x} \qquad (2)$$

$$e^{x}y' + e^{x}y = e^{4x} \qquad \{\text{multiplicando cada término de (1) por el factor integrante (2)}\} \quad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{x}y$, se tiene

$$\left(e^{x}y\right)' = e^{4x} \Leftrightarrow e^{x}y = \frac{1}{4}e^{4x} + c \qquad \{\text{integrando ambos miembros de la ecuación}\};$$

$\therefore \qquad y = \dfrac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x} \qquad \{\text{multiplicando cada lado de la ecuación por } e^{-x}\} \qquad (4)$

Como, $p(x) = 1$: $dom\, p = \mathbb{R}$ y $g(x) = e^{3x}$: $dom\, g = \mathbb{R}$; los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

8. $y' + 2xy = x^3$

Solución:

$$y' + 2xy = x^3 \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y' + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = 2x$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int 2x\,dx = e^{x^2} \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$e^{x^2}y' + 2xye^{x^2} = x^3e^{x^2} \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{x^2}y$, se tiene

$$\left(e^{x^2}y\right)' = x^3e^{x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2-1\right)+c$$

(integrando ambos miembros de la ecuación);

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)+ce^{-x^2} \qquad \left(\text{multiplicando cada término de la ecuación por } e^{-x^2}\right) \qquad (4)$$

Como, $p(x) = 2x$: $dom p = \mathbb{R}$ y $g(x) = x^3$: $dom g = \mathbb{R}$; los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)+ce^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

11. $(x+4y^2)dy+2ydx=0$

<u>Solución:</u>

$$(x+4y^2)dy+2ydx=0 \Leftrightarrow (x+4y^2)+2y\frac{dx}{dy}=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{1}{2y}x=-2y \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $x'+p(y)x=g(y)$, con $p(y)=\frac{1}{2y}$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(y)=\exp\int\frac{1}{2y}dy=e^{\ln\sqrt{y}}=\sqrt{y} \Leftrightarrow \mu(y)=y^{1/2} \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$y^{1/2}x'+\frac{1}{2y^{1/2}}x=-2y^{3/2} \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $y^{1/2}x$, se tien

$$\left(y^{1/2}x\right)'=-2y^{3/2} \Leftrightarrow y^{1/2}x=-\frac{4}{5}y^{5/2}+c$$

{integrando ambos miembros de la ecuación};

$$\therefore \qquad x=-\frac{4}{5}y^2+cy^{-1/2} \qquad \left(\text{multiplicando cada término de la ecuación por } y^{-1/2}\right) \qquad (4)$$

Como, $p(y)=\frac{1}{2y}$: $dom p=\mathbb{R}-\{0\}$ y $g(y)=-4y^2$: $dom g=\mathbb{R}$; los coeficientes son continuos en todo $x\in\mathbb{R}$ excepto en 0; y de (4), $dom y=(0,\infty)$; se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$x=-\frac{4}{5}y^2+cy^{-1/2}, \quad x\in(0,\infty).$$

13. $xdy = (x\operatorname{sen}x - y)dx$

Solución:

$$xdy = (x\operatorname{sen}x - y)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \operatorname{sen}x \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y' + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = \frac{1}{x}$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int \frac{1}{x}dx = e^{\ln x} = x \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$xy' + y = x\operatorname{sen}x \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto xy, se tiene:

$$(xy)' = x\operatorname{sen}x \Leftrightarrow xy = \operatorname{sen}x - x\cos x + c$$

(integrando ambos miembros de la ecuación);

$$\therefore \quad y = x^{-1}\operatorname{sen}x - \cos x + cx^{-1} \qquad \left(\text{multiplicando cada término de la ecuación por } x^{-1}\right) \qquad (4)$$

Como , $p(x) = \frac{1}{x}$: $dom p = \mathbb{R} - \{0\}$ y $g(x) = \operatorname{sen}x$: $dom g = \mathbb{R}$; los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en 0; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$y = x^{-1}\operatorname{sen}x - \cos x + cx^{-1}, \quad x \in (0, \infty).$$

18. $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2\cos x \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y' + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = \cot x$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int \cot x dx = e^{\ln|\operatorname{sen}x|} = \operatorname{sen}x \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$\operatorname{sen}x\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 2\operatorname{sen}x\cos x \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $y\operatorname{sen}x$, se tie

$$(y\operatorname{sen}x)' = 2\operatorname{sen}x\cos x \Leftrightarrow y\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}^2 x + C$$

(integrando ambos miembros de la ecuación);

$$\therefore \quad y = \operatorname{sen}x + C\csc x \qquad \left(\text{multiplicando cada término de la ecuación por } \csc x\right) \qquad (4)$$

Como, $p(x) = \cot x$: $dom p = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $g(x) = 2\cos x$: $dom g = \mathbb{R}$; los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en los $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y un intervalo de solución es:

$$y = \operatorname{sen}x + C\csc x, \quad x \in (0, \pi).$$

23. $\cos^2 x \operatorname{sen} x dy + (y\cos^3 x - 1)dx = 0$

Solución:

$$\cos^2 x \operatorname{sen} x dy + (y\cos^3 x - 1)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x} y - \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen} x} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + (\cot x) y = \sec^2 x \csc x \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y' + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = \cot x$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp \int \cot x dx = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = \operatorname{sen} x \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$\operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + (\cos x) y = \sec^2 x \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $y \operatorname{sen} x$, se tie

$$(y \operatorname{sen} x)' = \sec^2 x \Leftrightarrow y \operatorname{sen} x = \tan x + C$$

{integrando ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y = \sec x + C\csc x \quad$ (multiplicando cada término de la ecuación por $\csc x$) $\quad (4)$

Como, $p(x) = \cot x$: $dom p = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ y

$g(x) = \sec^2 x \csc x$: $dom g = \mathbb{R} - \left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$;

los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en los $x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; y de (4),

se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y un intervalo de solución es

$$y = \sec x \csc x + C\csc x, \quad x \in (0, \pi/2).$$

29. $ydx-4(x+y^6)dy=0$

Solución:

$$ydx-4(x+y^6)dy=0 \Leftrightarrow y\frac{dx}{dy}-4x-4y^6=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{4}{y}x=4y^5 \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $x'+p(y)x=g(y)$, con $p(y)=-\frac{4}{y}$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(y)=\exp\int -\frac{4}{y}dy=e^{-4\ln y}=y^{-4} \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$y^{-4}\frac{dx}{dy}-4xy^{-3}=4y \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $y^{-4}x$, se tien

$$\left(y^{-4}x\right)'=4y \Leftrightarrow y^{-4}x=2y^2+c \qquad \{\text{integrando ambos miembros de la ecuación}\};$$

$\therefore \qquad x=2y^6+cy^4 \qquad \left\{\text{multiplicando cada término de la ecuación por } y^4\right\} \qquad (4)$

Como, $p(y)=-\frac{4}{y}$: $domp=\mathbb{R}-\{0\}$ y $g(y)=4y^5$: $domg=\mathbb{R}$; los coeficientes son continuos er todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; y de (4),se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y ur intervalo de solución es:

$$x=2y^6+cy^4, \quad y\in(0,\infty).$$

31. $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}} \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y'+p(x)y=g(x)$, con $p(x)=1$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x)=\exp\int dx=e^{x} \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$e^{x}\frac{dy}{dx}+e^{x}y=e^{x}\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)\Leftrightarrow e^{x}\frac{dy}{dx}+e^{x}y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{x}y$, se tiene

$$\left(e^{x}y\right)'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\Leftrightarrow e^{x}y=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+c$$

{integrando ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y=e^{-x}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+ce^{-x} \qquad \left(\text{multiplicando cada término de la ecuación por } e^{-x}\right) \qquad (4$

Como, $p(x)=1$: $dom\,p=\mathbb{R}$ y $g(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$: $dom\,g=\mathbb{R}$;

los coeficientes son continuos en todo $x\in\mathbb{R}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y un intervalo de solución es:

$$y=e^{-x}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+ce^{-x},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

39. $y' = (10 - y)\cosh x$

<u>Solución</u>:

$$y' = (10 - y)\cosh x \Leftrightarrow y' + \cosh x(y) = 10\cosh x \qquad (1)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y' + p(x)y = g(x)$, con $p(x) = \cosh x$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\int \cosh x dx = e^{\operatorname{senh} x} \qquad (2)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (2):

$$e^{\operatorname{senh} x}y' + \cosh x e^{\operatorname{senh} x}y = 10\cosh x e^{\operatorname{senh} x} \qquad (3)$$

Como el miembro izquierdo en (3) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{\operatorname{senh} x}y$, se tiene:

$$\left(e^{\operatorname{senh} x}y\right)' = 10\cosh x e^{\operatorname{senh} x} \Leftrightarrow e^{\operatorname{senh} x}y = 10e^{\operatorname{senh} x} + c$$

{integrando ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \qquad y = 10 + ce^{-\operatorname{senh} x} \qquad \left\{\text{multiplicando cada término de la ecuación por } e^{-\operatorname{senh} x}\right\} \qquad (4)$

Como, $p(x) = \cosh x$: $dom p = \mathbb{R}$ y $g(x) = 10\cosh x$: $dom g = \mathbb{R}$;
los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$; y de (4), se concluye que la solución general de la ecuación diferencial y su intervalo de solución es:

$$y = 10 + ce^{-\operatorname{senh} x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

En los ejercicios 41 a 50 resuelva la ecuación diferencial respectiva, sujeta a la condición inicial indicada:

41. $\dfrac{dy}{dx}+5y=20;\ \ y(0)=2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}+5y=20 \qquad (1)$$
$$y(0)=2 \qquad (2)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y'+p(x)y=g(x)$, con $p(x)=5$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x)=\exp\int 5dx=e^{5x} \qquad (3)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (3):

$$e^{5x}\frac{dy}{dx}+5e^{5x}y=20e^{5x} \qquad (4)$$

Como el miembro izquierdo en (4) es el desarrollo de la derivada del producto $e^{5x}y$, se tien

$$\left(e^{5x}y\right)'=20e^{5x}\Leftrightarrow e^{5x}y=4e^{5x}+c \qquad \{\text{integrando ambos miembros de la ecuación}\};$$

$$\therefore \qquad y=4+ce^{-5x} \qquad \left\{\text{multiplicando cada término de la ecuación por } e^{-5x}\right\} \qquad (5)$$

(5) es la solución general de la ecuación (1). Al sustituir (2) en (5), se obtiene:

$$2=4+ce^{-5(0)}\Leftrightarrow 2=4+ce^{0}\Leftrightarrow c=-2 \qquad (6)$$

Al sustituir (6) en (4), se obtiene la solución del problema con valor inicial dado por (1) y (

$$y=4-2e^{-5x}.$$

45. $y'+(\tan x)y=\cos^2 x;\ \ y(0)=-1$

Solución:

$$y'+(\tan x)y=\cos^2 x \qquad (1)$$
$$y(0)=-1 \qquad (2)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y'+p(x)y=g(x)$, con $p(x)=\tan x$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x)=\exp\int \tan x\,dx=e^{\ln|\sec x|}=\sec x \qquad (3)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (3):

$$(\sec x)y'+(\sec x\tan x)y=\sec x\cos^2 x\Leftrightarrow \sec x\,y'+(\sec x\tan x)y=\cos x \qquad (4)$$

Como el miembro izquierdo en (4) es el desarrollo de la derivada del producto $(\sec x)y$, se tiene:

$$\left((\sec x)y\right)'=\cos x\Leftrightarrow(\sec x)y=\operatorname{sen}x+c \qquad \{\text{integrando ambos miembros de la ecuació}$$

$$\therefore \qquad y=\operatorname{sen}x\cos x+c\cos x \qquad \{\text{multiplicando cada término de la ecuación por } \cos x\} \qquad (5)$$

(5) es la solución general de la ecuación (1). Al sustituir (2) en (5), se obtiene:

$$-1=\operatorname{sen}(0)\cos(0)+c\cos(0)\Leftrightarrow -1=0(1)+c(1)\Leftrightarrow c=-1 \qquad (6)$$

Al sustituir (6) en (5), se obtiene la solución del problema con valor inicial dado por (1) y (

$$y=\operatorname{sen}x\cos x-\cos x.$$

49 $(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=\ln x;\ \ y(1)=10$

Solución:

$$(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y=\frac{\ln x}{x+1} \qquad (1)$$

$$y(1)=10 \qquad (2)$$

La (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden: $y'+p(x)y=g(x)$, con $p(x)=\dfrac{1}{x+1}$; de tal modo que el factor integrante es:

$$\mu(x)=\exp\int\frac{1}{x+1}dx=e^{\ln|x+1|}=x+1 \qquad (3)$$

Multiplicamos cada término de (1) por el factor integrante (3):

$$(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x \qquad (4)$$

Como el miembro izquierdo en (4) es el desarrollo de la derivada del producto $(x+1)y$, se tiene:

$$\left((x+1)y\right)'=\ln x \Leftrightarrow (x+1)y=x\ln x-x+c$$

{integrando ambos miembros de la ecuación};

$$\therefore \qquad y=\frac{x\ln x-x+c}{x+1} \qquad \{\text{dividiendo cada miembro de la ecuación por } (x+1)\} \qquad (5)$$

(5) es la solución general de la ecuación (1). Al sustituir (2) en (5), se obtiene:

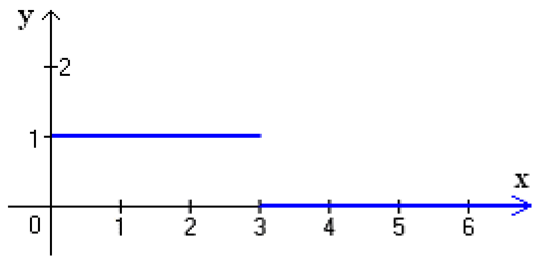
$$10=\frac{(1)\ln(1)-1+c}{1+1} \Leftrightarrow 10=\frac{0-1+c}{2} \Leftrightarrow c=21 \qquad (6)$$

Al sustituir (6) en (5), se obtiene la solución del problema con valor inicial dado por (1) y (

$$y=\frac{x\ln x-x+c}{x+1}.$$

En los problemas 51 a 54, obtenga una solución continua para cada ecuación diferencial de modo que, además, la solución obtenida satisfaga la condición inical dada. Emplee una graficadora para trazar la curva solución:

51. $\dfrac{dy}{dx}+2y=f(x),\ \ f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases};\ \ y(0)=0.$



(Fig.1)

Solución:

$f(x)$ es discontinua en $x=3$ (Fig. 1)

Vamos a resolver el problema en los dos intervalos en que está definida la función:

i) $0\le x\le 3$

$$\frac{dy}{dx}+2y=1:\ \ p(x)=2\Rightarrow \mu(x)=e^{2x},$$

$$\Rightarrow\qquad e^{2x}\frac{dy}{dx}+2e^{2x}y=e^{2x}\Leftrightarrow\left(e^{2x}y\right)'=e^{2x},$$

$$\Rightarrow\qquad e^{2x}y=\frac{1}{2}e^{2x}+c\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}+ce^{-2x}\qquad (1)$$

Sustituyendo $y(0)=0$ en (1), se obtiene:

$$0=\frac{1}{2}e^{0}+ce^{0}\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}\qquad (2)$$

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\qquad \{(2)\text{ en }(1)\}\qquad (3)$$

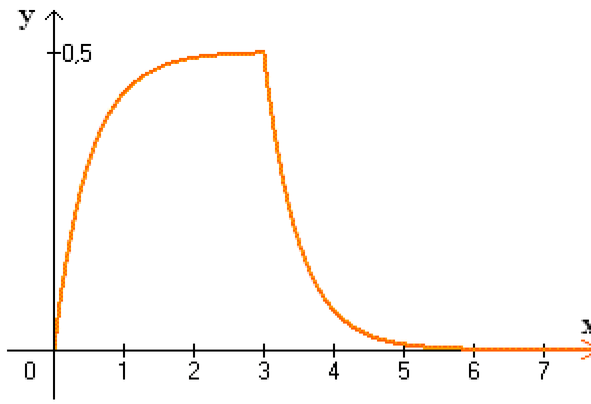
ii) $x>3$

$$\frac{dy}{dx}+2y=0\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=-2dx,$$

$$\Rightarrow\qquad \ln y=-2x+c\Leftrightarrow y=ce^{-2x}\qquad (4)$$

De (i) y (ii) se tiene que la solucíon es:

$$y=\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}, & 0\le x\le 3\\ y=ce^{-2x}, & x>3\end{cases}\qquad (5)$$



(Fig.2)

Ahora, con el objeto de que y sea una función continua se deben cumplir los criterios de continuidad, para lo que:

$$\lim_{x\to 3^+}y(x)=\lim_{x\to 3^-}y(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to 3^+}ce^{-2x}=\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Leftrightarrow ce^{-6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-6},$$

$\Rightarrow\qquad c=\dfrac{1}{2}e^{6}-\dfrac{1}{2}\qquad (6).$ Sustituyendo (6) en (5), se obtiene:

$$y=\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}, & 0\le x\le 3\\ y=\left(\dfrac{1}{2}e^{6}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-2x}, & x>3\end{cases}.$$

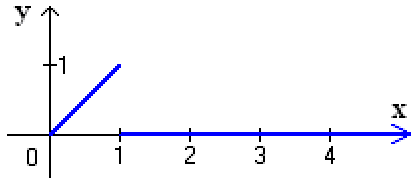
La curva solución se observa en la (Fig.2).

53. $\dfrac{dy}{dx}+2xy=f(x)$, $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x\ge 3 \end{cases}$; $y(0)=2$.

<u>Solución</u>:

$f(x)$ es discontinua en $x=1$ (Fig. 1)

Vamos a resolver el problema en los dos intervalos en que está definida la función:



(Fig. 1)

i) $0\le x<1$

$$\frac{dy}{dx}+2xy=x:\ p(x)=2x\Rightarrow \mu(x)=e^{x^2},$$

$$\Rightarrow\quad e^{x^2}\frac{dy}{dx}+2xe^{x^2}y=xe^{x^2}\Leftrightarrow\left(e^{x^2}y\right)'=xe^{x^2},$$

$$\Rightarrow\quad e^{x^2}y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}+ce^{-x^2}\qquad(1)$$

Sustituyendo $y(0)=2$ en (1), se obtiene:

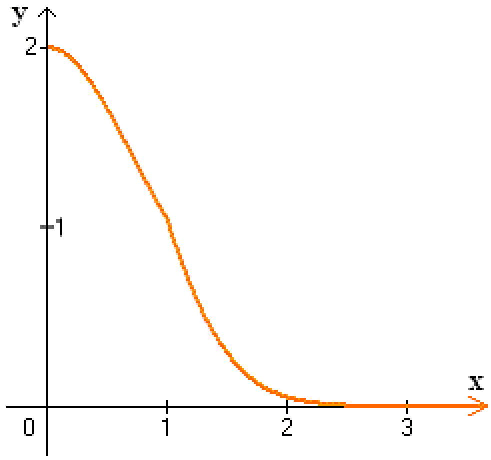
$$2=\frac{1}{2}+ce^{0}\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}\qquad(2)$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-x^2}\qquad\{(2)\text{ en }(1)\}\qquad(3)$$

ii) $x\ge 1$

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=-2xdx,$$

$$\Rightarrow\quad \ln y=-x^2+c\Leftrightarrow y=ce^{-x^2}\qquad(4)$$



(Fig. 2)

De (i) y (ii) se tiene que la solucíon es:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-x^2}, & 0\le x<1\\ ce^{-x^2}, & x\ge 1\end{cases}\qquad(5)$$

Ahora, con el objeto de que y sea una función continua se deben cumplir los criterios de continuidad, para lo que:

$$\lim_{x\to 1^+}y(x)=\lim_{x\to 1^-}y(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}ce^{-x^2}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-x^2}\right)\Leftrightarrow ce^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-1},$$

$\Rightarrow\quad c=\dfrac{1}{2}e+\dfrac{3}{2}\quad(6)$. Sustituyendo (6) en (5), se obtiene:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-x^2}, & 0\le x<1\\ \left(\dfrac{1}{2}e+\dfrac{3}{2}\right)e^{-x^2}, & x\ge 1\end{cases}.$$

La curva solución se observa en la (Fig. 2).

Ejercicios 2.4

En los problemas 1 a 10, determine si la función dada es homogénea. Si lo es, indique su grado de homogeneidad.

1. $x^3+2xy^2-y^4/x$

Solución:

$$f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4/x,$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=(tx)^3+2(tx)(ty)^2-(ty)^4/tx=t^3x^3+2tx(t^2y^2)-t^4y^4/tx=t^3x^3+2t^3xy^2-t^3y^4/x,$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=t^3(x^3+2xy^2-y^4/x);$$

$$\therefore \quad f(tx,ty)=t^3f(x,y):\ f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4/x:\text{ Función homogénea de grado 3.}$$

2. $\sqrt{x+y}(4x+3y)$

Solución:

$$f(x,y)=\sqrt{x+y}(4x+3y),$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\sqrt{tx+ty}\,(4(tx)+3(ty))=t^{1/2}\sqrt{x+y}\cdot t(4x+3y),$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=t^{3/2}\sqrt{x+y}\,(4x+3y);$$

$$\therefore \quad f(tx,ty)=t^{3/2}f(x,y):\ f(x,y)=\sqrt{x+y}(4x+3y):\text{ Función homogénea de grado 3/2.}$$

3. $\dfrac{x^3y-x^2y^2}{(x+8y)^2}$

Solución:

$$f(x,y)=\frac{x^3y-x^2y^2}{(x+8y)^2},$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\frac{(tx)^3ty-(tx)^2(ty)^2}{(tx+8ty)^2}=\frac{t^4x^3y-t^4x^2y^2}{t^2(x+8y)^2}=\frac{t^4(x^3y-x^2y^2)}{t^2(x+8y)^2}=\frac{t^2(x^3y-x^2y^2)}{(x+8y)^2};$$

$$\therefore \quad f(tx,ty)=t^2f(x,y):\ f(x,y)=\frac{x^3y-x^2y^2}{(x+8y)^2}:\text{ Función homogénea de grado 2.}$$

4. $\dfrac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$

Solución:

$$f(x,y)=\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}},$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\frac{tx}{(ty)^2+\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}}=\frac{tx}{t^2y^2+\sqrt{t^4x^4+t^4y^4}}=\frac{tx}{t^2y^2+\sqrt{t^4(x^4+y^4)}}=\frac{tx}{t^2y^2+t^2\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\frac{tx}{t^2\left(y^2+\sqrt{x^4+y^4}\right)}=\frac{x}{t\left(y^2+\sqrt{x^4+y^4}\right)}=t^{-1}\frac{x}{\left(y^2+\sqrt{x^4+y^4}\right)};$$

$$\therefore \quad f(tx,ty)=t^{-1}f(x,y):\ f(x,y)=\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}:\text{ Función homogénea de grado }-1.$$

5. $\cos\dfrac{x^2}{x+y}$

Solución:

$$f(x,y)=\cos\frac{x^2}{x+y},$$

$$\Rightarrow\quad f(tx,ty)=\cos\frac{(tx)^2}{tx+ty}=\cos\frac{t^2x^2}{t(x+y)}=\cos\frac{tx^2}{x+y}\neq t\cos\frac{x^2}{x+y};$$

$$\therefore\quad f(x,y)=\cos\frac{x^2}{x+y}:\ \text{Función no homogénea.}$$

6. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{x+y}$

Solución:

$$f(x,y)=\operatorname{sen}\frac{x}{x+y},$$

$$\Rightarrow\quad f(tx,ty)=\operatorname{sen}\frac{tx}{tx+ty}=\operatorname{sen}\frac{tx}{t(x+y)}=\operatorname{sen}\frac{x}{x+y}=1\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{x+y}=t^0\operatorname{sen}\frac{x}{x+y};$$

$$\therefore\quad f(x,y)=t^0f(x,y):\ \text{Función homogénea de grado 0.}$$

7. $\ln x^2-2\ln y$

Solución:

$$f(x,y)=\ln x^2-2\ln y,$$

$$\Rightarrow\quad f(tx,ty)=\ln(tx)^2-2\ln(ty)=2\ln(tx)-2\ln(ty)=2(\ln(tx)-\ln(ty))=2(\ln t+\ln x-\ln t-\ln y),$$

$$\Rightarrow\quad f(tx,ty)=2(\ln x-\ln y)=1(2\ln x-2\ln y)=t^0(\ln x^2-2\ln y);$$

$$\therefore\quad f(x,y)=t^0f(x,y):\ \text{Función homogénea de grado 0.}$$

8. $\dfrac{\ln x^3}{\ln y^3}$

Solución:

$$f(x,y)=\frac{\ln x^3}{\ln y^3}=\frac{3\ln x}{3\ln y}=\frac{\ln x}{\ln y},$$

$$\Rightarrow\quad f(tx,ty)=\frac{\ln(tx)}{\ln(ty)}=\frac{\ln t+\ln x}{\ln t+\ln y}\cdots;$$

$$\therefore\quad f(x,y)=\frac{\ln x^3}{\ln y^3}:\ \text{Función no homogénea.}$$

9. $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^2$

Solución:

$$f(x,y)=\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\left((tx)^{-1}+(ty)^{-1}\right)^2=\left(t^{-1}x^{-1}+t^{-1}y^{-1}\right)^2=\left(t^{-1}(x^{-1}+y^{-1})\right)^2=t^{-2}(x^{-1}+y^{-1})^2,$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y);$$

$\therefore \quad f(x,y)=\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^2$: Función homogénea de grado -2.

10. $\left(x+y+1\right)^2$

Solución:

$$f(x,y)=\left(x+y+1\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad f(tx,ty)=\left(tx+ty+1\right)^2\neq t^2\left(x+y+1\right)^2;$$

$\therefore \quad f(x,y)=\left(x+y+1\right)^2$: Función no homogénea.

En los problemas 11 a 30, resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución apropiada:

11. $(x-y)dx+xdy=0$

Solución:

$(x-y)dx+xdy=0$: ecuación diferencial homogénea de grado uno,

$$\Rightarrow \quad (x-y)+x\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1 \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} &v=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=vx,\\ \Rightarrow \quad &\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=v-1 \qquad \{(2)\text{ en }(1)\},$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=-1\Leftrightarrow dv=-\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\int dv=-\int\frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad v=-\ln x+c \quad (3),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}=-\ln x+c \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de }(2)\text{ en }(3)\},$$

$\therefore \quad y=-x\ln x+cx.$

12. $(x+y)dx+xdy=0$

Solución:

$(x+y)dx+xdy=0$: ecuación diferencial homogénea de grado uno,

$$\Rightarrow \quad (x+y)+x\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}+1\right) \quad (1)$$

Sea

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} v=\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y=vx, \\ \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=-(v+1) \Leftrightarrow v+x\frac{dv}{dx}=-v-1 \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=-(2v+1) \qquad \{\text{sustituyendo (2) en (1)}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{2v+1}=-\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2dv}{2v+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|2v+1|=-\ln|x|-\ln c \Leftrightarrow \ln|2v+1|=-2\ln|x|+\ln c \Leftrightarrow \ln|2v+1|=-\ln x^2+\ln c \Leftrightarrow \ln|2v+1|=\ln\left|\frac{c}{x^2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad 2v+1=\frac{c}{x^2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{y}{x}+1=\frac{c}{x^2} \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de (2) en (3)}\},$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{y}{x}=\frac{c}{x^2}-1 \Leftrightarrow y=\frac{c}{2x}-\frac{1}{2}x;$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{2}\left(cx^{-1}-x\right).$$

13. $xdx+(y-2x)dy=0$

Solución:

$xdx+(y-2x)dy=0$: ecuación diferencial homogénea de grado uno,

$$\Rightarrow \quad x+(y-2x)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y-2x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2x-y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2-\frac{y}{x}} \qquad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} v=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=vx, \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2-v} \qquad \{\text{sustituyendo } (2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2-v}-v \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v(2-v)}{2-v} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-2v+1}{2-v} \Leftrightarrow \frac{2-v}{v^2-2v+1}dv=\frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{2-v}{v^2-2v+1}dv=\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{2v-2-2}{v^2-2v+1}dv=\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{2v-2}{v^2-2v+1}dv+\int\frac{1}{(v-1)^2}dv=\int\frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|v^2-2v+1\right|-\frac{1}{v-1}=\ln|x|+c \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln(v-1)^2-\frac{1}{v-1}=\ln|x|+c \Leftrightarrow -\ln|v-1|-\frac{1}{v-1}=\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|-\frac{1}{\frac{y}{x}-1}=\ln|x|+c \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de } (2) \text{ en } (3)\},$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|-\frac{1}{\frac{y-x}{x}}=\ln|x|+c \Leftrightarrow -\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|-\ln x=\frac{x}{y-x}+c \Leftrightarrow -\ln|y-x|+\ln|x|-\ln|x|=\frac{x}{y-x}+c,$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|y-x|=\frac{x}{y-x}+c \Leftrightarrow -(y-x)\ln|y-x|=x+(y-x)c;$$

$$\therefore \quad (x-y)\ln|x-y|=x+c(x-y).$$

14. $ydx = 2(x+y)dy$

Solución:

$ydx = 2(x+y)dy$: ecuación diferencial homogénea de grado uno,

$$\Rightarrow \quad y = 2(x+y)\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(x+y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{2\left(1+\frac{y}{x}\right)} \quad (1)$$

Sea

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx, \\ \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2(1+v)} \qquad \{\text{sustituyendo } (2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2+2v} - v \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v-2v-2v^2}{2+2v} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v-2v^2}{2+2v} \Leftrightarrow \frac{2+2v}{-v-2v^2}dv = \frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2+2v}{-v-2v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{4+4v}{v+2v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1+4v+3}{v+2v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{1+4v}{v+2v^2}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v+2v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|v+2v^2\right| - \frac{3}{2}\ln|v| + \frac{3}{2}\ln|1+2v| = \ln|x| + \ln c,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|v(1+2v)| - \frac{3}{2}\ln|v| + \frac{3}{2}\ln|1+2v| = \ln|x| + \ln c,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|v| - \frac{1}{2}\ln|1+2v| - \frac{3}{2}\ln|v| + \frac{3}{2}\ln|1+2v| = \ln|x| + \ln c \Leftrightarrow -2\ln|v| + \ln|1+2v| = \ln|x| + \ln c,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{1+2v}{v^2}\right| = \ln|cx| \Leftrightarrow \frac{1+2v}{v^2} = cx \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+2\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de } (2) \text{ en } (3)\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{2y+x}{x}}{\frac{y^2}{x^2}} = cx \Leftrightarrow \frac{(2y+x)x}{y^2} = cx;$$

$$\therefore \quad \frac{2y+x}{y^2} = c.$$

15. $(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$

<u>Solución:</u>

$(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$: ecuación diferencial homogénea de grado dos,

$$\Rightarrow \quad y^2 + yx - x^2\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v^2 + v \qquad \{\text{sustituyendo } (2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v^2 \Leftrightarrow v^{-2}dv = x^{-1}dx \Leftrightarrow \int v^{-2}dv = \int x^{-1}dx \Leftrightarrow -v^{-1} = \ln|x| + c \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = \ln|x| + c \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de } (2) \text{ en } (3)\},$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Leftrightarrow -x = \left(\ln|x| + c\right)y,$$

$$\therefore \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + c}.$$

16. $(y^2+yx)dx+x^2dy=0$

<u>Solución:</u>

$(y^2+yx)dx+x^2dy=0$: ecuación diferencial homogénea de grado dos,

$$\Rightarrow \quad y^2+yx+x^2\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+yx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x} \qquad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=vx, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=-v^2-v \qquad \{\text{sustituyendo (2) en (1)}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2+2v}=-\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v(v+2)}=-\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int\left[\frac{1}{2v}-\frac{1}{2(v+2)}\right]dv=-\int\frac{1}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|v|-\frac{1}{2}\ln|v+2|=-\ln|x|-\ln c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|v+2|-\frac{1}{2}\ln|v|=\ln|x|+\ln c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v+2}{v}\right|=\ln|cx|,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{v+2}{v}\right|=2\ln|cx| \Leftrightarrow \ln\left|\frac{v+2}{v}\right|=\ln(cx)^2 \Leftrightarrow \frac{v+2}{v}=(cx)^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{y}{x}+2}{\frac{y}{x}}=(cx)^2 \qquad \{\text{sustituyendo el valor correspondiente de (2) en (3)}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{y}{x}+2}{\frac{y}{x}}=(cx)^2 \Leftrightarrow \frac{\frac{2x+y}{x}}{\frac{y}{x}}=(cx)^2;$$

$$\therefore \quad \frac{2x+y}{y}=(cx)^2.$$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=vx, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1}-v \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1-v^2-v}{v+1} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2+1}{v+1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(v+1)dv}{v^2+1}=-\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{vdv}{v^2+1}+\frac{dv}{v^2+1}=-\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\frac{vdv}{v^2+1}+\int\frac{dv}{v^2+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int\frac{2vdv}{v^2+1}+\int\frac{dv}{v^2+1}=-\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(v^2+1)+\tan^{-1}v=-\ln x+c_1,$$

$$\Rightarrow \quad \ln(v^2+1)+2\tan^{-1}v+2\ln x=c_1 \quad (3)$$

Sustituyendo $v=\dfrac{y}{x}$ en (3), se obtiene:

$$\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}+2\ln x=2c_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)+\ln x^2+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=c,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x^2(y^2+x^2)}{x^2}\right)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=c \Leftrightarrow \ln\left(x^2+y^2\right)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=c.$$

19. $-ydx+\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=0$

Solución:

$$-ydx+\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=0: \text{ ecuación diferencial homogénea de grado uno} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} &y=ux,\\ \Rightarrow\quad &dy=udx+xdu \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$-uxdx+\left(x+\sqrt{xux}\right)(udx+xdu)=0 \Leftrightarrow -uxdx+\left(x+\sqrt{ux^2}\right)(udx+xdu)=0,$$

$$\Rightarrow\quad -uxdx+\left(x+x\sqrt{u}\right)(udx+xdu)=0 \Leftrightarrow -uxdx+x\left(1+\sqrt{u}\right)(udx+xdu)=0,$$

$$\Rightarrow\quad -udx+\left(1+\sqrt{u}\right)(udx+xdu)=0 \Leftrightarrow -udx+\left(u+u\sqrt{u}\right)dx+x\left(1+\sqrt{u}\right)du=0,$$

$$\Rightarrow\quad \left(-u+u+u\sqrt{u}\right)dx+x\left(1+\sqrt{u}\right)du=0 \Leftrightarrow u^{3/2}dx+x\left(1+u^{1/2}\right)du=0,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}+\frac{1+u^{1/2}}{u^{3/2}}du=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{u^{3/2}}+\frac{u^{1/2}}{u^{3/2}}\right)du=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x}+\left(u^{-3/2}+\frac{1}{u}\right)du=0,$$

$$\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x}+\int\left(u^{-3/2}+\frac{1}{u}\right)du=0 \Leftrightarrow \ln|x|-2u^{-1/2}+\ln|u|=c \Leftrightarrow \ln|ux|=2u^{-1/2}+c \quad (3)$$

De (2) se deduce que $u=\dfrac{y}{x}$ (4)

Sustiuyendo (4) en (3), se obtiene:

$$\ln\left|\frac{y}{x}x\right|=2\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/2}+c \Leftrightarrow \ln|y|=2\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}+c \Leftrightarrow \ln|y|=2\sqrt{\frac{x}{y}}+c.$$

21. $2x^2ydx=\left(3x^3+y^3\right)dy$

Solución:

$$2x^2ydx=\left(3x^3+y^3\right)dy: \text{ ecuación diferencial homogénea de grado tres} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} &y=ux,\\ \Rightarrow\quad &dy=udx+xdu \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$2x^2uxdx = \left(3x^3 + (ux)^3\right)(udx + xdu) \Leftrightarrow 2x^3ux = \left(3x^3 + u^3x^3\right)(udx + xdu),$$

$$\Rightarrow \quad 2x^3udx = x^3\left(3 + u^3\right)(udx + xdu) \Leftrightarrow 2udx = \left(3 + u^3\right)(udx + xdu),$$

$$\Rightarrow \quad 2udx = \left(3u + u\right)dx + x\left(3 + u^3\right)du \Leftrightarrow 2udx - \left(3u + u^4\right)dx = x\left(3 + u^3\right)du,$$

$$\Rightarrow \quad \left(2u - \left(3v + u^4\right)\right)dx = x\left(3 + u^3\right)du \Leftrightarrow \left(2u - 3u - u^4\right)dx = x\left(3 + u^3\right)du,$$

$$\Rightarrow \quad -\left(u + u^4\right)dx = x\left(3 + u^3\right)du \Leftrightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{3 + u^3}{u + u^4}du,$$

$$\Rightarrow \quad -\int\frac{dx}{x} = \int\frac{3 + u^3}{u + u^4}du \Leftrightarrow -\int\frac{dx}{x} = \int\frac{u^3 + 3}{u(u^3 + 1)}du \qquad (3)$$

Para hallar la integral en el miembro derecho de (3), expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{u^3 + 3}{u(u^3 + 1)} \equiv \frac{A}{u} + \frac{Bx^2 + Cx + D}{u^3 + 1} \Leftrightarrow u^3 + 3 \equiv A(u^3 + 1) + (Bu^2 + Cu + D)u,$$

$$\Rightarrow \quad u^3 + 3 \equiv Au^3 + A + Bu^3 + Cu^2 + Du \Leftrightarrow u^3 + 3 \equiv (A + B)u^3 + Cu^2 + Du + A;$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ C = 0 \\ D = 0 \\ A = 3 \end{array}\right\} : \left.\begin{array}{l} \boxed{A = 3} \\ \boxed{B = -2} \end{array}\right\} \text{ De tal manera que:}$$

$$\frac{u^3 + 3}{u(u^3 + 1)} = \frac{3}{u} - \frac{2u^2}{u^3 + 1} \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), se obtiene:

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\left(\frac{3}{u} - \frac{2u^2}{u^3 + 1}\right)du \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\left(\frac{2u^2}{u^3 + 1} - \frac{3}{u}\right)du \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\left(\frac{2}{3}\frac{(3u^2)}{(u^3 + 1)} - \frac{3}{u}\right)du,$$

$$\Rightarrow \quad \ln|x| + \frac{1}{3}\ln c_1 = \frac{2}{3}\ln\left|u^3 + 1\right| - 3\ln|u| \Leftrightarrow 3\ln|x| + \ln c_1 = 2\ln\left|u^3 + 1\right| - 9\ln|u|,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|x^3\right| + \ln c_1 = \ln(u^3 + 1)^2 - \ln\left|u^9\right| \Leftrightarrow \ln\left|c_1x^3\right| = \ln\left|\frac{(u^3 + 1)^2}{u^9}\right| \Leftrightarrow c_1x^3 = \frac{(u^3 + 1)^2}{u^9},$$

$$\Rightarrow \quad c_1x^3u^9 = (u^3 + 1)^2 \qquad (5)$$

De (2) se deduce que $u = \dfrac{y}{x}$ (5)

Sustiuyendo (6) en (5), se obtiene:

$$c_1x^3\left(\frac{y}{x}\right)^9 = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1\right)^2 \Leftrightarrow c_1x^3\left(\frac{y^9}{x^9}\right) = \left(\frac{y^3}{x^3} + 1\right)^2 \Leftrightarrow \frac{c_1y^9}{x^6} = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^3}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_1y^9}{x^6} = \frac{(x^3 + y^3)^2}{x^6} \Leftrightarrow c_1y^9 = (x^3 + y^3)^2 \Leftrightarrow y^9 = c(x^3 + y^3)^2,\ c = \frac{1}{c_1}.$$

23. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=vx, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+v^{-1} \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx}=v^{-1} \Leftrightarrow vdv=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int vdv=\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2=\ln x+\frac{1}{2}c,$$

$$\Rightarrow \quad v^2=2\ln x+c \quad (3)$$

Sustituyendo $v=\dfrac{y}{x}$ en (3), se obtiene:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\ln x+c.$$

25. $y\dfrac{dx}{dy}=x+4ye^{-2x/y}$

Solución:

$$y\frac{dx}{dy}=x+4ye^{-2x/y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+4e^{-2x/y} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v=\frac{x}{y} \Leftrightarrow x=vy, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$v+y\frac{dv}{dy}=v+4e^{-2v} \Leftrightarrow y\frac{dv}{dy}=4e^{-2v} \Leftrightarrow e^{2v}dv=4\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int e^{2v}dv=4\int\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}e^{2v}=4\ln|y|+\frac{1}{2}c \Leftrightarrow e^{2v}=8\ln|y|+c \quad (3)$$

Sustituyendo $v=\dfrac{x}{y}$ en (3), se obtiene:

$$e^{2x/y}=8\ln|y|+c.$$

27. $\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$

Solución:

$$\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0 \Leftrightarrow y + x\cot\frac{y}{x} - x\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cot\frac{y}{x} \quad (1)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx, \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \cot v \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \cot v \Leftrightarrow \tan v dv = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \tan v dv = \int \frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow \quad \ln(\sec v) = \ln|x| + \ln c \Leftrightarrow \ln(\sec v) = \ln|cx| \Leftrightarrow \sec v = cx \quad (3)$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en (3), se obtiene:

$$\sec(y/x) = cx.$$

3.1(a)

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Solución:

Sea

P: población de la comunidad en el tiempo t

P_0: población inicial, en $t = 0$

t: tiempo, en años

$\frac{dP}{dt}$: rapidez con la que aumenta la población

$k > 0$: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\frac{dP}{dt} = kP \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = kdt \Leftrightarrow \ln P = kt + c_1 \Leftrightarrow P = ce^{kt} \qquad (1)$$

$$P_0 = P(0) \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene el valor del constante c:

$$P_0 = ce^{k(0)} \Leftrightarrow c = P_0 \qquad (3)$$

$$P = P_0 e^{kt} \qquad \{(3) \text{ en } (1)\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 5 \\ p = 2P_0 \end{array}\right\}: \text{ la población se duplicó en cinco años} \qquad (5),$$

$$\Rightarrow \qquad 2P_0 = P_0 e^{5k} \qquad \{(3) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \qquad 2 = e^{5k} \Leftrightarrow 5k = \ln 2 \Leftrightarrow k \approx 0.13863 \qquad (6)$$

La función que dá la población en función del tiempo t, se obtiene sustituyendo (6) en (4):

$$P = P_0 e^{0.13863t} \qquad (7)$$

Cuando la población se triplica, (7) queda:

$$3P_0 = P_0 e^{0.13863t} \Leftrightarrow 3 = e^{0.13863t} \Leftrightarrow 0.13863t = \ln 3 \Leftrightarrow t = \frac{1.09861}{0.13863} \Leftrightarrow t = 7.9.$$

Cuando la población se cuadrulica, (7) queda:

$$4P_0 = P_0 e^{0.13863t} \Leftrightarrow 4 = e^{0.13863t} \Leftrightarrow 0.13863t = \ln 4 \Leftrightarrow t = \frac{1.38629}{0.13863} \Leftrightarrow t = 10.$$

Respuesta: la población se triplicará, aproximadamente a los 7.9 años; y se cuadruplicará a los 10 años.

4. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 individuos. Pasadas 10 horas, hay 2000 especimenes ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Solución:

Sea

x : cantidad de bacterias en el tiempo t.

t : tiempo, en horas

x_0 : cantidad inicial de bacterias

$\frac{dx}{dt}$: rapidez con la que aumenta el # de bacterias en el cultivo

$k > 0$: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\frac{dx}{dt} = kx \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} - kx = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}\frac{dx}{dt} - ke^{-kt}x = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-kt}x\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}x = c,$$

$\Rightarrow \quad x = ce^{kt} \quad (1)$

$x_0 = x(0)$: cantidad inicial de bacterias (en $t = 0$) $\quad (2)$,

$\Rightarrow \quad x_0 = ce^{k(0)} \Leftrightarrow x_0 = c \quad \{(2) \text{ en } (1) \text{ y operando}\} \quad (3)$,

$\Rightarrow \quad x = x_0 e^{kt} \quad \{(3) \text{ en } (1)\} \quad (4)$

$\left.\begin{matrix} t = 3 \\ x = 400 \end{matrix}\right\}$: al cabo de 3 horas hay 400 individuos $\quad (5)$,

$$\Rightarrow \quad 400 = x_0 e^{3k} \Leftrightarrow e^{3k} = \frac{400}{x_0} \Leftrightarrow 3k = \ln\frac{400}{x_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}\ln\frac{400}{x_0} \quad \{(5) \text{ en } (4)\} \quad (6)$$

$\left.\begin{matrix} t = 10 \\ x = 2000 \end{matrix}\right\}$: al cabo de 10 horas hay 2000 individuos $\quad (7)$,

$$\Rightarrow \quad 2000 = x_0 e^{10k} \Leftrightarrow e^{10k} = \frac{2000}{x_0} \Leftrightarrow 10k = \ln\frac{2000}{x_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{10}\ln\frac{2000}{x_0} \quad \{(7) \text{ en } (4)\} \quad (8)$$

Igualemos (6) y (8):

$$\frac{1}{3}\ln\frac{400}{x_0} = \frac{1}{10}\ln\frac{2000}{x_0} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{400}{x_0}\right)^{1/3} = \ln\left(\frac{2000}{x_0}\right)^{1/10} \Leftrightarrow \left(\frac{400}{x_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{2000}{x_0}\right)^{1/10},$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{400}{x_0}\right)^{10} = \left(\frac{2000}{x_0}\right)^{3} \Leftrightarrow \frac{400^{10}}{x_0^{10}} = \frac{125 \times 400^3}{x_0^3} \Leftrightarrow \frac{400^7}{125} = x_0^7 \Leftrightarrow x_0 = \frac{400}{125^{1/7}} = \frac{400}{1.993235};$$

$\therefore \quad x_0 \approx 201$

Respuesta: la cantidad inicial de bacterias era de 201 individuos, aproximadamente.

5. El PB-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presen en cualquier momento y tiene un período medio de vida de 3.3 horas. Si al principio había un gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90%?

Solución:

Sea

A: cantidad de plomo PB-209 presente en el tiempo t

t: tiempo, en horas

$\frac{dA}{dt}$: rapidez de desintegración del PB-209

$k > 0$: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$\frac{dA}{dt} = -kA$: hipotéticamente la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente

$$\frac{dA}{A} = -kdt \Leftrightarrow \ln A = -kt + c_1 \Leftrightarrow A = e^{-kt+c_1} \Leftrightarrow A = ce^{-kt} \qquad (1)$$

$A_0 = A(0) = 1$: cantidad de PB-209 en $t = 0$ (2),

$\Rightarrow \quad 1 = ce^{-k(0)} \Leftrightarrow c = 1 \qquad \{(2) \text{ en } (1)\} \qquad (3),$

$\Rightarrow \quad A = e^{-kt} \qquad \{(3) \text{ en } (1)\} \qquad (4)$

$A(3.3) = 0.5$: en $t = 3.3$ se desintegra la mitad del PB-209 (5),

$$\Rightarrow \quad 0.5 = e^{-k(3.3)} \Leftrightarrow -3.3k = \ln 0.5 \Leftrightarrow k = \frac{-0.693147}{-3.3} \Leftrightarrow k = 0.21 \qquad \{(5) \text{ en } (4)\} \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) se obtiene la función para la cantidad de PB-209 en el tiempo t:

$$A = e^{-0.21t} \qquad (7)$$

Necesitamos averigüar cuánto tiempo se necesita para que se desintegre el 90% de PB-09, es decir para que la cantidad presente sea el 10% $\Leftrightarrow$ 0.1 (10% de 1) de la original; sustituyendo este valor de A en (7), se obtiene:

$$0.1 = e^{-0.21t} \Leftrightarrow -0.21t = \ln 0.1 \Leftrightarrow t = \frac{-2.30}{-0.21} = 11$$

Respuesta: para que se desintegre el 90% de PB-09, se necesitan, aproximadamente, 11 h.

9. Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, el grado con que su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, en donde t representa el espesor del medio, expresado en pie
En agua de mar límpida, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es el 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente, ¿cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Solución:

$\frac{dI}{dt} = -kI$: la intensidad del rayo de luz disminuye con una rapidez proporcional a la intendsidad presente

$k > 0$: constante de proporcionalidad

t : espesor del medio, en pies

De tal modo que:

$$\frac{dI}{I} = -kdt \Leftrightarrow \ln I = -kt + c_1 \Leftrightarrow I = e^{-kt+c_1} \Leftrightarrow I = ce^{-kt} \quad (1)$$

$I(0) = I_0$: intensidad del rayo en $t = 0$ (2)

Sustityendo (2) en (1) y operando, se obtiene $c = I_0$; reemplazmos este valor de c en (1):

$$I = I_0 e^{-kt} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 3 \\ I = 25\% I_0 \Leftrightarrow I = 0.25 I_0 \end{array}\right\} : \text{3 pies bajo la superficie la intensidad es el 25\% de } I_0 \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), se obtiene:

$$0.25 I_0 = I_0 e^{-3k} \Leftrightarrow e^{-3k} = 0.25 \Leftrightarrow -3k = \ln 0.25 \Leftrightarrow k = \frac{-1.38629}{-3} \Leftrightarrow k = 0.4621 \quad (5),$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = I_0 e^{-0.4621t} \quad \{(5) \text{ en } (3)\} \quad (6)$$

$$I(15) = I_0 e^{-0.4621(15)} = I_0 e^{-6.9} = 0.001 I_0 \Leftrightarrow 0.1\% I_0$$

Respuesta: aproximadamente, a 15 pies bajo la superficie del agua la intensidad del rayo de luz es de solo el 0.1% de la intensidad en la superficie.

11. En un trozo de madera quemada se determinó que el 85.5% de su C-14 se había desintegrado. Determine la edad aproximada de la madera (la vida media del C-14 es de 5600 años). Estos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos en una caverna de Lascaux, Francia.

Solución:

Hipotéticamente el C-14 se desintegra con una rapidez que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, la ecuación diferencial asociada a este tipo de fenónmenos es:

$$A(t) = A_0 e^{kt},\ k > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k} : \text{ la vida media del C-14 es de 5600 años,}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = e^{5600k} \Leftrightarrow 5600k = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-0.693147}{5600} \Leftrightarrow k = -0.00012378 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \qquad A(t) = A_0 e^{-0.00012378t} \qquad (3)$$

Como ya se ha desintegrado el 85.5% del C-14, resta por desintegrarse el 14.5% del C-14 original en el trozo de madera; de donde:

$$A = 14.5\% A_0 \Leftrightarrow 0.145 A_0 \qquad (4)$$

Al reemplazar (4) en (3) se tiene:

$$0.145 A_0 = A_0 e^{-0.00012378t} \Leftrightarrow 0.145 = e^{-0.00012378t} \Leftrightarrow -0.00012378t = \ln 0.145,$$

$$t = \frac{-1.93102154}{-0.00012378} = 15600.$$

Respuesta: la madera hallada en la caverna de Lascaux tiene una edad aproximada de 15600 años.

13. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es de 70°F y se lleva al exterior, donde la temperatura es de 10°F. Pasado medio minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 15°F?

Solución:

La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se enfría, la rapidez con que la temperatura de cuerpo T cambia en el tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_m del medio ambiente que lo rodea. Es decir, si k es una constante de proporcionalidad,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad (\spadesuit)$$

Pero, en el presente problema se tiene que:

$$T_m = 10$$

Ahora

$$\frac{dT}{dt} = k(T-10) \Leftrightarrow \frac{dT}{(T-10)} = kdt \Leftrightarrow \ln(T-10) = kt + c_1 \Leftrightarrow T - 10 = e^{kt+c_1},$$

$$\Rightarrow \qquad T = ce^{kt} + 10 \qquad (1)$$

En $\quad t = 0,\ T = 70 \qquad (2)$; por lo que, al sustituir (2) en (1), se tiene:

$$70 = ce^{k(0)} + 10 \Leftrightarrow c = 60 \qquad (3),$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{ll} T = 60e^{kt} + 10 \quad \{(3) \text{ en } (1)\} & (4) \\ T(0.5) = 50 \quad (5) & \end{array}\right\} \Rightarrow 50 = 60e^{0.5k} + 10 \qquad \{(5) \text{ en } (4)\},$$

$$\Rightarrow \qquad e^{0.5k} = 0.\bar{6} \Leftrightarrow 0.5k = \ln 0.\bar{6} \Leftrightarrow k = \frac{-0.40547}{0.5} \Leftrightarrow k = -0.81094 \qquad (6)$$

Sustituyendo el valor de k dado por (6) en (4), se obtiene:

$$T = 60e^{-0.81094t} + 10 \qquad (7)$$

$$T(1) = 60e^{-0.81094(1)} + 10 = 60(0.44444) + 10 = 36.67.$$

Para calcular el tiempo en que la temperatura sea de 15°F, se sustituye $T = 15$ en (7):

$$15 = 60e^{-0.81094t} + 10 \Leftrightarrow 60e^{-0.81094t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0.81094t} = 0.08\bar{3},$$

$$\Rightarrow \qquad -0.81094t = \ln 0.08\bar{3} \Leftrightarrow t = \frac{-2.48491}{-0.81094} = 3.06.$$

Respuesta: al acabo de un minuto la temperatura del termómetro es de 36.67°F.
El termómetro llega a 15°F en 3.06 minutos.

Ejercicios 4.1.1

1. Dado que $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ es una familia de soluciones a dos parámetros de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, encuentre un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

<u>Solución</u>:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \quad (\spadesuit),$$

$$\Rightarrow \quad y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} \quad (\clubsuit)$$

$$y(0) = 0 \quad (1)$$

$$y'(0) = 1 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en ($\spadesuit$), se obtiene $0 = c_1 e^{0} + c_2 e^{0} \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0$ (3)

Ahora, al sustituir (2) en ($\clubsuit$), se obtiene $1 = c_1 e^{0} - c_2 e^{0} \Leftrightarrow c_1 - c_2 = 1$ (4)

Sumando, término a término, (3) y (4), se obtiene $2c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1/2$ (5)

Sustituyendo (5) en (3) y despejando, obtenemos $c_2 = -1/2$ (6)

Así, un miembro de la familia que satisface las condiciones iniciales dadas se obtiene al sustituir (5) y (6) en ($\spadesuit$):

$$\boxed{y = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x}}.$$

2. Hallar una solución de la ecuación diferencial del problema 1 que satisfaga las condiciones de frontera $y(0) = 0, y(1) = 1$.

<u>Solución</u>:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \quad (\spadesuit)$$

$$y(0) = 0 \quad (1)$$

$$y(1) = 1 \quad (2)$$

Sustituyendo, alternativamente, (1) y (2) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$0 = c_1 e^{0} + c_2 e^{0} \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1 \quad (3)$$

y $$1 = c_1 e^{1} + c_2 e^{-1} \Leftrightarrow c_2 = e - c_1 e^{2} \quad (4)$$

Igualamos (3) y (4) para obtener:

$$-c_1 = e - c_1 e^{2} \Leftrightarrow c_1 e^{2} - c_1 = e \Leftrightarrow c_1 = \frac{e}{e^{2} - 1} \quad (5)$$

$$c_2 = -\frac{e}{e^{2} - 1} \quad (6)$$

Finalmente, al sustituir (5) y (6) en ($\spadesuit$), se obtiene la solución particular:

$$\boxed{y = \frac{e}{e^{2} - 1} e^{x} - \frac{e}{e^{2} - 1} e^{-x}}.$$

3. Dado que $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$ es una familia de soluciones de dos parámetros de $y'' - 3y' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, encuentre un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Solución:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} \quad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \quad y' = 4c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x} \quad (\clubsuit)$$

$$y(0) = 1 \quad (1)$$

$$y'(0) = 2 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en ($\spadesuit$) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 e^0 + c_2 e^0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1 \quad (3) \\ 2 = 4c_1 e^0 - c_2 e^0 \Leftrightarrow 4c_1 - c_2 = 2 \quad (4) \end{array}\right\}: \ 5c_1 = 3 \Leftrightarrow c_1 = \frac{3}{5} \qquad \{\text{sumando (3) y (4)}\} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3), despejando y reduciendo, se obtiene:

$$c_2 = \frac{2}{5} \quad (6)$$

De tal manera que al sustituir (5) y (6) en ($\spadesuit$), se obtiene el miembro de la familia buscado:

$$\boxed{y = \frac{3}{5} e^{4x} + \frac{2}{5} e^{-x}}.$$

4. Dado que $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$ es una familia de soluciones de tres parámetros de $y''' + y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, encuentre un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 2,\ y''(\pi) = -1$.

<u>Solución</u>:

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad y' = -c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = -c_2 \cos x - c_3 \operatorname{sen} x \quad (3)$$

$$y(\pi) = 0 \quad (4)$$

$$y'(\pi) = 2 \quad (5)$$

$$y''(\pi) = -1 \quad (6)$$

Al sustituir (4) en (1), (5) en (2) y (6) en (3) se forma el siguiente sistema de ecuaciones de 3×3:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \cos \pi + c_3 \operatorname{sen} \pi \Leftrightarrow c_1 - c_2 = 0 \quad (7) \\ 2 = -c_2 \operatorname{sen} \pi + c_3 \cos \pi \Leftrightarrow c_3 = 2 \quad (8) \\ -1 = -c_2 \cos \pi - c_3 \operatorname{sen} \pi \Leftrightarrow c_2 = 1 \quad (9) \end{array}\right\};$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 1 \quad \{(9) \text{ en } (7)\} \quad (10)$$

De tal modo que una solución particular que cumple las condiciones iniciales (4) a (6) se obtiene al sustituir (8), (9) y (10) en (1):

$$y = 1 + 1(\cos x) + 2(\operatorname{sen} x) \Leftrightarrow y = 1 + \cos x + 2 \operatorname{sen} x.$$

6. Dado que $y = c_1 + c_2 x^2$ es una familia de soluciones de dos parámetros de $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$, demuestre que no es posible encontrar constantes c_1 y c_2 de tal manera que un miembro de la familia satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique por que esto no contradice al Teorema 4.1.

Solución:

$$y = c_1 + c_2 x^2 \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \qquad y' = 2c_2 x \qquad (2)$$

$$y(0) = 0 \qquad (3)$$

$$y'(0) = 1 \qquad (4)$$

Al sustituir (3) en (1) y (4) en (2), se obtiene:

$$0 = c_1 + c_2 (0)^2 \Leftrightarrow c_1 = 0 \qquad (5)$$

$$1 = 2c_2 (0) \Leftrightarrow 1 = 0: \text{ contradicción} \qquad (6)$$

De lo anterior se demuestra la imposibilidad de encontrar constantes c_1 y c_2 para (1) que satisfagan la ecuación diferencial $xy'' - y' = 0$ sujeta a las condiciones iniciales (3) y (4). Esto no contradice el Teorema 4.1 porque el coeficiente de y'' es cero cuando $x = 0$ y $0 \in (-\infty,\infty)$: intervalo de solución.

Ejercicios 4.1.2

En los problemas 15 a 22 determine si las funciones dadas son linealmente independientes o dependientes en $(-\infty,\infty)$.

15. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$.

Solución:

$$f_3(x) = 4f_1(x) - 3f_2(x) = 4x - 3x^2$$

Como $f_3(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, se concluye que las funciones dadas son linealmente dependientes.

16. $f_1(x)=0,\ f_2(x)=x,\ f_3(x)=e^x$

Solución:

Para las constantes c_1, c_2, c_3 se realiza la siguiente combinación lineal

$$c_1\cdot 0+c_2x+c_3e^x \Leftrightarrow c_2x+c_3e^x \quad (1)$$

Se establece la siguiente identidad

$$c_2x+c_3e^x\equiv 0 \quad (2)$$

Dando los valores arbitrarios para x: $-1,\ 1,\ 2$; se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0-c_2+e^{-1}c_3=0 \\ 0+c_2+ec_3=0 \\ 0+2c_2+e^2c_3=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

El determinante del sistema (3) es

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & e^{-1} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 2 & e^2 \end{vmatrix} = 0(e^2-2e)+(0)+e^{-1}(0)=0:$$ las funciones son linealmente dependientes.

17. $f_1(x)=5,\ f_2(x)=\cos^2 x,\ f_3(x)=\operatorname{sen}^2 x$

Solución:

$$f_1(x)=5f_2(x)+5f_3(x)=5\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x=5(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)=5(1)=5$$

Como $f_1(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de $f_2(x)$ y $f_3(x)$, se concluye que las funciones dadas son linealmente dependientes.

18. $f_1(x)=\cos 2x,\ f_2(x)=1,\ f_3(x)=\cos^2 x.$

Solución:

$$f_1(x)=2f_3(x)-f_2(x)=2\cos^2 x-1=\cos 2x$$

Como $f_1(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de $f_2(x)$ y $f_3(x)$, se concluye que las funciones dadas son linealmente dependientes.

19. $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = x + 3.$

Solución:

Para las constantes $c_1,\ c_2,\ c_3$ se realiza la siguiente combinación lineal

$$c_1 x + c_2(x-1) + c_3(x+3) \quad (1)$$

Se establece la siguiente identidad

$$c_1 x + c_2(x-1) + c_3(x+3) \equiv 0 \quad (2)$$

Dando los valores arbitrarios para x: $0,\ 1, -3$; se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 0 - c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 0 + 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - 4c_2 + 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

El determinante del sistema (3) es

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0(16) + (0+12) + 3(-4) = 0: \text{ las funciones son linealmente dependientes}$$