Problema 2. Hállese la distancia entre las rectas paralelas $24x - 10y + 39 = 0$ e $y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5}$.

△ Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas es suficiente elegir en una de ellas un punto cualquiera y hallar luego la distancia de este punto a otra recta.

El punto M (0; 3,9) está situado en la primera recta, ya que $24 \cdot 0 - 10 \cdot 3{,}9 + 39 = 0$. Para la segunda recta $\frac{12}{5}x - y - \frac{26}{5} = 0$ el factor normalizador es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{13},$$

por lo tanto, su ecuación normalizada será como sigue:

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 2 = 0.$$

La distancia buscada d la hallamos según la fórmula (1):

$$d = \left|\frac{12}{13} \cdot 0 - \frac{5}{13} \cdot 3{,}9 - 2\right| = \left| -\frac{3}{5} - 2\right| = 3{,}5. \ ▲$$

Problemas para el capítulo II

2.1. Determínese si el punto (—1; 2) pertenece al gráfico de las ecuaciones:

a) $3x + 5y - 7 = 0$; b) $2x^2 - 3xy - 8 = 0$;
c) $4x^2 - y^2 - 1 = 0$; d) $3x^2 - x + y = 6$.

2.2. Constrúyanse los gráficos de las ecuaciones:

a) $3x - 2y - 1 = 0$; b) $2x + 3y + 2 = 0$;
c) $4x^2 - 2y - 3 = 0$; d) $2x^2 - 4y - 1 = 0$;
e) $(x - 3)(x - 4) - y = 0$; f) $x^2 + y^2 = 1$.

2.3. ¿Es el punto (—3; 1) el punto de intersección de los gráficos de las ecuaciones:

a) $y - x = 4$ y $xy = -3$;
b) $x^2 - y^2 = 8$ y $3x + 12y = 1$?

2.4. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto dado M_0, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) M_0 (—1; 2), $\boldsymbol{a}$ = (3; 2); b) M_0 (3; 1), $\boldsymbol{a}$ = (1; 0);
c) M_0 (3; —2), $\boldsymbol{a}$ = (1; 3); d) M_0 (2; 0), $\boldsymbol{a}$ = (0; —3).

2.5. Constrúyase la recta definida por las ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 - t; \\ y = -3 + t; \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x = -2t, \\ y = 3. \end{cases}$$

2.6. Constrúyase la recta que pasa por el punto A (0; 3), paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$ = (2; 1).

2.7. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto M_0, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0(3;\ -4)$, $\boldsymbol{a}=(1;\ -4)$; b) $M_0(1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}=(0;\ 3)$;

c) $M_0\left(\frac{1}{2};\ 1,5\right)$, $\boldsymbol{a}=(-3;\ -2)$; d) $M_0(0;\ -3)$; $\boldsymbol{a}=(-4;\ 0)$.

2.8. Constrúyase la recta que pasa por el punto $E(4;\ -3)$, paralelamente al vector $\boldsymbol{i}$.

2.9. Escríbase la ecuación canónica de la recta que es paralela al eje Oy y pasa por el punto $M_0(2;\ -4)$.

2.10. Una recta está dada por la ecuación $\frac{x-3}{5}=\frac{y+7}{4}$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector director.

2.11. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y-3=0$ y $5x-3y-2=0$ y es paralela al vector $\boldsymbol{j}$.

2.12. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y=3$ y $3x-2y=4$ y es paralela al vector $\boldsymbol{a}=(-7;\ 11)$.

2.13. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, si:

a) $M_1(-1;\ 6)$, $M_2(-2;\ -3)$; b) $M_1(-3;\ 2)$, $M_2(4;\ 3)$;

c) $M_1\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{6};\ 0,3\right)$; d) $O(0;\ 0)$, $M(3;\ -2)$.

2.14. Para la recta $y=-\frac{2}{3}x+6$ escríbase su ecuación segmentaria.

2.15. Escríbase para la recta $3x-7y=5$ su ecuación segmentaria.

2.16. Hállense los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas y constrúyase esta recta:
a) $3x-2y-12=0$; b) $8x-3y+12=0$.

2.17. Se dan sucesivamente los vértices de un cuadrilátero convexo $A(-6;\ -2)$, $B(6;\ 7)$, $C(9;\ 3)$ y $D(1;\ -3)$. Determínese el punto de intersección de sus diagonales.

2.18. Calcúlese el área de un triángulo cortado por la recta $3x+4y-12=0$ desde el ángulo de coordenadas.

2.19. Escríbase la ecuación de una recta si el punto $M(2;\ 1)$ es el punto medio de su segmento, comprendido entre los ejes de coordenadas.

2.20. Una recta corta en los ejes de coordenadas en el primer cuadrante segmentos congruentes. Escríbase la ecuación de la recta, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 18.

2.21. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $B(0;\ 8)$, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 16.

2.22. Determínese el área del triángulo limitado por la recta $5x+8y-40=0$ y los ejes de coordenadas.

2.23. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $M(0;\ -2)$,

N (0; 2) y P (2; 4). Escríbanse las ecuaciones del lado MP, de la mediana NE y de la altura ND.

2.24. Se da el triángulo con los vértices en los puntos A (—5; —5), B (1; 7) y C (5; —1). Escríbanse las ecuaciones de los lados y medianas de este triángulo. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de este triángulo.

2.25. ¿Cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ corta en el eje de ordenadas el mayor segmento?

2.26. Un punto se mueve del origen de coordenadas con una velocidad de $v = 3i + 2j$. Hállese la trayectoria del movimiento del punto.

2.27. Constrúyase la recta que pasa por el punto C (3; —2) y es perpendicular al vector $n = (1; 4)$.

2.28. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto D (2; —3) perpendicularmente al vector $n = (4; -1)$.

2.29. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3; —2), perpendicularmente al vector $n = (3; -2)$.

2.30. Constrúyase la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $n = (3; 4)$.

2.31. La recta está definida por la ecuación $-3(x+5) + \frac{1}{7}(y-6) = 0$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector normal.

2.32. Destacar entre las rectas $A(x-2) + B(y+3) = 0$ aquella recta, que es perpendicular al vector $n = (4; 1)$.

2.33. Constrúyase la recta que pasa por el punto C (0; 3) perpendicularmente al vector j.

2.34. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto N (3; 4) y es perpendicular al vector j.

2.35. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto F y es perpendicular al vector $n = (2; 5)$, si el punto F es simétrico al punto K (3; —4) respecto al eje Ox.

2.36. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a él, si A (3; —2), B (5; —4).

2.37. A través de los puntos de intersección de la recta $5x - 2y - 10 = 0$ con los ejes de coordenadas están trazadas las perpendiculares a esta recta. Escríbanse sus ecuaciones.

2.38. En el triángulo con los vértices en los puntos M_1 (—4; —3), M_2 (—3; 4) y M_3 (2; 1) está trazada la mediana M_2D. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M_2 y es perpendicular a la mediana M_2D.

2.39. Escríbanse las ecuaciones de las perpendiculares bajadas de los vértices del triángulo ABC, donde A (1; 3), B (—1; 0), $C\left(1; -\frac{4}{3}\right)$, a sus lados y convénzanse de que ellos se intersecan en un solo punto.

2.40. Escríbase la ecuación general de cada una de las rectas dadas y señálense las coordenadas del vector normal:

a) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 + t \end{cases}$ b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$;

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; d) $-\frac{1}{5}(x+10) + 3\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$.

2.41. La recta está definida por la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$. Escríbanse: a) la ecuación segmentaria de esta recta; b) la ecuación canónica de esta recta; c) la ecuación paramétrica de esta recta.

2.42. Constrúyanse las rectas:

a) $3x - y + 5 = 0$; b) $x - 3y - 4 = 0$; c) $x + y + 1 = 0$.

2.43. Hállese el punto de intersección de los siguientes pares de rectas:

a) $3x - 2y - 5 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;
b) $4x - 3y - 7 = 0$, $2x + 3y - 17 = 0$;
c) $2x + 5y - 29 = 0$, $5x + 2y - 20 = 0$;
d) $3x + 2y - 13 = 0$, $5x - 3y - 9 = 0$;
e) $x - y - 7 = 0$, $3x - 3y + 5 = 0$.

2.44. Se dan las ecuaciones de los lados del triángulo: $x - y + 4 = 0$, $4x + 2y - 19 = 0$, $5x + 6y + 9 = 0$. Hállense las coordenadas de sus vértices.

2.45. Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo

$$8x + 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

y la ecuación de una de sus diagonales

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

2.46. Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo $x - 4y + 11 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ y la ecuación de una de sus diagonales $x - y - 1 = 0$. Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

2.47. ¿Cómo están situadas las rectas: $y - x = 0$; $2x + y = 0$; $4x - 12 = 0$; $6y + 24 = 0$; $2x - 3y = 0$; $x = -4{,}5$; $y = 8$? Constrúyanse estas rectas.

2.48. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto N (4; —3) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

2.49. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P (5; —2) y son perpendiculares a los ejes de coordenadas.

2.50. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto D (—3; —2) y el origen de coordenadas.

2.51. Calcúlese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos A (3; 5) y B (—2; 4).

2.52. ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por los puntos A (2; 0) y B (4; —2) con dirección positiva del eje de las abscisas?

2.53. Hállese el coeficiente angular de la recta que pasa por el punto D (—1; —1) y el origen de coordenadas.

2.54. Hállese la tangente de la inclinación de una recta que pasa por el punto C (—2; 1/2) y el origen de coordenadas.

2.55. Escríbanse las ecuaciones de dos rectas cualesquiera, pero tales, que la primera de ellas forme con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, dos veces mayor que la segunda.

2.56. Hállese el ángulo de inclinación de las rectas siguientes:

a) $3x + 3y - 7 = 0$; b) $2\sqrt{3}x - 2y + 5 = 0$;
c) $y + 10 = 0$; d) $x - 5 = 0$.

2.57. Se da la ecuación de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. Se requiere hallar la magnitud del ángulo entre esta recta y la dirección positiva del eje de las abscisas.

2.58. Hállese el coeficiente angular de la recta $3x - 7y + 2 = 0$ y constrúyala.

2.59. Hállese la tangente de la inclinación de la recta $3x - 4y + 13 = 0$ y determínese qué segmento corta ésta en el eje de ordenadas.

2.60. Determínese cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ forma el mayor ángulo con la dirección positiva del eje de ordenadas.

2.61. La recta está dada por las ecuaciones paramétricas $x = -3 + 3t$, $y = 2 - 6t$. Escríbase la ecuación de esta recta con el coeficiente angular.

2.62. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-3\sqrt{3}}$ y $\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y}{-3\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-6}{3\sqrt{3}}$ y $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{-3\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{x+2}{24} = \dfrac{y-3}{7}$ y $\dfrac{x-1,5}{-15} = \dfrac{y+\frac{4}{3}}{8}$;

d) $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y}{3}$ y $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-6}{1}$;

e) $\dfrac{x+0,5}{\sqrt{5}} = \dfrac{y-4}{2}$ y $\dfrac{x-3,5}{\sqrt{5}} = \dfrac{y+7}{2}$.

2.63. Señálense entre los siguientes pares de rectas los pares de rectas paralelas o perpendiculares:

a) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x-3}{5}$ y $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y+2}{10}$;

b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{3}$ y $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-7}{-2}$;

c) $\dfrac{x+0,3}{3} = \dfrac{y-0,4}{4}$ y $\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y+3}{-16}$.

2.64. ¿Para qué valor de b las rectas $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{5}$ y $\dfrac{x+1}{b} = \dfrac{y-6}{30}$ son paralelas?

2.65. ¿Para qué valor de a las rectas $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-3}{a}$ y $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+4}{24}$ son perpendiculares?

2.66. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $x + 5y + 9 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$;

b) $2x + y - 5 = 0$ y $3x - y + 4 = 0$;

c) $2x - 3y + 12 = 0$ y $3x - y + 5 = 0$;

d) $2x - 3y - 7 = 0$ y $x + y - 2 = 0$;
e) $3x + 2y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 9 = 0$.

2.67. Indíquense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:
a) $2x - 3y - 7 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
b) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
c) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y - 5 = 0$.

2.68. ¿Para qué valor de a las rectas $2x - 4y + 9 = 0$ y $ax - 2y + 9 = 0$ son paralelas?

2.69. ¿Para qué valor de b las rectas $2x - 2y - 35 = 0$ y $x + by + 1 = 0$ son perpendiculares?

2.70. Examínese la posición recíproca de los siguientes pares de rectas. Determínense las coordenadas del punto de intersección, si las rectas se intersecan:
a) $x + y - 3 = 0$ y $3x + 3y - 9 = 0$;
b) $x = 4$ y $x + y = 0$;
c) $y = 0$ y $y - 7 = 0$;
d) $2x + y + 1 = 0$ y $2x + y + 5 = 0$.

2.71. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $y = -2x + 5$ y $y = 3x + 4$;

b) $y = \sqrt{3}\,x + 7$ y $y = -\sqrt{3}\,x - 2$;

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$;

d) $y = -3x + 7$ y $y = x + 4$;

e) $y = \frac{2}{3}x + 4$ y $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$.

2.72. Señálense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:

a) $y = -\frac{5}{3}x + 7$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;

b) $y = \frac{3}{5}x + 3$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;

c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{3}x + 2$.

2.73. ¿Para qué valor de a las rectas $y = ax + 3$ e $y = -3x + 2$ son paralelas?

2.74. ¿Para qué valor de a las rectas $y = ax - 1$ e $y = 5x + 3$ son perpendiculares?

2.75. Se da la recta $3x - 4y + 5 = 0$. Determínese el coeficiente angular de la recta:
a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

2.76. Se da la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M (4; —5) y es:
a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

2.77. A través del punto de intersección de las rectas $x - y + 4 = 0$ y $4x + 2y - 19 = 0$ está trazada la recta paralela a la recta $2x - 3y + 6 = 0$. Hállese su ecuación.

2.78. A través del punto de intersección de las rectas $4x + 2y - 19 = 0$ y $5x + 6y + 6 = 0$ está trazada una recta perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$. Hállese su ecuación.

2.79. Se da la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Se requiere escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas y es perpendicular a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

2.80. Determínense cuáles de las siguientes ecuaciones de las rectas son normalizadas:

a) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0$;

c) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 7 = 0$; d) $y - 3 = 0$;

e) $x - 15 = 0$.

2.81. Redúzcase en cada uno de los casos siguientes la ecuación general de una recta a la forma normalizada y hállese la distancia del origen de coordenadas a la recta dada:

a) $3x - 4y - 25 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 20 = 0$;

c) $x - 5 = 0$; d) $5x - 12y + 26 = 0$;

e) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 13 = 0$.

2.82. Se da la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Determínese la distancia hasta esta recta desde el origen de coordenadas.

2.83. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son perpendiculares a la recta $2x + y = 0$, si la distancia del origen de coordenadas a estas rectas es igual a 3.

2.84. Hállese la distancia desde un punto dado hasta una recta dada:

a) $M_0\left(\frac{3}{2};\ 9\right)$; $4x + 3y - 8 = 0$;

b) $M_0\left(-\frac{3}{2};\ -9\right)$, $4x + 3y - 17 = 0$.

2.85. Calcúlense las distancias entre las rectas paralelas:

a) $4x - 3y + 25 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;

b) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

c) $3x - 4y - 20 = 0$, $6x - 8y + 25 = 0$.

2.86. Se dan los vértices del triángulo: $A\ (2;\ 1)$, $B\ (-2;\ 3)$ y $C\ (-10;\ -13)$. Calcúlese la longitud de la perpendicular bajada del vértice B a la mediana trazada del vértice C.

2.87. A través del punto de intersección de las rectas $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$ está trazada una recta paralelamente a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. Escríbase su ecuación. Hállese la distancia de esta recta a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.

2.88. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $4x + 3y + 1 = 0$ y distan de ella en 3 unidades.

2.89. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a las rectas $3x + 2y = 5$ y $6x + 4y + 4 = 0$ y cuya distancia hasta estas rectas sea igual.

2.90. Fórmese la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 2) de manera, que la distancia hasta ésta desde los puntos (2; 3) y (4; —5) sea igual.