**Problema 14.** Calcúlese el volumen de la pirámide, cuyos vértices se encuentran en los puntos $A$ (1; 2; —1), $B$ (0; 1; 5), $C$ (—1; 2; 1), $D$ (1; 2; 3).

△ El volumen de la pirámide $ABCD$ es seis veces menor que el volumen del paralelepípedo con las aristas $[AB]$, $[AC]$ y $[AD]$. Por lo tanto

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) \right|.$$

Calculemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ según la fórmula (1) del § 24:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Por consiguiente, $V = \frac{4}{3}$ (unidades cúbicas). ▲

De este modo, el volumen $V$ de la pirámide con los vértices en los puntos

$A$ $(x_1; y_1; z_1)$, $B$ $(x_2; y_2; z_2)$, $C$ $(x_3; y_3; z_3)$, $D$ $(x_4; y_4; z_4)$ puede ser calculado por la fórmula

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$

## Problemas para el capítulo I

**1.1.** Por los vectores dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ constrúyanse los siguientes vectores:

a) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; b) $-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; c) $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; d) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$; e) $-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$.

**1.2.** En la figura 66 la circunferencia está dividida en tres, cuatro o seis arcos congruentes. Hállese en cada caso la suma de los vectores representados en las figuras.

**1.3.** Hállese la suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ para los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ representados en la figura 67.

**1.4.** Dos fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ actúan sobre un punto material. Hállese la magnitud de su resultante, si $|\boldsymbol{F}_1| = 8H$, $|\boldsymbol{F}_2| = 6H$ y $(\widehat{\boldsymbol{F}_1; \boldsymbol{F}_2}) = 90°$.

**1.5.** Trácese cualquier pentágono $ABCDE$ y hállese la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$.

**1.6.** Tres fuerzas dirigidas a tres vértices sucesivos están aplicadas al centro de un hexágono regular. Hállese la magnitud de la resultante, si la magnitud de cada una de las fuerzas dadas es igual a 1 N.

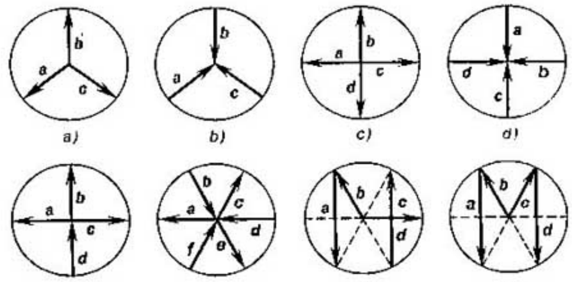


Fig. 66

**1.7.** Hállese la resultante de tres fuerzas aplicadas al punto $M$, si se sabe que estas fuerzas se representan por los vectores $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, donde los puntos $A$, $B$, $C$ son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia con el centro $O$ (fig. 68).

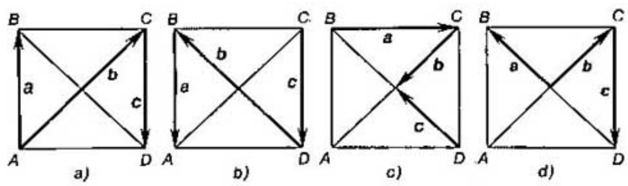


Fig. 67

**1.8.** Demuéstrese que de las medianas de cualquier triángulo se puede construir un triángulo.

**1.9.** Se da un tetraedro $ABCS$. Hállese la suma de los vectores: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}$; b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

**1.10.** Se da una pirámide cuadrangular regular $ABCDS$ ($S$ es el vértice, $O$ es la base de la altura). Demuéstrese que la suma de los vectores $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AO}$ es igual a la suma de los vectores $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$.

**1.11.** Sea que $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$). ¿Para qué valores de $k$: a) $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$; b) $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$; c) $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$?

**1.13.** Determínense los valores de $k$, para los cuales la longitud del vector $k\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$): a) es igual a la longitud del vector $\boldsymbol{a}$; b) es mayor de $|3\boldsymbol{a}|$, c) es menor de $|5\boldsymbol{a}|$.

**1.13.** Determínese el número, por el cual hay que multiplicar el vector no nulo $\boldsymbol{a}$, para obtener tal vector $\boldsymbol{b}$, que: a) $|\boldsymbol{b}| = 5$ y $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$; b) $|\boldsymbol{b}| = 1$ y $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

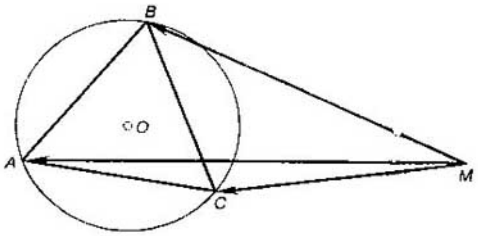


Fig. 68

**1.14.** En una recta se toman sucesivamente tres puntos $M$, $N$ y $P$; el punto $A$ es el punto medio del segmento $MN$, y el punto $B$, el punto medio del segmento $NP$. Exprésese el vector $\overrightarrow{AB}$ por medio del vector $\overrightarrow{PM}$.

**1.15.** En una recta se toman tres puntos $A$, $B$, $C$ de manera, que $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$. Exprésese el vector $\overrightarrow{AB}$ por medio del vector $\overrightarrow{CB}$.

**1.16.** En el rectángulo $ABCD$ están trazadas las diagonales: $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a}$; $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$. Preséntense los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ en forma de una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

**1.17.** En el paralelogramo $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, $O$ es el punto de intersección de las diagonales. Desarróllense los vectores $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CO}$ en vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

**1.18.** En el trapecio isósceles $ABCD$ la magnitud del ángulo $BAD$ es igual a $60°$, $|AB| = |BC| = |CD| = 2$. Los puntos $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados $BC$ y $DC$. Desarróllense los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{MN}$, en vectores $\boldsymbol{m} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ y $\boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$.

**1.19.** En una circunferencia con el centro $O$ se dan los puntos $A$ y $B$. Las tangentes a la circunferencia en estos puntos se intersecan en el punto $C$. Desarróllese el vector $\overrightarrow{OC}$ en vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, si: a) $\widehat{AOB} = 60°$; b) $\widehat{AOB} = 90°$.

**1.20** Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Hállese el desarrollo en vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AA_1}$, de los vectores: a) $\overrightarrow{AC_1}$; b) $\overrightarrow{AB_1}$;

c) $\overrightarrow{D_1C_1}$; d) $\overrightarrow{B_1D_1}$; e) $\overrightarrow{BC}$; f) $\overrightarrow{C_1C}$; g) $\overrightarrow{B_1D}$; h) $\overrightarrow{B_1O}$, donde $O$ es el centro del cubo.

**1.21.** Se da el triángulo $ABC$. Tomando por base los vectores $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, hállense las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ en esta base. Los puntos $M$, $N$, $P$ son los puntos medios de los lados $BC$, $AC$, $AB$ del triángulo.

**1.22.** Se da el hexágono regular $ABCDEF$. Tomando por base los vectores $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{AF}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, hállense las coordenadas de los vec-

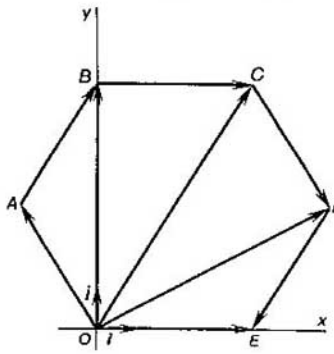


Fig. 69

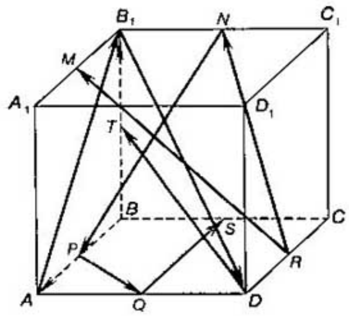


Fig. 70

tores siguientes: a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{DE}$; e) $\overrightarrow{EF}$; f) $\overrightarrow{AD}$; g) $\overrightarrow{AE}$; h) $\overrightarrow{FC}$; i) $\overrightarrow{DB}$; j) $\overrightarrow{BE}$.

**1.23.** En el plano se da un hexágono regular. Desarróllense en versores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ todos los vectores representados en la figura 69, si $|\overrightarrow{OE}| = 4$.

**1.24.** En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 70) los puntos $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ son los puntos medios de las aristas. Los vectores $\boldsymbol{i} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{BB_1}$ se toman por base. Desarróllense en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ los vectores siguientes: a) $\overrightarrow{DT}$; b) $\overrightarrow{AB_1}$; c) $\overrightarrow{NP}$; d) $\overrightarrow{PQ}$; e) $\overrightarrow{QS}$; f) $\overrightarrow{B_1D}$; g) $\overrightarrow{RM}$; h) $\overrightarrow{RN}$.

**1.25.** En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos $A$ (3; −1; 2) y $B$ (−1; 2; 2). Hállense las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, sus longitudes y coordenadas del vector unitario, dirigido como el vector $\overrightarrow{BA}$.

**1.26.** Se da el vector $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, si $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ es igual a la ordenada del vector $\boldsymbol{a}$ y la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$ es igual a cero.

**1.27.** Calcúlense las longitudes de las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{j}$.

**1.28.** Hállese la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{b}$, y la proyección del vector $\boldsymbol{b}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{a}$, si $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$, $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} = 120°$.

**1.29.** Hállese el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 6$ y $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}$ es igual a: a) 45°; b) 0°; c) 135°; d) 90°; e) 180°.

**1.30.** El ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 120°. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, calcúlense: a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{a}^2$; c) $(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$; d) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$; e) $(7\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$.

**1.31.** Calcúlense:

a) $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\cdot(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$;

b) $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

**1.32.** Calcúlese $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$, si $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$ y $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$.

**1.33.** Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (4;\ -2;\ 0)$ y $\boldsymbol{b} = (1;\ 2;\ 3)$. Calcúlense: a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{b}^2$; c) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$; d) $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$.

**1.34.** Se da el vector $\boldsymbol{a} = (3;\ -4)$. Hállense las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector $\boldsymbol{a}$.

**1.35.** Se da el vector $\boldsymbol{c} = (4;\ -7)$. Hállense las coordenadas de cualquier vector perpendicular al vector $\boldsymbol{c}$. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

**1.36.** Se da el vector $\boldsymbol{a} = (1;\ 2;\ -3)$. Se sabe que la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 3, y la ordenada es igual a 6; se requiere hallar la $z$-coordenada del vector $\boldsymbol{b}$.

**1.37.** Se da el vector $\boldsymbol{a} = (3;\ -4)$. Se sabe que la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 8; determínese la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$.

**1.38.** Se da el vector $\boldsymbol{a} = (5;\ 3)$. Se sabe que la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 10; determínese la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$.

**1.39.** Hállese el valor $\alpha$ con el cual los siguientes vectores son perpendiculares entre sí:

a) $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$;

b) $\boldsymbol{a} = (\alpha;\ -3;\ 2)$ y $\boldsymbol{b} = (1;\ 2;\ -\alpha)$;

c) $\boldsymbol{a} = (0;\ -2;\ 7)$ y $\boldsymbol{b} = (\alpha,\ 14,\ 4)$.

**1.40.** Hállense los valores de $\alpha$ y $\beta$ con los cuales los vectores $\boldsymbol{a} = (3;\ -1;\ \alpha)$ y $\boldsymbol{b} = (2;\ \beta;\ 1)$ son perpendiculares entre sí, si $|\boldsymbol{b}| = 3$.

**1.41.** En el plano $xOy$ hállese el vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular al vector $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, si $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$.

**1.42.** Se dan dos vectores: $\boldsymbol{a} = (3;\ -1;\ 5)$ y $\boldsymbol{b} = (1;\ 2;\ -3)$. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que es perpendicular al eje $Oz$ y satisfaga las condiciones $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = 9$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = -4$.

**1.43.** Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, colineal al vector $\boldsymbol{a}$, que satisfaga a la condición dada:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = 3$;

b) $\boldsymbol{a} = (-1;\ 2;\ 2)$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = -2$.

**1.44.** Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, cuya longitud es igual a 50, que es colineal al vector $\boldsymbol{a}$ y forma un ángulo agudo con el eje dado:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$, eje $Ox$;

b) $\boldsymbol{a} = (6;\ -8;\ -7{,}5)$, eje $Oz$.

**1.45.** Se dan tres vectores: $\boldsymbol{a} = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{b} = (1; -3; 2)$, $\boldsymbol{c} = (3; 2; -4)$. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que satisfaga las condiciones $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = -5$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = -11$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} = 20$.

**1.46.** Hállese el coseno del ángulo entre el vector $\boldsymbol{a} = (3; -4)$ y el eje $Ox$.

**1.47.** Hállense los cosenos de los ángulos entre el vector $\boldsymbol{a} = (3; -4; 12)$ y los ejes de coordenadas.

**1.48.** Hállese el ángulo entre las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

**1.49.** Determínese el ángulo entre el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y el eje de las abscisas, si $A(-2; 3)$, $B(0; 8)$, $C(5; 3)$ y $D(10; 5)$.

**1.50.** Determínese el ángulo entre los vectores: a) $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; b) $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$; c) $\boldsymbol{k}$ y $2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

**1.51.** Determínense las magnitudes de los ángulos en el triángulo con los vértices $A(5; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$ y $C(3; -1; 2)$.

**1.52.** Se dan tres vértices sucesivos del paralelogramo: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$ y $C(5; 0; 2)$. Hállense el cuarto vértice $D$ y el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

**1.53.** Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A(3; -2; 1)$, $B(3; 0; 2)$ y $C(1; 2; 5)$. Calcúlese el ángulo entre la mediana $[BD]$ y el lado $[AC]$.

**1.54.** Se da el cuadrángulo con los vértices en los puntos $A(2; -3; 1)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ y $D(-5; -5; 3)$. Hállese el ángulo entre las diagonales $[AC]$ y $[BD]$.

**1.55.** Se da un triángulo con los vértices en los puntos $A(-1; 4; 1)$, $B(3; 4; -2)$ y $C(5; 2; -1)$. Calcúlese el coseno del ángulo del vértice $B$.

**1.56.** Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (1; 5; 0)$, $\boldsymbol{c} = (2; 2; -1)$. Calcúlense: a) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; b) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$; c) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$; d) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$; e) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}(2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

**1.57.** Determínese, si es derecha o izquierda la terna de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, si:

a) $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$;
b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$;
c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$
($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ forman la terna derecha).

**1.58.** Hállese el vector $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ y represéntese, si:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j}$;
b) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{k}$;
c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

**1.59.** Hállese el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = (3; 4)$ y $\boldsymbol{b} = (4; -3)$.

**1.60.** Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (1; -2; 3)$, $\boldsymbol{b} = (2; 2; -1)$, $\boldsymbol{c} = (0; 1; -2)$, $\boldsymbol{d} = (2; -1; 0)$. Calcúlense: a) $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$; b) $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}]$; c) $[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}]$; d) $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{d}]$; e) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}); \boldsymbol{c}]$; f) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}); \boldsymbol{c}]$; g) $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}); (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c})]$; h) $[(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{d}); \boldsymbol{c}]$; i) $[(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}); (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})]$; j) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}); (3\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d})]$.

**1.61.** Hállese el área del triángulo con los vértices en los puntos $A(0; 2; 6)$, $B(4; 0; 0)$ y $C(8; -2; 0)$.

**1.62.** Se dan los vértices del paralelogramo: $A(1; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(4; 10)$ y $D(7; 6)$. Calcúlese su área y altura.

**1.63.** La fuerza $F = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ está aplicada al punto

$M$ (1; 5; —2). Hállese la magnitud del momento de fuerza $F$ respecto al origen de coordenadas.

**1.64.** Los vectores $r_1$, $r_2$, $r_3$ que forman la terna derecha son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $|r_1| = 7$, $|r_2| = 5$, $|r_3| = 6$, calcúlese $(r_1; r_2; r_3)$.

**1.65.** Demuéstrese que $(r_1 + r_2; r_2 + r_3; r_3 + r_1) = 2\,(r_1; r_2; r_3)$.

**1.66.** Demuéstrese que los vectores $r_1$, $r_2$, $r_3$ que satisfacen la condición $[r_1; r_2] + [r_2; r_3] + [r_3; r_1] = 0$, son coplanares.

**1.67.** Calcúlese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $r_1 = a + b + c$, $r_2 = a - b + c$ y $r_3 = a - b - c$.

**1.68.** Muéstrese que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las caras del paralelepípedo dado, que tienen un vértice común, es igual al volumen duplicado del paralelepípedo dado.

**1.69.** Determínese el producto mixto $(a; b; c)$ de los vectores $a = (0; 3; -1)$, $b = (5; 0; 0)$, $c = (7; -2; 4)$.

**1.70.** Determínese si son coplanares los vectores $a = (8; 5; -13)$, $b = (-4; 2; 8)$, $c = (4; 7; -4)$; si son coplanares, qué terna formarán, derecha o izquierda.

**1.71.** Determínese si son coplanares los vectores $a = (-2; -1; -3)$, $b = (-1; 4; 6)$, $c = (1; 5; 9)$.

**1.72.** Hállese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $a = (1; 2; 3)$, $b = (-1; 3; 4)$, $c = (2; 5; 2)$.

**1.73.** El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto $M$ (2; —4), uno de sus extremos, en el punto $A$ (—1; 1). Determínense las coordenadas del otro extremo de la barra.

**1.74.** Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A$ (2; —5), $B$ (1; —2) y $C$ (4; 7). Hállese el punto de intersección de la bisectriz del $\angle B$ con el lado $AC$.

**1.75.** Demuéstrese, que si en la pirámide triangular regular $SABC$ unimos el vértice $A$ con el punto $M$ de intersección de las medianas de la cara opuesta, entonces $(AM) \perp (BC)$.

**1.76.** En el triángulo $ABC$ los puntos $A_1$, $B_1$, $C_1$ son los puntos medios de los lados $BC$, $AC$, $AB$. Demuéstrese que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos $ABC$ y $A_1B_1C_1$ coinciden.

**1.77.** Demuéstrese que los puntos medios de las bases del trapecio y el punto de intersección de las prolongaciones de sus lados laterales pertenecen a una misma recta.

**1.78.** Los puntos $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados $AB$ y $CD$ del cuadrángulo $ABCD$. Demuéstrese, que los puntos medios de las diagonales de los cuadrángulos $AMND$ y $BMNC$ son vértices de un paralelogramo o están situados en una misma recta.

**1.79.** Calcúlese el trabajo efectuado por la resultante de dos fuerzas $F_1$ (5; —1; 3) y $F_2$ (—3; —2; 4), cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición $B$ (10; 8; —2) a la posición $C$ (9; 4; 1).

**1.80.** La fuerza $F = 3i + k$ está aplicada al punto $A$ (2; 1; 4). Hállense el momento y la magnitud del momento de esta fuerza respecto al punto $O$ (2; —1; 3).

**1.81.** Dos fuerzas $F_1$ y $F_2$ están aplicadas a un punto material, además, $|F_1| + |F_2| = 4\text{N}$ y $(\widehat{F_1; F_2}) = 120°$. Hállese el valor mínimo de la magnitud de la resultante de estas fuerzas.

1.82. Determínese si se encuentran en un mismo plano los cuatro puntos siguientes:

a) $M_1 (5; 2; -2)$, $M_2 (6; -3; 1)$, $M_3 (0; 4; 3)$, $M_4 (2; 0; 4)$.

b) $M_1 (3; 5; 1)$, $M_2 (2; 4; 7)$, $M_3 (1; 5; 3)$, $M_4 (4; 4; 5)$.

1.83. Los vértices de una pirámide se encuentran en los puntos $A (2; 1; -1)$, $B (3; 0; 1)$, $C (2; -1; 3)$ y $D (0; -7; 0)$. Hállese la altura de la pirámide bajada desde el vértice $D$.

1.84. En el plano se dan el cuadrángulo $ABCD$ y el punto $M$. Demuéstrese, que los puntos simétricos al punto $M$ respecto a los puntos medios de los lados del cuadrángulo dado, son vértices de un paralelogramo.

1.85. Demuéstrese que las alturas de un triángulo arbitrario se intersecan en un solo punto.

1.86. Demuéstrese, que para que las diagonales de un cuadrángulo sean perpendiculares entre sí, es necesario y suficiente que las sumas de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos sean iguales.

1.87. Un ciclista se mueve con una velocidad de 15 km/h en dirección norte y le parece, que el viento (que sopla con una velocidad de 9 km/h de cierto sitio del nordeste) está dirigido bajo un ángulo de 15° respecto a la línea de su movimiento. Hállese la dirección real del viento.

1.88. En el lado $AB$ del triángulo $ABC$ se da el punto $P$, por el cual están trazadas las rectas paralelas a sus medianas $AM_1$ y $BM_2$. Estas rectas cortan los lados respectivos del triángulo en los puntos $A_1$ y $B_1$. Demuéstrese que el punto medio del segmento $A_1B_1$, el punto $P$ y el punto de intersección de las medianas del triángulo dado están situados en una misma recta.