PRUEBA GENERAL DE LOS FACTORES

135

En cualquiera de los diez casos que estudiaremos, la prueba consiste en multiplicar los factores que se obtienen, y su producto tiene que ser igual a la expresión que se factorizó.

Ejercicio 89

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. a^2+ab
2. $b+b^2$
3. x^2+x
4. $3a^3-a^2$
5. x^3-4x^4
6. $5m^2+15m^3$
7. $ab-bc$
8. x^2y+x^2z
9. $2a^2x+6ax^2$
10. $8m^2-12mn$
11. $9a^3x^2-18ax^3$
12. $15c^3d^2+60c^2d^3$
13. $35m^2n^3-70m^3$
14. $abc+abc^2$
15. $24a^2xy^2-36x^2y^4$
16. a^3+a^2+a
17. $4x^2-8x+2$
18. $15y^3+20y^2-5y$
19. $a^3-a^2x+ax^2$
20. $2a^2x+2ax^2-3ax$
21. $x^3+x^5-x^7$
22. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$
23. $34ax^2+51a^2y-68ay^2$
24. $96-48mn^2+144n^3$
25. $a^2b^2c^2-a^2c^2x^2+a^2c^2y^2$
26. $55m^2n^3x+110m^2n^3x^2-220m^2y^3$
27. $93a^3x^2y-62a^2x^3y^2-124a^2x$
28. $x-x^2+x^3-x^4$
29. $a^6-3a^4+8a^3-4a^2$
30. $25x^7-10x^5+15x^3-5x^2$
31. $x^{15}-x^{12}+2x^9-3x^6$
32. $9a^2-12ab+15a^3b^2-24ab^3$
33. $16x^3y^2-8x^2y-24x^4y^2-40x^2y^3$
34. $12m^2n+24m^3n^2-36m^4n^3+48m^5n^4$
35. $100a^2b^3c-150ab^2c^2+50ab^3c^3-200abc^2$
36. $x^5-x^4+x^3-x^2+x$
37. $a^2-2a^3+3a^4-4a^5+6a^6$
38. $3a^2b+6ab-5a^3b^2+8a^2bx+4ab^2m$
39. $a^{20}-a^{16}+a^{12}-a^8+a^4-a^2$

b) Factor común polinomio.

1. Descomponer $x(a+b)+m(a+b)$.

Los dos términos de esta expresión tienen de factor común el binomio $(a+b)$.

Escribo $(a+b)$ como coeficiente de un paréntesis y dentro del paréntesis escribo los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a+b)$, o sea:

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)}=x \text{ y } \frac{m(a+b)}{(a+b)}=m \text{ y tendremos:}$$

$$x(a+b)+m(a+b)=(a+b)\,(x+m) \quad \textbf{R.}$$

2. Descomponer $2x(a-1)-y(a-1)$.

Factor común $(a-1)$. Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a-1)$, tenemos:

$$\frac{2x(a-1)}{(a-1)}=2x \text{ y } \frac{-y(a-1)}{(a-1)}=-y$$

Tendremos: $2x(a-1)-y(a-1)=(a-1)(2x-y)$ **R.**

3. Descomponer $m(x+2)+x+2$.

Esta expresión podemos escribirla: $m(x+2)+(x+2)=m(x+2)+1(x+2)$

Factor común: $(x+2)$

Tendremos:

$$m(x+2)+1(x+2)=(x+2)(m+1) \quad \textbf{R.}$$

4. Descomponer $a(x+1)-x-1$.

Introduciendo los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo – se tiene:

$$a(x+1)-x-1=a(x+1)-(x+1)=a(x+1)-1(x+1)=(x+1)(a-1) \quad \textbf{R.}$$

5. Factorizar $2x(x+y+z)-x-y-z$.

Tendremos:

$$2x(x+y+z)-x-y-z=2x(x+y+z)-(x+y+z)=(x+y+z)(2x-1) \quad \textbf{R.}$$

6. Factorizar $(x-a)(y+2)+b(y+2)$.

Factor común $(y+2)$. Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre $(y+2)$ tenemos:

$$\frac{(x-a)(y+2)}{(y+2)}=x-a \text{ y } \frac{b(y+2)}{(y+2)}=b\text{; luego:}$$

$$(x-a)(y+2)+b(y+2)=(y+2)(x-a+b) \quad \textbf{R.}$$

7. Descomponer $(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3)$.

Dividiendo entre el factor común $(x-1)$ tenemos:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=(x+2) \text{ y } \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)}=-(x-3)$$

Por tanto:

$$(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3)=(x-1)[(x+2)-(x-3)]$$
$$=(x-1)(x+2-x+3)=(x-1)(5)=5(x-1) \quad \textbf{R.}$$

8. Factorizar $x(a-1)+y(a-1)-a+1$.

$$x(a-1)+y(a-1)-a+1=x(a-1)+y(a-1)-(a-1)=(a-1)(x+y-1) \quad \textbf{R.}$$

Ejercicio 90

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. $a(x+1)+b(x+1)$
2. $x(a+1)-3(a+1)$
3. $2(x-1)+y(x-1)$
4. $m(a-b)+(a-b)n$
5. $2x(n-1)-3y(n-1)$
6. $a(n+2)+n+2$
7. $x(a+1)-a-1$
8. $a^2+1-b(a^2+1)$
9. $3x(x-2)-2y(x-2)$
10. $1-x+2a(1-x)$
11. $4x(m-n)+n-m$
12. $-m-n+x(m+n)$
13. $a^3(a-b+1)-b^2(a-b+1)$
14. $4m(a^2+x-1)+3n(x-1+a^2)$
15. $x(2a+b+c)-2a-b-c$
16. $(x+y)(n+1)-3(n+1)$
17. $(x+1)(x-2)+3y(x-2)$
18. $(a+3)(a+1)-4(a+1)$

19. $(x^2+2)(m-n)+2(m-n)$
20. $a(x-1)-(a+2)(x-1)$
21. $5x(a^2+1)+(x+1)(a^2+1)$
22. $(a+b)(a-b)-(a-b)(a-b)$
23. $(m+n)(a-2)+(m-n)(a-2)$
24. $(x+m)(x+1)-(x+1)(x-n)$
25. $(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4)$
26. $(a+b-1)(a^2+1)-a^2-1$
27. $(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)$
28. $3x(x-1)-2y(x-1)+z(x-1)$
29. $a(n+1)-b(n+1)-n-1$
30. $x(a+2)-a-2+3(a+2)$
31. $(1+3a)(x+1)-2a(x+1)+3(x+1)$
32. $(3x+2)(x+y-z)-(3x+2)-(x+y-1)(3x+2)$

CASO II

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Ejemplos

1) Descomponer $ax+bx+ay+by$.

Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común y. Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo + porque el tercer término tiene el signo + y tendremos:

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by &= (ax+bx)+(ay+by)\\ &= x(a+b)+y(a+b)\\ &= (a+b)(x+y) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal que los dos términos que se agrupan tengan algún factor común, y siempre que *las cantidades que quedan dentro de los paréntesis* después de sacar el factor común en cada grupo, *sean exactamente iguales*. Si esto no es posible lograrlo la expresión dada no se puede descomponer por este método.

Así en el ejemplo anterior podemos agrupar el 1º y 3er términos que tienen el factor común a y el 2º y 4º que tienen el factor común b y tendremos:

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by &= (ax+ay)+(bx+by)\\ &= a(x+y)+b(x+y)\\ &= (x+y)(a+b) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

resultado idéntico al anterior, ya que el orden de los factores es indiferente.

2) Factorizar $3m^2-6mn+4m-8n$.

Los dos primeros términos tienen el factor común $3m$ y los dos últimos el factor común 4. Agrupando, tenemos:

$$\begin{aligned} 3m^2-6mn+4m-8n &= (3m^2-6mn)+(4m-8n)\\ &= 3m(m-2n)+4(m-2n)\\ &= (m-2n)(3m+4) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

3) Descomponer $2x^2-3xy-4x+6y$.

Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común 2, luego los agrupamos pero introducimos los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo − porque el signo del 3er término es −, para lo cual hay que *cambiarles el signo* y tendremos:

$$\begin{aligned} 2x^2-3xy-4x+6y &= (2x^2-3xy)-(4x-6y)\\ &= x(2x-3y)-2(2x-3y)\\ &= (2x-3y)(x-2) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

También podíamos haber agrupado el 1° y 3° que tienen el factor común $2x$, y el 2° y 4° que tienen el factor común $3y$ y tendremos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3xy - 4x + 6y &= (2x^2 - 4x) - (3xy - 6y) \\ &= 2x(x-2) - 3y(x-2) \\ &= (x-2)(2x-3y) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

4) Descomponer $x + z^2 - 2ax - 2az^2$.

$$\begin{aligned} x + z^2 - 2ax - 2az^2 &= (x + z^2) - (2ax + 2az^2) \\ &= (x + z^2) - 2a(x + z^2) \\ &= (x + z^2)(1 - 2a) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

Agrupando 1° y 3°, 2° y 4°, tenemos:

$$\begin{aligned} x + z^2 - 2ax - 2az^2 &= (x - 2ax) + (z^2 - 2az^2) \\ &= x(1-2a) + z^2(1-2a) \\ &= (1-2a)(x + z^2) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

5) Factorizar $3ax - 3x + 4y - 4ay$.

$$\begin{aligned} 3ax - 3x + 4y - 4ay &= (3ax - 3x) + (4y - 4ay) \\ &= 3x(a-1) + 4y(1-a) \\ &= 3x(a-1) - 4y(a-1) \\ &= (a-1)(3x-4y) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

Obsérvese que en la segunda línea del ejemplo anterior los binomios $(a-1)$ y $(1-a)$ tienen los signos distintos; para hacerlos iguales cambiamos los signos al binomio $(1-a)$ convirtiéndolo en $(a-1)$, pero para que el producto $4y(1-a)$ no variara de signo le *cambiamos el signo al otro factor* $4y$ convirtiéndolo en $-4y$. De este modo, como hemos cambiado el signo a un número par de factores, el signo del producto no varía.

En el ejemplo anterior, agrupando 1° y 4° y 2° y 3° tenemos:

$$\begin{aligned} 3ax - 3x + 4y - 4ay &= (3ax - 4ay) - (3x - 4y) \\ &= a(3x - 4y) - (3x - 4y) \\ &= (3x - 4y)(a-1) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

6) Factorizar $ax - ay + az + x - y + z$.

$$\begin{aligned} ax - ay + az + x - y + z &= (ax - ay + az) + (x - y + z) \\ &= a(x - y + z) + (x - y + z) \\ &= (x - y + z)(a + 1) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

7) Descomponer $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$.

Agrupando 1° y 3°, 2° y 4°, 5° y 6°, tenemos:

$$\begin{aligned} a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y &= (a^2x - 2a^2y) - (ax^2 - 2axy) + (x^3 - 2x^2y) \\ &= a^2(x - 2y) - ax(x - 2y) + x^2(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(a^2 - ax + x^2) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

Agrupando de otro modo:

$$\begin{aligned} a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y &= (a^2x - ax^2 + x^3) - (2a^2y - 2axy + 2x^2y) \\ &= x(a^2 - ax + x^2) - 2y(a^2 - ax + x^2) \\ &= (a^2 - ax + x^2)(x - 2y) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

Ejercicio 91

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 + ab + ax + bx$
2. $am - bm + an - bn$
3. $ax - 2bx - 2ay + 4by$
4. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
5. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$
6. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
7. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$
8. $x + x^2 - xy^2 - y^2$
9. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
10. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$
11. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$
12. $6ax + 3a + 1 + 2x$
13. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
14. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$
15. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$

16. $6m - 9n + 21nx - 14mx$
17. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
18. $1 + a + 3ab + 3b$
19. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
20. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
21. $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$
22. $a^3 + a^2 + a + 1$
23. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
24. $2am - 2an + 2a - m + n - 1$
25. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$
26. $a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2$
27. $3a^3 - 3a^2b + 9ab^2 - a^2 + ab - 3b^2$
28. $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$
29. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$
30. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$

CASO III

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Una cantidad es **cuadrado perfecto** cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea, cuando es el producto de dos factores iguales. 136

Así, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $2a$.

En efecto: $(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$ y $2a$, que multiplicada por sí misma da $4a^2$, es la **raíz cuadrada** de $4a^2$.

Obsérvese que $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a) = 4a^2$; luego, $-2a$ es también la raíz cuadrada de $4a^2$.

Lo anterior nos dice que **la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos: + y –.**

En este capítulo nos referimos sólo a la raíz **positiva**.

RAÍZ CUADRADA DE UN MONOMIO 137

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada letra por 2.

Así, la raíz cuadrada de $9a^2b^4$ es $3ab^2$ porque $(3ab^2)^2 = 3ab^2 \times 3ab^2 = 9a^2b^4$.

La raíz cuadrada de $36x^6y^8$ es $6x^3y^4$.

Un **trinomio** es **cuadrado perfecto** cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales. 138

Así, $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $a + b$.

En efecto:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Del mismo modo, $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ luego $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un **trinomio cuadrado perfecto**.

REGLA PARA CONOCER SI UN TRINOMIO ES CUADRADO PERFECTO 139

Un trinomio ordenado en relación con una letra es cuadrado perfecto cuando el primero y tercero términos son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

4) Factorizar $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$.

Este trinomio es cuadrado perfecto porque: raíz cuadrada de $x^2 = x$; raíz cuadrada de $\frac{b^2}{4} = \frac{b}{2}$ y el doble producto de estas raíces: $2 \times x \times \frac{b}{2} = bx$,

luego: $$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \quad \textbf{R.}$$

5) Factorizar $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$.

Es cuadrado perfecto porque: raíz cuadrada de $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; raíz cuadrada de $\frac{b^2}{9} = \frac{b}{3}$ y $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{b}{3}$, luego:

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$$

CASO ESPECIAL

6) Descomponer $a^2 + 2a(a-b) + (a-b)^2$.

La regla anterior puede aplicarse a casos en que el primer o tercer términos del trinomio o ambos son expresiones compuestas. Así, en este caso se tiene:

$$a^2 + 2a(a-b) + \underset{(a-b)}{(a-b)^2} = [a + (a-b)]^2 = (a + a - b)^2 = (2a-b)^2 \quad \textbf{R.}$$

7) Factorizar $(x+y)^2 - 2(x+y)(a+x) + (a+x)^2$.

$$\begin{aligned} \underset{(x+y)}{(x+y)^2} - 2(x+y)(a+x) + \underset{(a+x)}{(a+x)^2} &= [(x+y) - (a+x)]^2 \\ &= (x+y-a-x)^2 \\ &= (y-a)^2 = (a-y)^2 \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

Ejercicio 92

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 - 2ab + b^2$
2. $a^2 + 2ab + b^2$
3. $x^2 - 2x + 1$
4. $y^4 + 1 + 2y^2$
5. $a^2 - 10a + 25$
6. $9 - 6x + x^2$
7. $16 + 40x^2 + 25x^4$
8. $1 + 49a^2 - 14a$
9. $36 + 12m^2 + m^4$
10. $1 - 2a^3 + a^6$
11. $a^8 + 18a^4 + 81$
12. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$
13. $4x^2 - 12xy + 9y^2$
14. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$
15. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$
16. $1 + a^{10} - 2a^5$
17. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$
18. $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$
19. $121 + 198x^6 + 81x^{12}$
20. $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
21. $16 - 104x^2 + 169x^4$
22. $400x^{10} + 40x^5 + 1$
23. $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
24. $1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$
25. $a^4 - a^2b^2 + \frac{b^4}{4}$
26. $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$
27. $16x^6 - 2x^3y^2 + \frac{y^4}{16}$
28. $\frac{n^2}{9} + 2mn + 9m^2$
29. $a^2 + 2a(a+b) + (a+b)^2$
30. $4 - 4(1-a) + (1-a)^2$
31. $4m^2 - 4m(n-m) + (n-m)^2$
32. $(m-n)^2 + 6(m-n) + 9$
33. $(a+x)^2 - 2(a+x)(x+y) + (x+y)^2$
34. $(m+n)^2 - 2(a-m)(m+n) + (a-m)^2$
35. $4(1+a)^2 - 4(1+a)(b-1) + (b-1)^2$
36. $9(x-y)^2 + 12(x-y)(x+y) + 4(x+y)^2$

CASO IV

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

141 En los productos notables (**89**) se vio que **la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea,** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; luego, recíprocamente,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

142 REGLA PARA FACTORIZAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

1) Factorizar $1-a^2$.

La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de a^2 es a. Multiplico la suma de estas raíces $(1+a)$ por la diferencia $(1-a)$ y tendremos:

$$1-a^2=(1+a)(1-a)\quad \textbf{R.}$$

2) Descomponer $16x^2-25y^4$.

La raíz cuadrada de $16x^2$ es $4x$; la raíz cuadrada de $25y^4$ es $5y^2$.

Multiplico la suma de estas raíces $(4x+5y^2)$ por su diferencia $(4x-5y^2)$ y tendremos:

$$16x^2-25y^4=(4x+5y^2)(4x-5y^2)\quad \textbf{R.}$$

3) Factorizar $49x^2y^6z^{10}-a^{12}$.

$$49x^2y^6z^{10}-a^{12}=(7xy^3z^5+a^6)(7xy^3z^5-a^6)\quad \textbf{R.}$$

4) Descomponer $\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}$.

La raíz cuadrada de $\frac{a^2}{4}$ es $\frac{a}{2}$ y la raíz cuadrada de $\frac{b^4}{9}$ es $\frac{b^2}{3}$. Tendremos:

$$\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{3}\right)\quad \textbf{R.}$$

5) Factorizar $a^{2n}-9b^{4m}$.

$$a^{2n}-9b^{4m}=(a^n+3b^{2m})(a^n-3b^{2m})\quad \textbf{R.}$$

Ejercicio 93

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. x^2-y^2
2. a^2-1
3. a^2-4
4. $9-b^2$
5. $1-4m^2$
6. $16-n^2$
7. a^2-25
8. $1-y^2$
9. $4a^2-9$
10. $25-36x^4$
11. $1-49a^2b^2$
12. $4x^2-81y^4$
13. $a^2b^8-c^2$
14. $100-x^2y^6$
15. $a^{10}-49b^{12}$
16. $25x^2y^4-121$
17. $100m^2n^4-169y^6$
18. $a^2m^4n^6-144$
19. $196x^2y^4-225z^{12}$
20. $256a^{12}-289b^4m^{10}$
21. $1-9a^2b^4c^6d^8$

22. $361x^{14}-1$
23. $\frac{1}{4}-9a^2$
24. $1-\frac{a^2}{25}$
25. $\frac{1}{16}-\frac{4x^2}{49}$
26. $\frac{a^2}{36}-\frac{x^6}{25}$
27. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2z^4}{81}$
28. $\frac{x^6}{49}-\frac{4a^{10}}{121}$
29. $100m^2n^4-\frac{1}{16}x^8$
30. $a^{2n}-b^{2n}$
31. $4x^{2n}-\frac{1}{9}$
32. $a^{4n}-225b^4$
33. $16x^{6m}-\frac{y^{2n}}{49}$
34. $49a^{10n}-\frac{b^{12x}}{81}$
35. $a^{2n}b^{4n}-\frac{1}{25}$
36. $\frac{1}{100}-x^{2n}$

CASO ESPECIAL

1. Factorizar $(a+b)^2-c^2$.

La regla empleada en los ejemplos anteriores es aplicable a las diferencias de cuadrados en que uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas.

Así, en este caso, tenemos:

La raíz cuadrada de $(a+b)^2$ es $(a+b)$.
La raíz cuadrada de c^2 es c.

Multiplico la suma de estas raíces $(a+b)+c$ por la diferencia $(a+b)-c$ y tengo:

$$\begin{aligned}(a+b)^2-c^2 &= [(a+b)+c][(a+b)-c]\\ &= (a+b+c)(a+b-c) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

2. Descomponer $4x^2-(x+y)^2$.

La raíz cuadrada de $4x^2$ es $2x$.
La raíz cuadrada de $(x+y)^2$ es $(x+y)$.

Multiplico la suma de estas raíces $2x+(x+y)$ por la diferencia $2x-(x+y)$ y tenemos:

$$\begin{aligned}4x^2-(x+y)^2 &= [2x+(x+y)][2x-(x+y)]\\ &= (2x+x+y)(2x-x-y)\\ &= (3x+y)(x-y) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

3. Factorizar $(a+x)^2-(x+2)^2$.

La raíz cuadrada de $(a+x)^2$ es $(a+x)$.
La raíz cuadrada de $(x+2)^2$ es $(x+2)$.

Multiplico la suma de estas raíces $(a+x)+(x+2)$ por la diferencia $(a+x)-(x+2)$ y tengo:

$$\begin{aligned}(a+x)^2-(x+2)^2 &= [(a+x)+(x+2)][(a+x)-(x+2)]\\ &= (a+x+x+2)(a+x-x-2)\\ &= (a+2x+2)(a-2) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

Ejercicio 94

Descomponer en dos factores y simplificar, si es posible:

1. $(x+y)^2-a^2$
2. $4-(a+1)^2$
3. $9-(m+n)^2$
4. $(m-n)^2-16$
5. $(x-y)^2-4z^2$
6. $(a+2b)^2-1$
7. $1-(x-2y)^2$
8. $(x+2a)^2-4x^2$
9. $(a+b)^2-(c+d)^2$
10. $(a-b)^2-(c-d)^2$
11. $(x+1)^2-16x^2$
12. $64m^2-(m-2n)^2$
13. $(a-2b)^2-(x+y)^2$
14. $(2a-c)^2-(a+c)^2$
15. $(x+1)^2-4x^2$
16. $36x^2-(a+3x)^2$
17. $a^6-(a-1)^2$
18. $(a-1)^2-(m-2)^2$
19. $(2x-3)^2-(x-5)^2$
20. $1-(5a+2x)^2$
21. $(7x+y)^2-81$
22. $m^6-(m^2-1)^2$
23. $16a^{10}-(2a^2+3)^2$
24. $(x-y)^2-(c+d)^2$
25. $(2a+b-c)^2-(a+b)^2$
26. $100-(x-y+z)^2$
27. $x^2-(y-x)^2$
28. $(2x+3)^2-(5x-1)^2$
29. $(x-y+z)^2-(y-z+2x)^2$
30. $(2x+1)^2-(x+4)^2$
31. $(a+2x+1)^2-(x+a-1)^2$
32. $4(x+a)^2-49y^2$
33. $25(x-y)^2-4(x+y)^2$
34. $36(m+n)^2-121(m-n)^2$

CASOS ESPECIALES

COMBINACIÓN DE LOS CASOS III Y IV

143 Estudiamos a continuación la descomposición de expresiones compuestas en las cuales mediante un arreglo conveniente de sus términos se obtiene uno o dos trinomios cuadrados perfectos y descomponiendo estos trinomios (Caso III) se obtiene una diferencia de cuadrados (Caso IV).

1. Factorizar $a^2+2ab+b^2-1$.

Aquí tenemos que $a^2+2ab+b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto; luego:

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2-1 &= (a^2+2ab+b^2)-1 \\ \text{(factorizando el trinomio)} &= (a+b)^2-1 \\ \text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} &= (a+b+1)(a+b-1) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

2. Descomponer $a^2+m^2-4b^2-2am$.

Ordenando esta expresión, podemos escribirla: $a^2-2am+m^2-4b^2$, y vemos que $a^2-2am+m^2$ es un trinomio cuadrado perfecto; luego:

$$\begin{aligned} a^2-2am+m^2-4b^2 &= (a^2-2am+m^2)-4b^2 \\ \text{(factorizando el trinomio)} &= (a-m)^2-4b^2 \\ \text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} &= (a-m+2b)(a-m-2b) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

3. Factorizar $9a^2-x^2+2x-1$.

Introduciendo los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo – para que x^2 y 1 se hagan positivos, tendremos:

$$\begin{aligned} 9a^2-x^2+2x-1 &= 9a^2-(x^2-2x+1) \\ \text{(factorizando el trinomio)} &= 9a^2-(x-1)^2 \\ \text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} &= [3a+(x-1)][3a-(x-1)] \\ &= (3a+x-1)(3a-x+1) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

4. Descomponer $4x^2 - a^2 + y^2 - 4xy + 2ab - b^2$.

El término $4xy$ nos sugiere que es el segundo término de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene x^2 y cuyo tercer término tiene y^2 y el término $2ab$ nos sugiere que es el segundo término de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene a^2 y cuyo tercer término tiene b^2; pero como $-a^2$ y $-b^2$ son negativos, tenemos que introducir este último trinomio en un paréntesis precedido del signo – para hacerlos positivos, y tendremos:

$$
\begin{aligned}
4x^2 - a^2 + y^2 - 4xy + 2ab - b^2 &= (4x^2 - 4xy + y^2) - (a^2 - 2ab + b^2)\\
\text{(factorizando los trinomios)} &= (2x - y)^2 - (a - b)^2\\
\text{(descomponer la diferencia de cuadrados)} &= [(2x - y) + (a - b)][(2x - y) - (a - b)]\\
&= (2x - y + a - b)(2x - y - a + b) \quad \textbf{R.}
\end{aligned}
$$

5. Factorizar $a^2 - 9n^2 - 6mn + 10ab + 25b^2 - m^2$.

El término $10ab$ nos sugiere que es el segundo término de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene a^2 y cuyo tercer término tiene b^2, y $6mn$ nos sugiere que es el 2º término de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene m^2 y cuyo tercer término tiene n^2; luego, tendremos:

$$
\begin{aligned}
a^2 - 9n^2 - 6mn + 10ab + 25b^2 - m^2 &= (a^2 + 10ab + 25b^2) - (m^2 + 6mn + 9n^2)\\
\text{(descomponiendo los trinomios)} &= (a + 5b)^2 - (m + 3n)^2\\
\text{(descomponer la diferencia de cuadrados)} &= [(a + 5b) + (m + 3n)][(a + 5b) - (m + 3n)]\\
&= (a + 5b + m + 3n)(a + 5b - m - 3n) \quad \textbf{R.}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 95

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - m^2$
3. $m^2 + 2mn + n^2 - 1$
4. $a^2 - 2a + 1 - b^2$
5. $n^2 + 6n + 9 - c^2$
6. $a^2 + x^2 + 2ax - 4$
7. $a^2 + 4 - 4a - 9b^2$
8. $x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$
9. $a^2 - 6ay + 9y^2 - 4x^2$
10. $4x^2 + 25y^2 - 36 + 20xy$
11. $9x^2 - 1 + 16a^2 - 24ax$
12. $1 + 64a^2b^2 - x^4 - 16ab$
13. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$
14. $1 - a^2 + 2ax - x^2$
15. $m^2 - x^2 - 2xy - y^2$
16. $c^2 - a^2 + 2a - 1$
17. $9 - n^2 - 25 - 10n$
18. $4a^2 - x^2 + 4x - 4$
19. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$
20. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$
21. $9x^2 - a^2 - 4m^2 + 4am$
22. $16x^2y^2 + 12ab - 4a^2 - 9b^2$
23. $-a^2 + 25m^2 - 1 - 2a$
24. $49x^4 - 25x^2 - 9y^2 + 30xy$
25. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$
26. $x^2 + 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2$
27. $a^2 + 4b^2 + 4ab - x^2 - 2ax - a^2$
28. $x^2 + 4a^2 - 4ax - y^2 - 9b^2 + 6by$
29. $m^2 - x^2 + 9n^2 + 6mn - 4ax - 4a^2$
30. $9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab$
31. $2am - x^2 - 9 + a^2 + m^2 - 6x$
32. $x^2 - 9a^4 + 6a^2b + 1 + 2x - b^2$
33. $16a^2 - 1 - 10m + 9x^2 - 24ax - 25m^2$
34. $9m^2 - a^2 + 2acd - c^2d^2 + 100 - 60m$
35. $4a^2 - 9x^2 + 49b^2 - 30xy - 25y^2 - 28ab$
36. $225a^2 - 169b^2 + 1 + 30a + 26bc - c^2$
37. $x^2 - y^2 + 4 + 4x - 1 - 2y$
38. $a^2 - 16 - x^2 + 36 + 12a - 8x$

9) Factorizar $a^2 - 66a + 1{,}080$.

$$a^2 - 66a + 1{,}080 \quad (a - \quad)(a - \quad)$$

Necesitamos dos números *cuya suma* sea 66 y cuyo producto sea 1,080.
Descomponiendo 1,080, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 1{,}080 & 2 \\ 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$2 \times 2 \times 2 = 8 \qquad 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 105 \qquad 105 + 8 = 113$, no sirven
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \qquad 3 \times 3 \times 5 = 45 \qquad 45 + 24 = 69$, no sirven
$2 \times 3 \times 5 = 30 \qquad 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \qquad 30 + 36 = 66$, sirven

Los números que necesitamos son 30 y 36 porque su suma es 66 y su producto necesariamente es 1,080 ya que para obtener estos números hemos empleado todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 1,080, luego:

$$a^2 - 66a + 1{,}080 = (a - 36)(a - 30) \quad \textbf{R.}$$

98 Ejercicio

Factorizar o descomponer en dos factores:

1. $x^2 + 7x + 10$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x^2 + 3x - 10$
4. $x^2 + x - 2$
5. $a^2 + 4a + 3$
6. $m^2 + 5m - 14$
7. $y^2 - 9y + 20$
8. $x^2 - 6 - x$
9. $x^2 - 9x + 8$
10. $c^2 + 5c - 24$
11. $x^2 - 3x + 2$
12. $a^2 + 7a + 6$
13. $y^2 - 4y + 3$
14. $12 - 8n + n^2$
15. $x^2 + 10x + 21$
16. $a^2 + 7a - 18$
17. $m^2 - 12m + 11$
18. $x^2 - 7x - 30$
19. $n^2 + 6n - 16$
20. $20 + a^2 - 21a$
21. $y^2 + y - 30$
22. $28 + a^2 - 11a$
23. $n^2 - 6n - 40$
24. $x^2 - 5x - 36$
25. $a^2 - 2a - 35$
26. $x^2 + 14x + 13$
27. $a^2 + 33 - 14a$
28. $m^2 + 13m - 30$
29. $c^2 - 13c - 14$
30. $x^2 + 15x + 56$
31. $x^2 - 15x + 54$
32. $a^2 + 7a - 60$
33. $x^2 - 17x - 60$
34. $x^2 + 8x - 180$
35. $m^2 - 20m - 300$
36. $x^2 + x - 132$
37. $m^2 - 2m - 168$
38. $c^2 + 24c + 135$
39. $m^2 - 41m + 400$
40. $a^2 + a - 380$
41. $x^2 + 12x - 364$
42. $a^2 + 42a + 432$
43. $m^2 - 30m - 675$
44. $y^2 + 50y + 336$
45. $x^2 - 2x - 528$
46. $n^2 + 43n + 432$
47. $c^2 - 4c - 320$
48. $m^2 - 8m - 1{,}008$

CASOS ESPECIALES

147

El procedimiento anterior es aplicable a la factorización de trinomios que siendo de la forma $x^2 + bx + c$ difieren algo de los estudiados anteriormente.

Ejemplos

1) Factorizar $x^4 - 5x^2 - 50$.
El primer término de cada factor binomio será la raíz cuadrada de x^4 o sea x^2:

$$x^4 - 5x^2 - 50 \quad (x^2 - \quad)(x^2 + \quad)$$

Buscamos dos números cuya *diferencia* (signos distintos en los binomios) sea 5 y cuyo *producto* sea 50. Esos números son 10 y 5. Tendremos:

$$x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 - 10)(x^2 + 5) \quad \textbf{R.}$$

Factorizando $x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4)$, pero como el trinomio está precedido de – su descomposición también debe ir precedida de – y tendremos:

$$-(x - 7)(x + 4)$$

Para que desaparezca el signo – del producto $-(x - 7)(x + 4)$, o sea, para convertirlo en +, basta *cambiarle el signo a un factor*, por ejemplo, a $(x - 7)$ y quedará:

$$28 + 3x - x^2 = (7 - x)(x + 4) \quad \textbf{R.}$$

8) Factorizar $30 + y^2 - y^4$.

$$30 + y^2 - y^4 = -(y^4 - y^2 - 30) = -(y^2 - 6)(y^2 + 5) = (6 - y^2)(y^2 + 5) \quad \textbf{R.}$$

Ejercicio 99

Factorizar:

1. $x^4 + 5x^2 + 4$
2. $x^6 - 6x^3 - 7$
3. $x^8 - 2x^4 - 80$
4. $x^2y^2 + xy - 12$
5. $(4x)^2 - 2(4x) - 15$
6. $(5x)^2 + 13(5x) + 42$
7. $x^2 + 2ax - 15a^2$
8. $a^2 - 4ab - 21b^2$
9. $(x - y)^2 + 2(x - y) - 24$
10. $5 + 4x - x^2$
11. $x^{10} + x^5 - 20$
12. $m^2 + mn - 56n^2$
13. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$
14. $(2x)^2 - 4(2x) + 3$
15. $(m - n)^2 + 5(m - n) - 24$
16. $x^8 + x^4 - 240$
17. $15 + 2y - y^2$
18. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99$
19. $c^2 + 11cd + 28d^2$
20. $25x^2 - 5(5x) - 84$
21. $a^2 - 21ab + 98b^2$
22. $x^4y^4 + x^2y^2 - 132$
23. $48 + 2x^2 - x^4$
24. $(c + d)^2 - 18(c + d) + 65$
25. $a^2 + 2axy - 440x^2y^2$
26. $m^6n^6 - 21m^3n^3 + 104$
27. $14 + 5n - n^2$
28. $x^6 + x^3 - 930$
29. $(4x^2)^2 - 8(4x^2) - 105$
30. $x^4 + 5abx^2 - 36a^2b^2$
31. $a^4 - a^2b^2 - 156b^4$
32. $21a^2 + 4ax - x^2$
33. $x^8y^8 - 15ax^4y^4 - 100a^2$
34. $(a - 1)^2 + 3(a - 1) - 108$
35. $m^2 + abcm - 56a^2b^2c^2$
36. $(7x^2)^2 + 24(7x^2) + 128$

CASO VII

TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

148

Son trinomios de esta forma:

$$2x^2 + 11x + 5$$
$$3a^2 + 7a - 6$$
$$10n^2 - n - 2$$
$$7m^2 - 23m + 6$$

que se diferencian de los trinomios estudiados en el caso anterior en que **el primer término tiene un coeficiente distinto de 1.**

149

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Ejemplos

1) Factorizar $6x^2 - 7x - 3$.

Multipliquemos el trinomio por el coeficiente de x^2 que es 6 y dejando *indicado* el producto de 6 por $7x$ se tiene:

$$36x^2 - 6(7x) - 18$$

Pero $36x^2 = (6x)^2$ y $6(7x) = 7(6x)$ luego podemos escribir: $(6x)^2 - 7(6x) - 18$.

Descomponiendo este trinomio según se vio en el caso anterior, el 1[er] término de cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$ o sea $6x$: $(6x - \quad)(6x + \quad)$.
Dos números cuya diferencia sea 7 y cuyo producto sea 18 son 9 y 2. Tendremos: $(6x - 9)(6x + 2)$.
Como al principio multiplicamos el trinomio dado por 6, ahora tenemos que dividir entre 6, para no alterar el trinomio, y tendremos: $\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}$
pero como ninguno de los binomios es divisible entre 6, descomponemos 6 en 2×3 y dividiendo $(6x - 9)$ entre 3 y $(6x + 2)$ entre 2 se tendrá:

$$\frac{(6x-9)(6x+2)}{2\times 3} = (2x-3)(3x+1)$$

Luego: $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$ **R.**

2) Factorizar $20x^2 + 7x - 6$.
Multiplicando el trinomio por 20, tendremos: $(20x)^2 + 7(20x) - 120$.
Descomponiendo este trinomio, tenemos: $(20x + 15)(20x - 8)$.
Para cancelar la multiplicación por 20, tenemos que dividir entre 20, pero como ninguno de los dos binomios es divisible entre 20, descomponemos el 20 en 5×4 y dividiendo el factor $(20x + 15)$ entre 5 y $(20x - 8)$ entre 4 tendremos:

$$\frac{(20x+15)(20x-8)}{5\times 4} = (4x+3)(5x-2)$$

Luego: $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$ **R.**

3) Factorizar $18a^2 - 13a - 5$.
Multiplicando por 18: $(18a)^2 - 13(18a) - 90$
Factorizando este trinomio: $(18a - 18)(18a + 5)$
Dividiendo entre 18, para lo cual, como el primer binomio $18a - 18$ es divisible entre 18 basta dividir este factor entre 18, tendremos:

$$\frac{(18a-18)(18a+5)}{18} = (a-1)(18a+5)$$

Luego: $18a^2 - 13a - 5 = (a - 1)(18a + 5)$ **R.**

Ejercicio 100

Factorizar:

1. $2x^2 + 3x - 2$
2. $3x^2 - 5x - 2$
3. $6x^2 + 7x + 2$
4. $5x^2 + 13x - 6$
5. $6x^2 - 6 - 5x$
6. $12x^2 - x - 6$
7. $4a^2 + 15a + 9$
8. $3 + 11a + 10a^2$
9. $12m^2 - 13m - 35$
10. $20y^2 + y - 1$
11. $8a^2 - 14a - 15$
12. $7x^2 - 44x - 35$
13. $16m + 15m^2 - 15$
14. $2a^2 + 5a + 2$
15. $12x^2 - 7x - 12$
16. $9a^2 + 10a + 1$
17. $20n^2 - 9n - 20$
18. $21x^2 + 11x - 2$
19. $m - 6 + 15m^2$
20. $15a^2 - 8a - 12$
21. $9x^2 + 37x + 4$
22. $44n + 20n^2 - 15$
23. $14m^2 - 31m - 10$
24. $2x^2 + 29x + 90$
25. $20a^2 - 7a - 40$
26. $4n^2 + n - 33$
27. $30x^2 + 13x - 10$

CASOS ESPECIALES

1. Factorizar $15x^4 - 11x^2 - 12$.

Multiplicando por 15: $(15x^2)^2 - 11(15x^2) - 180$
Descomponiendo este trinomio, el primer término de cada factor será la raíz cuadrada de $(15x^2)^2$ o sea $15x^2$: $(15x^2 - 20)(15x^2 + 9)$

Dividiendo entre 15: $\frac{(15x^2-20)(15x^2+9)}{5\times 3} = (3x^2-4)(5x^2+3)$ **R.**

2. Factorizar $12x^2y^2 + xy - 20$.

Multiplicando por 12: $(12xy)^2 + 1(12xy) - 240$
Factorizando este trinomio: $(12xy + 16)(12xy - 15)$

Dividiendo entre 12: $\frac{(12xy+16)(12xy-15)}{4\times 3} = (3xy+4)(4xy-5)$ **R.**

3. Factorizar $6x^2 - 11ax - 10a^2$.

Multiplicando por 6: $(6x)^2 - 11a(6x) - 60a^2$
Factorizando este trinomio: $(6x - 15a)\ (6x + 4a)$

Dividiendo entre 6: $\frac{(6x-15a)(6x+4a)}{3\times 2} = (2x-5a)(3x+2a)$ **R.**

4. Factorizar $20 - 3x - 9x^2$.

Ordenando el trinomio en orden descendente respecto de x: $-9x^2 - 3x + 20$
Introduciéndolo en un paréntesis precedido del signo $-$: $-(9x^2 + 3x - 20)$
Multiplicando por 9: $-[(9x)^2 + 3(9x) - 180]$
Factorizando este trinomio: $-(9x + 15)\ (9x - 12)$

Dividiendo entre 9: $\frac{-(9x+15)\ (9x-12)}{3\times 3} = -(3x+5)(3x-4)$

Para que desaparezca el signo $-$ de este producto, o sea para convertirlo en $+$, hay que cambiar el signo a un factor, por ejemplo, a $(3x - 4)$, que se convertirá en $(4 - 3x)$, y tendremos: $20 - 3x - 9x^2 = (3x + 5)(4 - 3x)$ **R.**

Ejercicio 101

Factorizar:

1. $6x^4 + 5x^2 - 6$
2. $5x^6 + 4x^3 - 12$
3. $10x^8 + 29x^4 + 10$
4. $6a^2x^2 + 5ax - 21$
5. $20x^2y^2 + 9xy - 20$
6. $15x^2 - ax - 2a^2$
7. $12 - 7x - 10x^2$
8. $21x^2 - 29xy - 72y^2$
9. $6m^2 - 13am - 15a^2$
10. $14x^4 - 45x^2 - 14$
11. $30a^2 - 13ab - 3b^2$
12. $7x^6 - 33x^3 - 10$
13. $30 + 13a - 3a^2$
14. $5 + 7x^4 - 6x^8$
15. $6a^2 - ax - 15x^2$
16. $4x^2 + 7mnx - 15m^2n^2$
17. $18a^2 + 17ay - 15y^2$
18. $15 + 2x^2 - 8x^4$
19. $6 - 25x^8 + 5x^4$
20. $30x^{10} - 91x^5 - 30$
21. $30m^2 + 17am - 21a^2$
22. $16a - 4 - 15a^2$
23. $11xy - 6y^2 - 4x^2$
24. $27ab - 9b^2 - 20a^2$

La fórmula (**1**) nos dice que:

REGLA 1

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1) **La suma de sus raíces cúbicas.**
2) **El cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.**

La fórmula (**2**) nos dice que:

REGLA 2

La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1) **La diferencia de sus raíces cúbicas.**
2) **El cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.**

155 FACTORIZAR UNA SUMA O UNA DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

Ejemplos

1) Factorizar x^3+1.
La raíz cúbica de x^3 es x; la raíz cúbica de 1 es 1.
Según la Regla 1:

$$x^3+1=(x+1)[x^2-x(1)+1^2]=(x+1)(x^2-x+1) \quad \textbf{R.}$$

2) Factorizar a^3-8.
la raíz cúbica de a^3 es a; la de 8 es 2. Según la Regla 2:

$$a^3-8=(a-2)[a^2+2(a)+2^2]=(a-2)(a^2+2a+4) \quad \textbf{R.}$$

3) Factorizar $27a^3+b^6$.
La raíz cúbica de $27a^3$ es $3a$; la de b^6 es b^2. Según la Regla 1 tendremos:

$$27a^3+b^6=(3a+b^2)[(3a)^2-3a(b^2)+(b^2)^2]=(3a+b^2)(9a^2-3ab^2+b^4) \quad \textbf{R.}$$

4) Factorizar $8x^3-125$.
La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$; la de 125 es 5. Según la Regla 2 tendremos:

$$8x^3-125=(2x-5)[(2x)^2+5(2x)+5^2]=(2x-5)(4x^2+10x+25) \quad \textbf{R.}$$

5) Factorizar $27m^6+64n^9$.

$$27m^6+64n^9=(3m^2+4n^3)(9m^4-12m^2n^3+16n^6) \quad \textbf{R.}$$

Ejercicio 103

Descomponer en dos factores:

1. $1+a^3$
2. $1-a^3$
3. x^3+y^3
4. m^3-n^3
5. a^3-1
6. y^3+1
7. y^3-1
8. $8x^3-1$
9. $1-8x^3$
10. x^3-27
11. a^3+27
12. $8x^3+y^3$
13. $27a^3-b^3$
14. $64+a^6$
15. a^3-125
16. $1-216m^3$
17. $8a^3+27b^6$
18. x^6-b^9
19. $8x^3-27y^3$
20. $1+343n^3$
21. $64a^3-729$
22. $a^3b^3-x^6$
23. $512+27a^9$
24. x^6-8y^{12}

25. $1+729x^6$	**29.** $a^3b^3x^3+1$	**33.** $x^{12}+y^{12}$	**37.** $8x^9-125y^3z^6$
26. $27m^3+64n^9$	**30.** x^9+y^9	**34.** $1-27a^3b^3$	**38.** $27m^6+343n^9$
27. $343x^3+512y^6$	**31.** $1{,}000x^3-1$	**35.** $8x^6+729$	**39.** $216-x^{12}$
28. $x^3y^6-216y^9$	**32.** a^6+125b^{12}	**36.** a^3+8b^{12}	

CASOS ESPECIALES

1. Factorizar $(a+b)^3+1$.

La raíz cúbica de $(a+b)^3$ es $(a+b)$; la de 1 es 1. Tendremos:

$$(a+b)^3+1=[(a+b)+1]\,[(a+b)^2-(a+b)(1)+1^2]$$
$$=(a+b+1)(a^2+2ab+b^2-a-b+1) \quad \textbf{R.}$$

2. Factorizar $8-(x-y)^3$.

La raíz cúbica de 8 es 2; la de $(x-y)^3$ es $(x-y)$. Tendremos:

$$8-(x-y)^3=[2-(x-y)]\,[2^2+2(x-y)+(x-y)^2]$$
$$=(2-x+y)(4+2x-2y+x^2-2xy+y^2) \quad \textbf{R.}$$

3. Factorizar $(x+1)^3+(x-2)^3$.

$$(x+1)^3+(x-2)^3=[(x+1)+(x-2)]\,[(x+1)^2-(x+1)(x-2)+(x-2)^2]$$
$$=(x+1+x-2)(x^2+2x+1-x^2+x+2+x^2-4x+4)$$
$$(\text{reduciendo})=(2x-1)(x^2-x+7) \quad \textbf{R.}$$

4. Factorizar $(a-b)^3-(a+b)^3$.

$$(a-b)^3-(a+b)^3=[(a-b)-(a+b)]\,[(a-b)^2+(a-b)(a+b)+(a+b)^2]$$
$$=(a-b-a-b)(a^2-2ab+b^2+a^2-b^2+a^2+2ab+b^2)$$
$$(\text{reduciendo})=(-2b)(3a^2+b^2) \quad \textbf{R.}$$

Ejercicio 104

Descomponer en dos factores:

1. $1+(x+y)^3$	**6.** $1-(2a-b)^3$	**11.** $x^6-(x+2)^3$	**16.** $(2x-y)^3+(3x+y)^3$
2. $1-(a+b)^3$	**7.** $a^3+(a+1)^3$	**12.** $(a+1)^3+(a-3)^3$	**17.** $8(a+b)^3+(a-b)^3$
3. $27+(m-n)^3$	**8.** $8a^3-(a-1)^3$	**13.** $(x-1)^3-(x+2)^3$	**18.** $64(m+n)^3-125$
4. $(x-y)^3-8$	**9.** $27x^3-(x-y)^3$	**14.** $(x-y)^3-(x+y)^3$	
5. $(x+2y)^3+1$	**10.** $(2a-b)^3-27$	**15.** $(m-2)^3+(m-3)^3$	

CASO X
SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES

156

En el número (**95**) establecimos y aplicando el teorema del residuo (**102**), probamos que:

I. a^n-b^n es divisible entre $a-b$ siendo n par o impar.
II. a^n+b^n es divisible entre $a+b$ cuando n es par.
III. a^n-b^n es divisible entre $a+b$ siendo n impar.
IV. a^n+b^n nunca es divisible entre $a+b$ ni entre $a-b$ cuando n es un número par.

Además, vimos la manera de hallar el cociente cuando una división es exacta.

Ejercicio 105

Factorizar:

1. a^5+1
2. a^5-1
3. $1-x^5$
4. a^7+b^7
5. m^7-n^7
6. a^5+243
7. $32-m^5$
8. $1+243x^5$
9. x^7+128
10. $243-32b^5$
11. $a^5+b^5c^5$
12. $m^7-a^7x^7$
13. $1+x^7$
14. x^7-y^7
15. $a^7+2,187$
16. $1-128a^7$
17. $x^{10}+32y^5$
18. $1+128x^{14}$

Ejercicio 106

MISCELÁNEA SOBRE LOS 10 CASOS DE DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Descomponer en factores:

1. $5a^2+a$
2. $m^2+2mx+x^2$
3. $a^2+a-ab-b$
4. x^2-36
5. $9x^2-6xy+y^2$
6. x^2-3x-4
7. $6x^2-x-2$
8. $1+x^3$
9. $27a^3-1$
10. x^5+m^5
11. $a^3-3a^2b+5ab^2$
12. $2xy-6y+xz-3z$
13. $1-4b+4b^2$
14. $4x^4+3x^2y^2+y^4$
15. $x^8-6x^4y^4+y^8$
16. a^2-a-30
17. $15m^2+11m-14$
18. a^6+1
19. $8m^3-27y^6$
20. $16a^2-24ab+9b^2$
21. $1+a^7$
22. $8a^3-12a^2+6a-1$
23. $1-m^2$
24. x^4+4x^2-21
25. $125a^6+1$
26. $a^2+2ab+b^2-m^2$
27. $8a^2b+16a^3b-24a^2b^2$
28. x^5-x^4+x-1
29. $6x^2+19x-20$
30. $25x^4-81y^2$
31. $1-m^3$
32. $x^2-a^2+2xy+y^2+2ab-b^2$
33. $21m^5n-7m^4n^2+7m^3n^3-7m^2n$
34. $a(x+1)-b(x+1)+c(x+1)$
35. $4+4(x-y)+(x-y)^2$
36. $1-a^2b^4$
37. $b^2+12ab+36a^2$
38. x^6+4x^3-77
39. $15x^4-17x^2-4$
40. $1+(a-3b)^3$
41. x^4+x^2+25
42. a^8-28a^4+36
43. $343+8a^3$
44. $12a^2bx-15a^2by$
45. $x^2+2xy-15y^2$
46. $6am-4an-2n+3m$
47. $81a^6-4b^2c^8$
48. $16-(2a+b)^2$
49. $20-x-x^2$
50. n^2+n-42
51. $a^2-d^2+n^2-c^2-2an-2cd$
52. $1+216x^9$
53. x^3-64
54. x^3-64x^4
55. $18ax^5y^3-36x^4y^3-54x^2y^8$
56. $49a^2b^2-14ab+1$
57. $(x+1)^2-81$
58. $a^2-(b+c)^2$
59. $(m+n)^2-6(m+n)+9$
60. $7x^2+31x-20$
61. $9a^3+63a-45a^2$
62. $ax+a-x-1$
63. $81x^4+25y^2-90x^2y$
64. $1-27b^2+b^4$
65. $m^4+m^2n^2+n^4$
66. c^4-4d^4
67. $15x^4-15x^3+20x^2$
68. a^2-x^2-a-x
69. x^4-8x^2-240
70. $6m^4+7m^2-20$
71. $9n^2+4a^2-12an$
72. $2x^2+2$
73. $7a(x+y-1)-3b(x+y-1)$
74. $x^2+3x-18$
75. $(a+m)^2-(b+n)^2$
76. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
77. $8a^2-22a-21$
78. $1+18ab+81a^2b^2$
79. $4a^6-1$
80. x^6-4x^3-480
81. $ax-bx+b-a-by+ay$
82. $6am-3m-2a+1$
83. $15+14x-8x^2$
84. $a^{10}-a^8+a^6+a^4$
85. $2x(a-1)-a+1$
86. $(m+n)(m-n)+3n(m-n)$
87. $a^2-b^3+2b^3x^2-2a^2x^2$
88. $2am-3b-c-cm-3bm+2a$
89. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$
90. $4a^{2n}-b^{4n}$
91. $81x^2-(a+x)^2$
92. $a^2+9-6a-16x^2$
93. $9a^2-x^2-4+4x$
94. $9x^2-y^2+3x-y$
95. x^2-x-72
96. $36a^4-120a^2b^2+49b^4$
97. $a^2-m^2-9n^2-6mn+4ab+4b^2$
98. $1-\frac{4}{9}a^8$
99. $81a^8+64b^{12}$
100. $49x^2-77x+30$
101. $x^2-2abx-35a^2b^2$
102. $125x^3-225x^2+135x-27$
103. $(a-2)^2-(a+3)^2$
104. $4a^2m+12a^2n-5bm-15bn$
105. $1+6x^3+9x^6$
106. $a^4+3a^2b-40b^2$
107. $m^3+8a^3x^3$
108. $1-9x^2+24xy-16y^2$
109. $1+11x+24x^2$
110. $9x^2y^3-27x^3y^3-9x^5y^3$
111. $(a^2+b^2-c^2)^2-9x^2y^2$
112. $8(a+1)^3-1$
113. $100x^4y^6-121m^4$
114. $(a^2+1)^2+5(a^2+1)-24$
115. $1+1,000x^6$
116. $49a^2-x^2-9y^2+6xy$
117. $x^4-y^2+4x^2+4-4yz-4z^2$