

0. MÍNIMO DE ALUMNOS 12, MÁXIMO 30

1. SABERES TEÓRICOS

1. Conceptos de función, límite de funciones, y continuidad.
2. Reglas de diferenciación.
3. Aplicaciones del cálculo de derivadas: Problemas de valores extremos.- Razones de cambio.- Gráficas de funciones.- Aproximaciones
4. Funciones primitivas. Integrales definidas e indefinidas.
5. Teorema fundamental del Cálculo: Tablas de integrales.
6. Técnicas de integración: Método de sustitución.- integración por partes.- integración de funciones racionales.- integración por fracciones parciales.-
7. Aplicaciones de la integral definida: Cálculo de áreas y volúmenes.- centroides de regiones planas y trabajo a lo largo de una recta.

2. EXAMEN (por competencias)

Las habilidades o competencias están enunciadas de acuerdo con los saberes teóricos señaladas en el programa. Se puede encontrar problemas similares en los textos habituales del curso: *Cálculo y Geometría Analítica, vol. I*, de Sherman Stein; *Cálculo*, de Ceder y Outcalt; *Cálculo con Geometría Analítica* de George F Simmons; *Cálculo con Geometría Analítica* de Swokowski o *Cálculo Diferencial e integral* de Granville-Smith.

1. Competencia: *Conceptos de función, límite y continuidad.*

1.1. Explicar la simbolización

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

1.2. Determinar a de modo que $f(x)$ sea continua en cada punto para:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

1.3. Utilizar la definición de límite en un punto para probar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x) = 10$$

Escribir todo el proceso.

1.4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1; \\ x - 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? En caso de que exista, calcularlo; en caso contrario, justificar la respuesta.

1.5. Explicar por qué si f es diferenciable en un punto a entonces f es continua en ese punto.

2. Competencia: *Utilizar la definición de límite y las reglas de diferenciación para evaluar funciones derivadas*

2.1. Utilizar la definición de derivada para computar

$$f'(3) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{2}{x^2}$$

Escribir todo el proceso.

2.2. Encontrar la función derivada de

$$y = x \ln(x) + \frac{1}{e^{-x}}$$

2.3. Encontrar la función derivada de

$$y = \sqrt[3]{(2x+1)^2 + x}$$

2.4. Encontrar la función derivada de

$$f(x) = x^5(x^2 + 2)^3 \cos^3 5x$$

2.5. Computar la derivada de $(f(x))^2$ en términos de $f(x)$ y $f'(x)$

3. Competencia: *Trazar la gráfica de una función, utilizando asíntotas, puntos críticos, criterios de primera y segunda derivada.*

3.1. Trazar la gráfica de la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

3.2. Trazar la gráfica de la función

$$y = x^2 - x^3$$

3.3. Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de la función

$$x^3 - 3x^2 + 2$$

y describir los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

3.4. Hallar los puntos críticos y los puntos de inflexión en $[0, 2\pi]$ de

$$f(x) = \text{sen}^2 x \cos x$$

3.5 Determinar si $3x + 2\text{sen}x$ es una función creciente, decreciente o no tiene ninguna de estas dos propiedades.

4. Competencia: *Aplicar el proceso de diferenciación para resolver problemas de máximos y mínimos.*
- 4.1. Encontrar el punto sobre la curva $y^2 = 6x$ que esté más próximo al punto $(4,0)$
- 4.2. Encontrar el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio R
- 4.3. Encontrar el volumen del cilindro más grande que puede inscribirse en una esfera de radio R
- 4.4. Entre todos los recipientes cilíndricos *sin tapa* y de 100 pulgadas cúbicas de volumen, ¿cuál requiere menos material?
- 4.5. Un granjero quiere construir un corral rectangular y dividirlo por una valla paralela a uno de los lados. Dispone de 240 pies de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de área máxima que puede encerrar?

5. Competencia: *Aplicar el proceso de diferenciación para resolver problemas de razones de cambio.*

- 5.1. La temperatura no es la misma en todos los puntos de un alambre. Suponga que a x centímetros del extremo izquierdo la temperatura es x^2 grados Celsius. Un insecto avanza paso a paso sobre el alambre a una velocidad de 2 centímetros por minuto. El insecto advierte que la temperatura sube a medida que avanza. ¿A qué velocidad se incrementa la temperatura (grados por minuto) cuando el insecto está a 3 centímetros del extremo frío?
- 5.2. La longitud de un rectángulo crece a razón de 7 pies por segundo, en tanto que su ancho decrece a razón de 3 pies por segundo. En el instante en que su largo es 12 pies y su ancho 5 pies. Hallar la razón de cambio de a) su área. b) su perímetro. c) la longitud de su diagonal.
- 5.3. Supóngase que un balón esférico se infla de tal modo que su radio crece a razón de 2 pulgadas por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio en su volumen en el instante en que su radio es 10 pulgadas?
- 5.4. Un hombre de 6 pies de altura camina a razón de 5 pies por segundo alejándose de una lámpara que está a 20 pies de altura. ¿Con qué rapidez crece su sombra cuando él se encuentra a 10 pies de la lámpara?
- 5.5. Una gota de lluvia, que se supone esférica, se evapora a una razón que es proporcional a su área. Mostrar que el radio decrece a razón constante.

6. Competencia: *Utilizar la diferencial para aproximar el valor de una función en un punto.*

6.1 Estimar $\sqrt{26.1}$ mediante una diferencial y responder a las preguntas

- a) ¿Cuál es la función involucrada?
- b) ¿En qué valor de entrada cercano a 26.1 se puede calcular fácilmente las salidas de la función y su derivada?
- c) ¿Qué estimativo obtiene para $\sqrt{26.1}$?

6.2. Calcular la linealización de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = 2$

6.3. Mediante diferenciación estimar $(1+h)^4$ para valores pequeños de $|h|$

6.4. Utilizar diferenciales para estimar $(0.99)^{10} + 3(0.99)^7 - 2(0.99)^8 + 1$

6.5. Hallar la linealización de $f(x) = \tan x$ en $\frac{\pi}{4}$

7. Competencia: *Encontrar primitivas de integrales utilizando las técnicas de integración combinadas.*

7.1. Encontrar una primitiva de

$$\int x\sqrt{3x+7}dx$$

7.2. Encontrar una primitiva de

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$$

7.3. Encontrar una primitiva de

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 13}$$

7.4. Encontrar una primitiva de

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

7.5 Encontrar una primitiva de

$$\int \frac{2xdx}{x^2 + 2x + 5}$$

8. Competencia: *Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para encontrar primitivas de integrales y evaluar integrales definidas*

8.1. Evaluar

$$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$$

8.2. Derivar

$$\int_1^x \sqrt[3]{1 + \sin t} dt$$

8.3. Un caracol se mueve a razón de $t/(1+t)^2$ pies por minuto en el instante t de una jornada. ¿Cuánto recorre en los primeros tres minutos?

8.4. Hallar C si:

$$\int_2^x \sqrt{1+t^4} dt = \int_4^{x^2} \frac{\sqrt{1+u)^2}}{2\sqrt{u}} du + C$$

8.5. Evaluar

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

9. Competencia: *Aplicar el proceso de integración para computar longitud de de arco, áreas de superficies de revolución, volúmenes de revolución de superficies.* Problemas representativos

- 9.1. Calcular la distancia que un objeto recorre desde el instante $t = 1$ hasta el instante $t = 8$, en segundos, si su velocidad en el instante t es $7\sqrt[3]{t}$
- 9.2. Hallar el volumen del sólido de revolución formado por la rotación de R en torno al eje x si R es la región bajo la curva $y = x/(1 + x)$ y sobre $[0, 1]$
- 9.3. Hallar el área de la región R , si R es la región bajo $y = x\sqrt{2x + 1}$ y sobre $[0, 4]$
- 9.4. Hallar el área de la región R , si R es la región bajo $y = 1\sqrt{4 - x^2}$ y sobre $y = x\sqrt{4 - x^2}$, entre $x = 0$ y $x = 1$
- 9.5. Hallar el área de la región R , si R es la región a la derecha del eje y , bajo la curva $y = e^{-x}$ y sobre el eje x