PROBLEMARIO
DE
GEOMETRIA ANALITICA
EN EL
PLANO.

FACULTAD DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD VERACRUZANA

2010 Xalapa, Ver. México

1. La distancia entre dos puntos en la recta real es 5. Si uno de los puntos es $A(2)$, hallar el otro punto.

2. Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $A(1,-2)$, $B(4,-2)$, $C(4,2)$. Determinar las longitudes de los catetos y de la hipotenusa, después calcular el área del triángulo.

3. Demostrar analíticamente que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

4. Uno de los extremos de un segmento es el punto $A(3,1)$. Si el punto $P(2,4)$ divide al segmento en cuatro partes iguales, hallar el otro extremo.

5. Hallar la ecuación que debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(2,-1)$ y $B(4,3)$.

6. Los puntos extremos de un segmento son los puntos $P_1(2,3)$ y $P_2(5,6)$. Hallar el punto $P(x,y)$ que divide al segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -1$.

7. Uno de los extremos de un segmento es $(8,9)$, y su punto medio es $(-2,4)$. Hallar el otro extremo.

8. Demostrar que los cuatro puntos $(2,4)$, $(7,3)$, $(6,-2)$ y $(1,-1)$ son vértices de un cuadrado, pruebe también que sus diagonales son perpendiculares y que se dividen mutuamente en partes iguales.

9. Dos de los vértices de un triángulo equilatero son los puntos $(5,2)$ y $(1,1)$. Hallar el tercer vértice (dos soluciones).

10. Determinar la expresión algebraica que establece el hecho de que el punto $P(x,y)$ equidista de los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,5)$.

11. Hallar la expresión algebraica que establece el hecho de que el punto $P(x, y)$ se encuentra a 5 unidades del punto $(2, 3)$. Simplificar tal expresión.

12. Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

13. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases.

14. Determinar cuáles de los puntos $M_1(3, 1)$, $M_2(2, 3)$, $M_3(6, 3)$, $M_4(-3, -3)$, $M_5(3, -1)$, $M_6(-2, 1)$, están situados en la recta

$$2x - 3y - 3 = 0.$$

15. El área de un triángulo es $S = 8$ unidades cuadradas, dos de sus vértices son los puntos $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ y el tercer vértice C está situado en la recta

$$2x + y - 2 = 0.$$

Determinar las coordenadas del vértice C.

16. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 5)$ y equidista de los puntos $A(-7, 3)$ y $B(11, -15)$.

17. Demostrar que la condición de perpendicularidad de las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2 + B_2y + C_2 = 0$$

puede escribirse en la forma siguiente:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

18. Demostrar que se pueden trazar por el punto $P(2, 5)$ dos rectas de manera que sus distancias al punto $Q(1, 2)$ sean iguales a 3. Hallar las ecuaciones de estas dos rectas.

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, 3)$ y su centro está situado en la recta

$$3x - y - 2 = 0.$$

20. El punto $C(3,-1)$ es el centro de una circunferencia que intersecta en la recta
$$2x - 5y + 18 = 0$$
una cuerda de longitud igual a 6. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

21. Deducir la condición según la cuál, la recta $y = kx+b$ es tangente a la circunferencia
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

22. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,0)$, $B(1,5,)$, $C(6,-3)$.

23. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las tres rectas:
$$4x - 3y - 10 = 0, \quad 3x - 4y - 5 = 0, \quad 3x - 4y - 15 = 0.$$

24. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia
$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$$
que son paralelas a la recta
$$2x + y - 7 = 0.$$

25. Determinar el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia
$$\rho = 8sen(\theta - \frac{\pi}{3}).$$

26. Verificar que la ecuación
$$y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$$
determina una parábola, encontrar las coordenadas de su vértice y la magnitud del parámetro p.

27. Dado el vértice de una parábola $A(6,-3)$ y la ecuación de su directriz
$$3x - 5y + 1 = 0,$$
hallar el foco F de esta parábola.

28. Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la parábola

$$x^2 = 16y$$

y es perpendicular a la recta

$$2x + 4y + 7 = 0.$$

29. En los ejercicios siguientes, determinar si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, una hipérbola o rectas que se cruzan, según el caso encuentre todos sus elementos.

    a) $3x^2 - 9y^2 - 6x + 36y - 60 = 0$,

    b) $4x^2 - 25y^2 - 8x + 50y - 21 = 0$,

    c) $4y^2 - 3x^2 - 96y - 18x + 537 = 0$,

    d) $16x^2 + 25y^2 - 224x + 100y + 484 = 0$,

    e) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 189 = 0$.

30. Una gran puerta tiene forma de arco elíptico (una semielipse) que tiene 6 metros de ancho en la base y 8 metros de altura en el centro. Se debe introducir una caja rectangular pesada de 4 metros de ancho por esa puerta. ¿Cuál es la máxima altura que puede tener la caja?.

31. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una elipse con la Tierra en uno de sus focos. La longitud del eje mayor es de $608202Km$ y la excentricidad 0.0549. Encontrar las distancias máxima y mínima de la Tierra a la Luna.

32. Use la información que se da para encontrar la ecuación de la hipérbola:

    a) Centro en $(-1, -2)$, foco en $(-9, -2)$ y vértice en $(5, -2)$.

    b) Centro en $(0, 0)$, foco en $(-3, 0)$ y longitud del lado recto $= \frac{8}{3}$.

    c) Vértice en $(11, 2)$, foco en $(12, 2)$ y un extremo del eje conjugado $(7, 5)$.

    d) Extremos del eje conjugado $(6, 3)$ y $(-4, 3)$, y vértice en $(1, 10)$.

33. Utilice el discriminante para determinar qué tipo de cónicas representan las siguientes ecuaciones.

    a) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$, *b*) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$,

c) $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$.

34. Hallar la ecuación de la parábola horizontal cuyo vértice coincide con el vértice de la elipse $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$, y cuyo lado recto mide lo mismo que la longitud del eje menor de la elipse. (Dos respuestas).

35. Hallar la ecuación de la hipérbola horizontal con vértice en el punto $(0, 1)$ y una de sus asíntotas es la recta $x - 2y + 3 = 0$.

36. El perímetro de un triángulo es 20 y los puntos $A(-2, -3)$ y $B(-2, 3)$ son dos de sus vértices. Encontrar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice.