

IDEAS ESTOCÁSTICAS FUNDAMENTALES **¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad?¹**

Carmen Batanero, batanero@ugr.es
Universidade de Granada, Espanha

Resumen. En este trabajo analizamos los contenidos posibles en un curso de probabilidad dirigido a estudiantes de educación primaria o secundaria. Partimos del trabajo de Heitele, que considera que las ideas estocásticas fundamentales son aquellas que han tenido un papel relevante en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades, aparecen implícitamente en la mayoría de las situaciones aleatorias y son contraintuitivas en algunas de sus características. Las ideas estocásticas fundamentales pueden ser enseñadas con distintos grados de formalización creciente desde la escuela primaria a la Universidad y deben ser una guía en la elaboración del currículo de probabilidad.

Summary. In this paper we analyse the possible contents for a probability course directed to primary or secondary school students. We start from Heitele's vision of fundamental stochastic ideas as those that played an important role in the development of Probability Calculus, implicitly appear in most random situation and have some counterintuitive features. Fundamental stochastic ideas can be taught at increasing levels of formalisation from primary school to University and should be a guide to elaborate the probability curriculum.

Introducción

A pesar de contar con una axiomática satisfactoria, la probabilidad es quizás la única rama de las matemáticas donde prosiguen hoy día las discusiones sobre la

¹ In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

interpretación de conceptos básicos, tales como los de aleatoriedad o probabilidad. Esta controversia no es de tipo técnico, ya que desde el punto de vista matemático, cualquier concepto probabilístico queda unívocamente determinado por su definición (Matalón, 1979). Matemáticamente, la probabilidad sería cualquier función medible normada de un algebra de sucesos en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, no siempre resulta sencillo asignar una probabilidad a un suceso particular, tal como “probabilidad de que mañana llueva” o “probabilidad de que haya exactamente 3 ganadores máximos en la próxima quiniela”. La axiomatización de la probabilidad es satisfactoria desde el punto de vista matemático, pero no ha resuelto los problemas filosóficos de interpretación de la probabilidad ni da reglas para su aplicación en diferentes circunstancias.

La historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica, con frecuencia nos engaña. El lector puede encontrar algunos de estos ejemplos, en el libro de Székely (1986), en el que se describen una serie de paradojas, su historia y solución, así como soluciones erróneas publicadas como verdaderas por autores de prestigio. La construcción del Cálculo de Probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que lleva al progreso de la ciencia.

Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los conceptos estadísticos no son inmutables. Por el contrario, al igual que en matemáticas u otras ramas de las ciencias, son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetos a evolución. Las soluciones admitidas como correctas en un momento histórico son posteriormente rebatidas o mejoradas contribuyendo de este modo al avance de la matemática.

Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo. Si el profesor de matemáticas que debe enseñar probabilidad a sus alumnos no es consciente de esta problemática, difícilmente podrá comprender algunas dificultades de sus estudiantes, quienes encuentran a lo largo de su aprendizaje las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades. Estas dificultades fueron resueltas mediante un cambio de punto de vista sobre el problema dado y mediante la introducción de nuevos conceptos. Aunque las teorías constructivistas sugieren la necesidad de que el alumno sea protagonista de su propio aprendizaje, el profesor debe guiar al alumno a lo largo de este proceso ayudándole a superar los obstáculos que se les puede presentar y proporcionándoles las herramientas necesarias para crecer en su comprensión de la probabilidad.

En lo que sigue analizaremos los conceptos básicos que deben formar parte del currículo de probabilidad, partiendo del trabajo de Heitele (1975) y utilizando, asimismo, las reflexiones realizadas por otros investigadores preocupados por este problema.

¿Cómo Identificar las Ideas Estocásticas Fundamentales?

Es claro que ideas de aleatoriedad y probabilidad son el punto de partida en el estudio de la probabilidad, pero, además, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades y la estadística. Es importante identificar estos conceptos, que son precisamente los que debemos enseñar en los niveles no universitarios. Para elaborar una lista de ideas estocásticas fundamentales, analizaremos el artículo de Heitele (1975), quien toma de Bruner (1960) las tesis siguientes:

1. El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.
2. Cualquiera de estas ideas puede ser enseñada en forma comprensible a los niños de cualquier edad, siempre que se elija un lenguaje, grado de formalización y actividades adecuadas a su nivel de desarrollo cognitivo.
3. Por tanto, las ideas fundamentales son una guía necesaria alrededor de las cuáles se desarrolla el currículo, desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad. Estas ideas se usarán en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una “espiral curricular”.
4. La transición de un alumno a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido estudiado en un nivel de abstracción conveniente y comprendido – dentro de su capacidad – en las etapas educativas anteriores. Es decir, es preferible que el niño comience a estudiar el tema poco a poco, aunque en un principio sólo lo comprenda de forma limitada, en lugar de esperar a que madure y se le pueda enseñar directamente en forma más abstracta.

Las ideas fundamentales estocásticas pueden presentarse al niño en cada etapa de su desarrollo, proporcionándoles modelos explicativos de los fenómenos de azar que observa, que son suficientes en dicha etapa. Su enseñanza no difiere de una forma estructural en las distintas etapas educativas, sino sólo de una forma lingüística y en su nivel de profundización. Por ejemplo, podemos hacer comprender a un niño que al lanzar dos dados la suma más probable es la suma 7, si le proporcionamos la posibilidad de experimentar el

lanzamiento de los dados y registrar sus resultados. La explicación que podría comprender el niño es que 7 tiene más probabilidad, porque hay más sumas con éste valor (por ejemplo 1 y 6, 2 y 5, etc.). El niño construye así un modelo sencillo, pero apropiado, que puede evolucionar posteriormente al más complejo de aplicación de la regla de Laplace (la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles). Este mismo alumno podrá comprender en sus estudios universitarios que la suma de dos dados es una variable aleatoria y que el valor 7 es la moda de su distribución de probabilidad.

Por el contrario, si un niño al lanzar dos monedas cree que la mayor proporción de casos “mixtos” (una cara y una cruz) es debido a que, una vez obtenido un resultado (por ejemplo la cara) el resultado contrario (cruz) es más probable, el modelo construido es erróneo. Aunque la explicación pueda satisfacer al niño, el profesor ha de estar atento a la “intuición errónea”, que puede dificultar posteriormente la idea de independencia.

El ejemplo anterior muestra como en el campo de la probabilidad la intuición nos engaña con frecuencia y gran número de paradojas estocásticas puede confundir incluso a los expertos. Por ello, es más importante construir intuiciones correctas en este campo que en ningún otro. Los modelos intuitivos explicatorios tienen dos funciones:

- En una edad temprana ayudan al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente.
- Preparan el conocimiento analítico posterior, puesto que ayudan a construir intuiciones correctas.

Como señala Feller (1950), la intuición estadística puede ser entrenada incluso en los adultos, aunque si un niño adquiere “intuiciones erróneas” cuando es muy pequeño, esto le puede impedir más tarde la adquisición de un conocimiento adecuado. Por ello parece necesario ofrecer a los niños actividades estocásticas, en forma de juegos y experimentos en edad temprana. Sin embargo, las actividades a desarrollar no deben escogerse al azar. Es preciso un principio de organización, en la forma de la espiral curricular, escalonada por las ideas fundamentales. A continuación analizamos la lista de ideas fundamentales en estocástica que propone Heitele.

La Probabilidad como Normalización de Nuestras Creencias.

Los juegos de azar son tan antiguos como la propia civilización, pero durante siglos, nuestros antepasados no se plantearon el tratar de predecir leyes sobre los

sucesos futuros, debido a las connotaciones religiosas o mágicas asociadas a los juegos de azar. Como sugerimos en Batanero, Henry y Parzysz (en prensa) la percepción de los fenómenos aleatorios y la idea azar ha sido objeto de diferentes interpretaciones, dependiendo de la visión filosófica de la época, entre otras:

- Ausencia de idea de azar y creencia en la predeterminación, debida a fuerzas sobrenaturales o divinas e inaccesibles a nuestra comprensión;
- Asumir el azar personal, diferente para cada persona;
- Concebir el azar como fruto de nuestra ignorancia sobre las leyes que gobiernan los fenómenos aleatorios, que dejarían de serlo en el momento en que accediéramos a estas leyes;
- Azar como producto de la gran dificultad de predicción del efecto conjunto de una serie de causas que actúan independientemente;
- Aceptar una aleatoriedad caótica y esencial en ciertos fenómenos;
- Considerar la aleatoriedad como un modelo matemático que nos permite entender mejor que con otros modelos deterministas ciertas situaciones.

Paralela a estas interpretaciones del azar, la probabilidad se ha concebido también en forma muy variada (probabilidad laplaciana, frecuencial, lógica, subjetiva, axiomática,..) y en particular ha estado sujeta a la visión dual (Hacking, 1975) de grado de creencia personal y valor objetivo obtenido a partir de los datos.

En cualquiera de estas visiones es una idea crucial asignar números a los sucesos aleatorios, de forma que estos números reflejen nuestro grado de creencia en su verificación. En el lenguaje ordinario se usan expresiones del tipo de “casi cierto”, “más probable que”, etc. para comparar las diferentes verosimilitudes que asignamos a diferentes sucesos inciertos, como resultados de votaciones, partidos de fútbol, inversiones en bolsa, tratamientos médicos, etc. Sin embargo, estas expresiones son poco precisas, porque diferentes personas les conceden diferente valor y para poder normalizarlas les asignamos un valor en la escala de la probabilidad, desde 0 (suceso imposible) a 1 (suceso seguro).

Al realizar esta asignación, ponemos en correspondencia la multi dimensionalidad del complejo mundo a nuestro alrededor con el intervalo $[0,1]$, y lo hacemos accesible a los dispositivos matemáticos, puesto que podemos operar con los números que representan estas probabilidades. Podemos, por ejemplo, comparar sucesos muy dispares, tales como aprobar un examen o conseguir un empleo en base a su mayor o menor probabilidad (más, menos

probable). Más tarde definiremos otras operaciones diferentes, como el producto o la suma de probabilidades que tendrán su interpretación en términos de los sucesos involucrados.

Puesto que los fenómenos deterministas serían un caso particular de los aleatorios (probabilidad uno), la idea de probabilidad es aplicable a cualquier campo de la actividad humana. En la idea de probabilidad, tan sencilla, pero tan potente, encontramos un ejemplo de cómo el hombre idea modelos matemáticos para comprender y predecir la realidad.

La probabilidad puede presentarse a los niños desde la escuela primaria. Por ejemplo, el profesor podría pedir a los niños que elaboren una lista de sucesos que podrían ocurrir (o no) durante el mes en curso. Luego, individualmente o en grupo los niños podrían asignar un valor de probabilidad a cada uno de estos sucesos, representándolos a lo largo de una escala numérica entre cero y uno en base a su grado de creencia. El profesor podría pedir a los niños para revisar las probabilidades iniciales, al cabo de una semana, indicando las posibles informaciones que han influido en los cambios de asignación de probabilidades.

El Conjunto de Todas las Posibilidades

No menos fundamental es la idea debida a Kolmogorov de asignar un conjunto (el espacio muestral) de sucesos observables a cada experimento aleatorio y representar cada suceso posible como un subconjunto del espacio muestral, dando una interpretación probabilística a las operaciones con sucesos. Es decir, inventariar todos los posible sucesos elementales que podrían ocurrir al realizar un experimento aleatorio, considerarlo como un conjunto de referencia o universal y aplicar toda la potencia del álgebra de conjuntos para poder definir los demás sucesos, a partir de los sucesos elementales.

La consideración del espacio muestral permitió axiomatizar la probabilidad, como medida normada aditiva, sobre el álgebra de conjuntos, puesto que las operaciones en el álgebra de conjuntos permitían definir operaciones sobre la misma probabilidad. Puesto que todo suceso elemental forma parte del conjunto de referencia, se dota de sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral.

Por otro lado, si un subconjunto está incluido en un conjunto mayor, la probabilidad del primero es menor que la del segundo. Esta propiedad es muy intuitiva y puede presentarse a los alumnos desde la escuela primaria, por lo que podríamos realizar actividades de comparar probabilidades, incluso sin

cuantificación, tales como pedir a los niños que ordenen los sucesos “obtener un 3” y “obtener un número impar” al lanzar un dado.

El inventariar todos los posibles resultados del experimento tiene, sin embargo, a veces dificultades para los niños que no han alcanzado un nivel de razonamiento combinatorio suficiente. Por ejemplo, si proponemos a los alumnos, incluso en educación secundaria el experimento consistente en lanzar dos dados y calcular la probabilidad de los posibles resultados, el espacio muestral supuesto por el profesor podría no coincidir con el asumido por el alumno quienes podrían no comprender por qué la suma 10 es menos probable que la suma 9 (véase la Figura 1).

Espacio muestral supuesto por el profesor	Espacio muestral supuesto por el alumno
11, 12, 13, 14, 15,16	11, 12, 13, 14, 15,16
21, 22, 23, 24, 25, 26	22, 23, 24, 25, 26
31, 32, 33, 34, 35, 36	33, 34, 35, 36
41, 42, 43, 44, 45,46	44, 45,46
51, 52, 53, 54, 55,56	55,56
61, 62, 63, 64, 65,66	66

Figura 1. Espacio muestral en el experimento “Lanzar al azar dos dados”.

La dificultad de construir un espacio muestral completo se debe a que hay que considerar no sólo el suceso que ha ocurrido realmente o incluso el suceso de interés, sino todos los sucesos que *podrían ocurrir*. Aunque hoy día esta idea nos parece trivial, no fue hasta los estudios pioneros de probabilidad por Fermat, Cardano y otros autores que fue tenida en cuenta. Aunque la idea de que había que tener en cuenta las diferentes posibilidades a favor y en contra para repartir equitativamente la apuesta en los juegos de azar estuvo implícita en estos trabajos pioneros, también los primeros intentos fallidos de resolver algunos de estos problemas fueron debidos a considerar espacios muestrales incorrectos. Por ejemplo, aunque hoy nos parece razonable asumir que al lanzar dos dados hay que tener en cuenta el orden del lanzamiento, y por tanto la suma 9 ($9=3+6=6+3=4+5=5+4$) puede obtenerse de más formas que la suma 10 ($10=4+6=5+5=6+4$), esto no fue evidente para algunos grandes matemáticos del siglo XVIII, tales como Leibnitz y D’Alembert que creyeron incorrectamente que no era necesario tener el orden en cuenta al resolver este problema (Székely, 1986, p.3).

Por otro lado, en la investigación del desarrollo del concepto de azar se ha mostrado que los niños, como algunos adultos supersticiosos están confinados estrechamente al determinismo y creen en fuerzas ocultas que expliquen los fenómenos aleatorios. Fischbein (1975) sugiere que estas creencias se deben a que los niños se concentran en un sólo suceso, en lugar de hacerlo sobre la totalidad, cuando razonan sobre los sucesos aleatorios. El mismo comportamiento es decorito por Konold (1989) en algunos sujetos adultos que interpretan en forma no probabilística los problemas de probabilidad y tratan de predecir cuál es el suceso que ocurrirá, en lugar de calcular la probabilidad pedida. Finalmente queremos recordar que la probabilidad no siempre sigue las mismas reglas matemáticas que los alumnos conocen para otros conceptos. Por ejemplo, la relación de orden que se establece entre los sucesos de un único experimento no siempre se conserva al considerar un experimento compuesto. Consideremos, por ejemplo el siguiente problema:

Problema 1. Supongamos que tenemos tres ruletas. Con la primera siempre obtenemos el número 3. Con la segunda obtenemos el número 1 con probabilidad 0.52 y el número 5 con probabilidad 0.48. Con la tercera obtenemos el número 0 con probabilidad 0.25 y el número 4 con probabilidad 0.75.

Jugamos a un juego en el que dos jugadores eligen una ruleta cada uno y gana aquél que consiga el número mayor al girar la ruleta. ¿Cuál jugador tiene ventaja, el que elige la ruleta en primer o segundo lugar?

Intuitivamente nos parece que debería tener ventaja el primer jugador, pero, sin embargo, el segundo siempre tiene ventaja, sea cual sea la ruleta que escoja su compañero:

- Si elige la ruleta 1, el segundo jugador elegiría la ruleta tres y la probabilidad de que gane el segundo jugador es 0,75.
- Si elige la ruleta 2, el segundo jugador elegiría la primera ruleta, con lo que su probabilidad de ganar sería 0,52.
- Si elige la ruleta 3, entonces el segundo jugador elegiría la ruleta 2 y su probabilidad de ganar sería $0,25 + 0,75 \times 0,48 = 0,61$.

Usualmente suponemos que la idea de espacio muestral es demasiado elemental y no le dedicamos mucho tiempo en la enseñanza, aunque, como hemos mostrado, podría ser contra intuitiva incluso para los adultos. Como indica Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) la comprensión correcta del espacio muestral es clave para ayudar al alumno a progresar en el aprendizaje de la probabilidad y se debe dedicar un tiempo suficiente a su enseñanza.

Equidistribución y Simetría

Para poder avanzar en el cálculo de probabilidades, necesitamos, en primer lugar, algún criterio de cómo asignar probabilidades a los sucesos elementales. Una idea estratégica es tratar de descubrir y usar las simetrías físicas o de otro tipo en las situaciones problemáticas, decidir que ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto y, en consecuencia, asignarles la misma probabilidad. Una vez que se acepta esta conclusión, podemos llegar con facilidad al cálculo de las probabilidades de los sucesos elementales en espacios muestrales finitos, simplemente dividiendo la probabilidad 1 entre el número de sucesos.

Por ejemplo, al lanzar un dado, la simetría supone que ninguna cara se distingue de las demás, que no pesa más o menos que las otras y que el dado está, físicamente, bien construido. Este principio de indiferencia se ha tomado como argumento para aceptar la igualdad de probabilidad de cada resultado y llegar a la regla de Laplace, que nos permite asignar una probabilidad de $1/6$ a cada uno de los resultados posibles. Una vez calculadas estas probabilidades elementales, podremos calcular la probabilidad de sucesos más complejos como obtener un número par u obtener una suma par al lanzar 2 o 3 dados.

Hay que recalcar que la equidistribución (igualdad de probabilidad) de los sucesos elementales de un experimento no puede ser separada de la simetría estadística, es decir, la simetría confirmada por los registros estadísticos de resultados de dicho experimento. El que un dado u otro dispositivo generador de resultados aleatorios cumpla las condiciones de simetría no es un hecho que pueda deducirse de la teoría matemática, sino de la experiencia. De hecho, se han establecido algunos principios, como que la simetría física implica la simetría estadística, aunque este principio es insuficiente, puesto que, aunque el dado esté bien construido, podría haber un sesgo en el jugador que lo lanza. En muchas situaciones de la vida real, la equidistribución es la hipótesis más adecuada, pero sólo puede ser contrastada *a posteriori*, por medio de la adecuación del modelo. En otros casos, la simetría es sólo aproximada (distribución de hombres y mujeres en una muestra de nacimientos) o está lejos de la realidad (resultados de exámenes, pruebas médicas, defectos de fabricación, etc.), por lo que restringir el estudio de las aplicaciones de la probabilidad a los casos en que exista esta simetría sería muy limitado. Ello nos llevará progresivamente a ampliar las aplicaciones y la concepción de la probabilidad, incluyendo progresivamente las acepciones frecuencial y subjetiva.

No obstante, puesto que los niños se interesan por los juegos de azar, el contexto de los juegos, en los que la simetría es generalmente aceptable, puede

servir para motivarlos por el estudio de la probabilidad en el inicio del tema. Hay que tener en cuenta, no obstante, que la idea de simetría es difícil de enseñar a los niños muy pequeños, porque sus experiencias con juegos, tales como el ludo, les hacen llevar a creencias sobre que algunos resultados son más fáciles que otros, a pesar de la simetría física. Sólo el trabajo repetido de ejemplos de diversos materiales simétricos y no simétricos les ayudará a desarrollar esta idea.

Regla de Adición de Probabilidades

Una regla general en matemáticas es construir modelos complejos a partir de otros más simples. Aunque las probabilidades pueden asignarse fácilmente en espacios muestrales sencillos, la regla de Laplace es difícil de aplicar directamente en casos más complejos, por ejemplo, cuando tratamos de calcular la probabilidad de obtener tres números iguales al lanzar 3 dados.

La regla de adición proporciona un procedimiento para obtener este tipo de probabilidades. Consiste en llegar a la probabilidad de un suceso compuesto calculando por separado la probabilidad de cada uno de los sucesos simples que la componen y luego sumando estas probabilidades. En el ejemplo, para obtener el triple 1, el alumno tiene un caso favorable entre 216 y lo mismo para cada uno de los otros cinco posibles valores de triple número, luego la probabilidad pedida es $5/216$.

Otra aplicación de esta regla sería calcular la probabilidad del suceso contrario a uno dado. Así, la probabilidad de obtener menos de tres números iguales al lanzar tres dados sería igual a $211/216$.

El alumno puede comprender fácilmente la regla de adición para dos, tres, sucesos y extender la regla a un número mayor (por ejemplo 5, 10 sucesos). Si llega a comprenderla bien y a aceptarla para el caso finito, en sus estudios superiores podrá generalizarla posteriormente a conjuntos infinitos, cuando trabaje con distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, el alumno podrá comprender que la probabilidad de que al lanzar sucesivamente una moneda, la primera cara se presente en un lanzamiento múltiplo de 3 es igual a la suma de las probabilidades de que la primera cara se presente en el lanzamiento número 3 o en el número 6 o en el número 9, etc., y por tanto:

$$(1) P(++C) + P(+++C) + P(+++C) + \dots$$

$$(2) P(\xi = \dot{3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \dots$$

$$(3) P = (\xi = \dot{3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = \frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1}{7}.$$

Más adelante, al estudiar las distribuciones continuas de probabilidad, presentaremos al alumno la probabilidad de que una variable aleatoria tome valores en un intervalo como el área bajo la función de densidad comprendida en dicho intervalo (ver en la Figura 2 un ejemplo), idea que generaliza de nuevo la regla de la suma, y que para el caso de una distribución normal vendría dada por la siguiente expresión:

$$(4) P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2} dx$$

En definitiva, la regla de la suma puede aprenderse a diversos niveles de profundidad y el aprendizaje temprano para casos finitos prepara la comprensión del caso general.

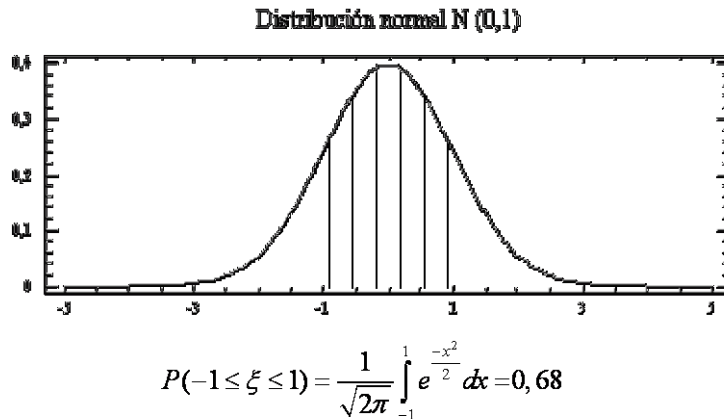


Figura 2. Cálculo de probabilidades en el caso de variables aleatorias continuas.

Independencia y Regla del Producto

La característica de la Matemática en general y de la estocástica en particular de composición y descomposición de modelos, se distingue más claramente si los mismos experimentos aleatorios se combinan entre sí y se asignan probabilidades a los experimentos compuestos. El producto cartesiano de los espacios muestrales de dos o más experimentos simples permite construir el espacio muestral del experimento compuesto.

También en este caso podemos partir de dos experimentos (por ejemplo, lanzar dos monedas) y construir el espacio muestral producto, pasando al experimento compuesto:

$$(5) E = \{C, +\}$$

$$(6) E \times E = \{CC, C+, +C, ++\}$$

Una vez construido, podemos a su vez componerlo nuevamente con el experimento simple, tantas veces como deseemos:

$$(7) E \times E \times E = \{CCC, C + C, + CC, ++C, CC+, C ++, + C+, + ++\}, \dots$$

Podremos, posteriormente, concebir la idea de un producto infinito de experimentos, llegando al proceso estocástico en tiempo discreto, considerando, por ejemplo, la caminata aleatoria, donde una persona avanza cada instante de tiempo girando a derecha o izquierda según el resultado del lanzamiento de una moneda. Incluso podríamos considerar tiempos continuos (llegando a el proceso estocástico en tiempo continuo).

Probabilidad Condicional

Para calcular las probabilidades asociadas a los diversos sucesos en todos estos modelos necesitaremos, en primer lugar, el concepto de probabilidad condicional, que formaliza el cambio de nuestro grado de creencia con la nueva información. La probabilidad no siempre se asigna en ausencia de información, sino que tenemos conocimientos sobre los sucesos implicados, que podemos utilizar para mejorar nuestra asignación. Así, cuando un médico establece el diagnóstico de un enfermo, no sólo valora las probabilidades de incidencia de diversas posibles enfermedades que puedan corresponder a la misma patología en la población general. También tendrá en cuenta la edad y género del paciente y su historial de enfermedades previas. Ejemplos similares aparecen en muchos contextos cotidianos, desde el pronóstico del tiempo, resultados de partidos o votaciones, calificaciones en exámenes, veredictos en juicios, etc.

Además de su propio interés, la idea de probabilidad condicional será utilizada con mucha frecuencia en inferencia y otros métodos estadísticos, por ejemplo en el estudio de la asociación entre variables. Su correcta comprensión preparará al alumno para abordar todos ellos.

Independencia

La idea de independencia es más importante aún en la definición de los experimentos compuestos y en el cálculo de probabilidades de los sucesos asociados, puesto que si dos experimentos son independientes las probabilidades de los sucesos elementales del experimento compuesto son simplemente el producto de las probabilidades de los sucesos en los experimentos simples. La idea de independencia se utilizó en forma intuitiva en los primeros probabilistas, porque era natural asumir la independencia en contextos de juegos de azar, donde se desarrollaron las primeras aplicaciones. El concepto no se hizo

explícito hasta el siglo XVIII, cuando se definió intuitivamente. Dos sucesos serían independientes si uno no depende del otro. Pronto se convierte en crucial para el desarrollo de la teoría de errores y los teoremas de límite. Tras la axiomática de Kolmogorov se expresa mediante la regla del producto, de modo que dos sucesos A y B son independientes si y solo si se cumplen la ecuación (8).

$$(8) P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Esta definición es criticada por Von Mises (1952) porque vacía la idea de independencia de su contenido intuitivo, ya que algunos sucesos que son independientes en sentido “intuitivo” no cumplen la definición o al contrario, ciertos sucesos que la cumplen no son “intuitivamente independientes”.

Por otro lado, la definición de independencia de sucesos de un mismo experimento se entiende con facilidad cuando se usa la regla de producto, pero el significado de la ecuación (8) es más complejo cuando A y B son sucesos de distintos experimentos, porque, en este caso, tenemos que identificar con claridad qué entendemos por la intersección de los sucesos intervinientes en la parte izquierda de la ecuación, ya que las operaciones entre sucesos están definidas sólo dentro del mismo espacio muestral. Truran y Truran (1986) argumentan que si E_1 y E_2 son los espacios muestrales de los dos experimentos, en realidad, el lado izquierdo de la fórmula se refiere en este caso a la intersección de los conjuntos A_1 y B_2 , siendo $A_1 = A \times E_2$, $B_2 = E_1 \times B$ (ver figura 3).

Por otro lado, la idea de que un experimento aleatorio se puede repetir en las mismas condiciones y que los resultados de cada experimento son independientes es un buen ejemplo de la diferencia que hay entre entender un modelo teórico y saber aplicarlo en una situación concreta. Aunque el modelo matemático de la independencia, expresado por la regla del producto, es fácil de entender en la vida cotidiana, mucha gente, incluso científicos, no es capaz de aplicar esta idea consecuentemente en las situaciones prácticas.

A	A_1	$(A_1 \cap B_2)$	
E_1		B_2	
	E_2	B	

Figura 3. Significado de la intersección de sucesos en el espacio producto compuesto de diferentes experimentos aleatorios.

Así, cuando un matrimonio que ya ha tenido tres hijos varones espera su cuarto hijo, puede ocurrir que piense que la probabilidad de tener ahora una niña es mucho mayor que la primera vez o bien que, por el contrario, esté convencido de que, bien el marido, bien la mujer, tiene tendencia natural a tener hijos de un único género. El hecho de que las personas se abonen a un mismo número de lotería y jueguen a él todos los años o de que cada año se traten de inventar nuevos métodos de descubrir “patrones” en la ruleta u otros juegos de azar son otros ejemplos de la dificultad intuitiva de la idea de independencia.

Combinatoria

El utilizar técnicas de recuento para calcular el número de elementos favorables y desfavorables a un suceso y usar estos números para calcular las probabilidades fue un punto crucial en el desarrollo del cálculo de probabilidades, como lo muestra el avance experimentado tras la publicación por Pascal de su Tratado del Triángulo aritmético, uno de cuyos capítulos se aplicaba precisamente al cálculo de probabilidades.

La íntima conexión entre combinatoria y probabilidad es más notoria en los experimentos compuestos. Por ejemplo, la extracción al azar de una urna de tres objetos entre cuatro posibles es un experimento aleatorio compuesto, que puede ser interpretado significativamente en el espacio muestral de las variaciones $V_{4,3}$. Además las operaciones combinatorias pueden definirse mediante experimentos aleatorios (extracción con o sin reemplazamiento, ordenada o no ordenada).

Esta conexión entre los experimentos compuestos y la combinatoria se resalta particularmente con el uso de diagramas en árbol que se hace en ambos los casos. El diagrama en árbol es una representación icónica fundamental, porque visualiza la estructura multi-paso del experimento compuesto y al mismo tiempo visualiza la técnica de producción de las configuraciones combinatorias. Por ello, las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor.

Por tanto, la combinatoria es algo más que un auxiliar de la probabilidad. Este punto de vista es soportado por los resultados de psicología del desarrollo, en particular por Piaget, quien sostiene que el camino de la comprensión de los fenómenos de azar pasa por el de las operaciones combinatorias básicas. Además, las operaciones combinatorias son un componente fundamental de pensamiento formal. De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento

hipotético-deductivo opera con las posibilidades existentes en una situación problemática, las cuales son descubiertas y evaluadas por el sujeto por medio de operaciones combinatorias.

Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del período de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Sin embargo, los resultados de Fischbein (1975) muestran que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales. Si no hay una enseñanza específica, un número importante de sujetos no llega nunca a alcanzar esta capacidad.

La Variable Aleatoria

El concepto de variable aleatoria ha sido responsable de las múltiples aplicaciones actuales del cálculo de probabilidades, puesto que con su aparición el cálculo de probabilidades pasó de ocuparse del estudio de la probabilidad de sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad. La variable aleatoria y su distribución, así como el estudio de las familias de distribuciones y sus propiedades, son herramientas muy potentes porque permiten trabajar con el aparato del análisis matemático. Hay serias razones que justifican por qué los matemáticos anteriores a esta idea, tuvieron serios problemas con diversas paradojas matemáticas y, por ejemplo, Bernoulli necesitara 20 años para descubrir y probar su ley débil de los grandes números, temas que hoy se explica en unas pocas líneas.

Por ejemplo, el modelo de la curva normal de media cero describe con notable precisión la distribución empírica de los errores al realizar medidas repetidas de una misma cantidad (o al tratar de fabricar un cierto producto con una medida fija). Una vez aceptado este modelo como una buena descripción de nuestros datos, basta obtener una estimación de la dispersión en los errores de medida (una estimación de la desviación típica σ en la población de los posibles errores) para tener el modelo completamente determinado. Las aplicaciones prácticas que podemos deducir seguidamente son muy variadas: previsión del número de defectos (piezas que se saldrán de los límites considerados como “normales”); decisión sobre límites de garantías; coste de la política de garantía; criterios para considerar que el proceso de producción está “controlado”, etc.

Desde el punto de vista elemental, manejamos intuitivamente la idea de variable aleatoria cuando nos encontramos con juegos y experimentos en los que

usamos dados, monedas, donde nos interesamos por el número de puntos a conseguir. Así mismo tenemos experiencias cotidianas con variables aleatorias continuas, como el tiempo de espera del autobús, o el necesario para llegar de nuestra casa al trabajo, nuestro peso un día dado, la temperatura ambiente, etc. El refuerzo de todas estas experiencias, incluso inconscientes, hace aparecer la intuición de la variable aleatoria y su valor esperado a una edad temprana.

Algunos psicólogos sostienen que la habilidad para estimar la esperanza matemática de las variables aleatorias es puramente biológica; mediante la experiencia llegamos a estimar el tiempo medio que tardaremos en preparar la comida o arreglarnos, o lo que gastaremos en promedio al hacer la compra. En un plano formal, la esperanza matemática se interpreta como la media aritmética de los valores de una variable aleatoria, si el experimento se repitiese suficientemente en idénticas condiciones.

En el modelo de variable aleatoria hay tres conceptos básicos: su distribución, media y varianza. Mientras que la idea de media (esperanza matemática) es muy intuitiva, lo es menos la idea de distribución, especialmente cuando unos valores son más probables que otros. Para los niños pequeños todas las variables aleatorias tienen, en principio, distribución uniforme. Esto plantea el dilema de si debería restringirse la enseñanza o no a este tipo de variable.

Sea cual sea la respuesta, no debe negarse el hecho de que la distribución normal tenga una parte fundamental para explicar el mundo que nos rodea, ya que la encontramos en muchos fenómenos físicos (tallas, pesos), psicológicos (tiempo de respuesta, puntuaciones) o de otro tipo. Un modelo matemático convincente para explicar la presencia de la distribución normal en tantos fenómenos es el teorema central del límite. Aunque no es comprensible en su forma deductiva en ningún nivel por debajo de la universidad, sería interesante con los alumnos de secundaria considerar alguna aproximación intuitiva y experimental-inductiva, por ejemplo, usando el aparato de Galton o la simulación con ordenador.

Las Leyes de los Grandes Números

La convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en su conjunto, ya que individualmente son impredecibles. Para analizar la dificultad de comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números (que se observan al recoger datos estadísticos sobre un cierto fenómeno) y las correspondientes leyes matemáticas deducidas

en forma de teoremas por diferentes probabilistas y que pueden ser demostradas formalmente.

Mientras que los teoremas matemáticos de límite son difíciles de comprender y muy formalizados, y, por tanto, no es aconsejable su introducción en la enseñanza primaria o secundaria, es deseable y posible introducir a los alumnos de estas edades algunas nociones intuitivas sobre la convergencia empírica. Esta es observable en la realidad, por ejemplo, al observar las gotas de lluvia sobre un pavimento, o la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año y también visualizable fácilmente usando la simulación con ordenador. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza. Esta convergencia empírica hace que las correspondientes leyes matemáticas de los grandes números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si es posible que los alumnos sean capaces de diferenciar entre el modelo matemático y la realidad observable, ya que de hecho vemos que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta.

Las oportunidades didácticas de realizar experiencias empíricas sobre la convergencia serían deseables desde la escuela, para preparar la comprensión posterior de los teoremas matemáticos. Sin embargo, estas oportunidades son más restringidas de lo que nos dicen los textos escolares. Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente y a veces fallan cuando se precisan para una demostración, lo que puede ser contraproducente.

Muestreo

El concepto de muestra nos introduce a la inferencia y establece un puente entre estadística y probabilidad. Esta idea es muy importante, porque todo nuestro conocimiento y juicios sobre el mundo o las personas están basados en el muestreo, ya que, usualmente, sólo podemos estudiar u observar una parcela de la realidad en la que estamos interesados. El conocimiento científico en cualquier área de la ciencia se adquiere a partir de las experiencias empíricas y éstas son siempre limitadas, por lo que las conclusiones deben ser más amplias que los datos que obtenemos en las observaciones. El diseño de experimentos y la teoría del muestreo tratan de analizar las condiciones que permiten dotar de una mayor validez y generalizabilidad a los resultados de los estudios a partir del muestreo y de las formas óptimas de controlar la variabilidad aleatoria en dichos estudios, de forma que puedan identificarse los patrones y relaciones entre variables.

La idea de muestra tiene en sí dos características contradictorias: representatividad y variabilidad. La representatividad nos indica que la muestra se parece, en cierto modo, a la población, pero la variabilidad indica que una muestra puede ser diferente de otra, por lo que al enjuiciar, pensar e inferir en base a una muestra la gente debería ser cauta y crítica. Mientras que la representatividad es percibida en forma intuitiva por la mayoría de las personas, la variabilidad pasa, en cambio, desapercibida o es minimizada y tenemos una tendencia a buscar patrones deterministas en los datos aleatorios.

Los resultados obtenidos mediante muestreo en encuestas o estudios relacionados con nuestros intereses (medicina, política, educación, consumo, etc.) se publican con cada vez mayor frecuencia en los medios de comunicación y a veces se presentan en forma sesgada para atraer la opinión pública hacia unas ciertas ideas, productos comerciales o decisiones. En un número creciente de profesiones los datos de muestras estadísticas son utilizados como base para la toma de decisiones. Es importante, por tanto, educar a los alumnos en el razonamiento estadístico, que parte de las muestras y las analiza, tanto en los datos que contiene como en la forma y condiciones en que fueron recogidas, y deduce las posibilidades que la muestra tiene como modelo para explicar la realidad. El alumno ha de adquirir también la capacidad de entender la naturaleza estadística de sus conclusiones, en cada caso particular, y las consecuencias de una decisión equivocada.

Simulación

Una última idea incluida en la lista de Heitele (1975) es la de “simulación”, que en estadística juega un papel parecido al que desempeña el isomorfismo en otras ramas de las matemáticas. Mediante la simulación ponemos en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, de forma que los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables. Como indica Girard (1997), al trabajar mediante simulación estamos ya modelizando, porque debemos no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

Por ejemplo, podemos “simular” el experimento aleatorio consistente en observar el sexo de un recién nacido mediante el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire. Ahora bien, son muchos los aspectos que podríamos estudiar sobre un recién nacido, como el grupo sanguíneo, su peso o el diámetro de su tórax, que no podrían simularse con el lanzamiento de

la moneda. También hacemos una hipótesis (matemática) sobre equiprobabilidad para los dos sexos, independientemente de la raza, país de nacimiento y antecedentes familiares. Sólo una vez que hemos hecho estos supuestos, podremos comenzar el trabajo con la simulación.

Lo importante de la simulación es que podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primero. Por ejemplo, si queremos saber cual es la probabilidad que entre 100 recién nacidos hay más de un 60% de varones, podemos lanzar, por ejemplo 1000 veces 100 monedas al aire, estudiar en cada uno de los 1000 experimentos si hubo o no más de un 60% de nacimientos y obtener una estimación para la probabilidad pedida. La ventaja de la simulación es obvia, incluso en este ejemplo tan sencillo, pues permite condensar el experimento en un tiempo y espacio concreto.

Entre el *dominio de la realidad*, en que se encuentra la situación que queremos analizar y en la que interviene el azar, y el *dominio teórico*, donde con ayuda de la matemática construimos un modelo teórico de probabilidad que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, Coutinho (2001) sitúa el *dominio pseudo-concreto* en el que podríamos trabajar con los alumnos por medio de la simulación.

Mientras que en el dominio de la realidad se efectúa una acción o experiencia concreta y en el dominio teórico es característico la representación formal o simbólica, en el dominio pseudo-concreto se opera mentalmente. En este dominio, el alumno ya ha salido de la realidad y trabaja con una situación abstracta idealizada. Por ejemplo, se imagina que está trabajando con dados perfectos y prescinde de las condiciones del lanzamiento. Al mismo tiempo conserva la denominación de las caras del dado real para nombrar los resultados del dado idealizado. El papel didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir implícitamente el modelo teórico a los alumnos, incluso aunque su formulación matemática formalizada no sea posible (Henry, 1997).

Un caso muy interesante son los modelos de urna. Para “observar” el sexo de un recién nacido podríamos sustituir el experimento por otro que consiste en elegir al azar con reemplazamiento una bola de una urna en la que introducimos dos bolas de diferente color para representar los dos sexos. Si queremos simular otro experimento aleatorio con dos sucesos en forma que sus probabilidades sean p y q ($p+q=1$), basta usar una urna en que se mantengan las proporciones p y q para los dos colores de bolas. Simular un experimento con r sucesos diferentes solo requiere usar bolas de r colores distintos, respetando las probabilidades correspondientes.

Cualquier problema probabilístico implica una serie de experimentos aleatorios compuestos de una determinada manera. Cada uno de estos experimentos puede ser “simulado” con un modelo de urnas convenientemente escogido (de una forma algo más compleja y usando una transformación inversa de la función de distribución, incluso los modelos continuos de probabilidad podrían simularse indirectamente mediante este procedimiento). El experimento compuesto de varios experimentos simples se obtiene componiendo las “urnas” correspondientes a los experimentos simples (obteniendo una hiperurna) y la repetición del experimento global, junto con el análisis de los datos producidos permite una solución aproximada del problema.

En este sentido la urna con bolas de colores (fichas, tarjetas) es un “material universal”, válido para estudiar cualquier problema o concepto probabilístico. Por ello la simulación proporciona un método “universal” para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos, que no tiene paralelo en otras ramas de la matemática.

Conclusiones

En este trabajo hemos reflexionado sobre las ideas estocásticas fundamentales descritas por Heitele (1975), apuntando a su importancia dentro del cálculo de probabilidades y señalando algunas de las posibles dificultades que podríamos encontrar en su enseñanza. Estas ideas aparecen implícita o explícitamente en la mayor parte de las situaciones aleatorias, incluidos los juegos de azar que podemos utilizar como recursos para plantear situaciones didácticas en la clase de probabilidad.

El análisis que hemos realizado de estas nociones sugiere también su carácter contraintuitivo y que no podemos esperar una correcta comprensión posterior del tema si no se prepara una base intuitiva de probabilidad en nuestros alumnos desde unas edades tempranas. Las situaciones aleatorias no se restringen a la clase de matemáticas, o a la escuela, sino que nos rodean en todas nuestras actividades cotidianas, personales, sociales o profesionales en que, con frecuencia, debemos tomar decisiones en ambiente de incertidumbre, a veces con serias consecuencias.

Todo ello sugiere la urgencia de comenzar la enseñanza de la probabilidad desde la escuela primaria, puesto que las ideas fundamentales estocásticas pueden ser presentadas a estas edades con un nivel de formalización adecuado. Además, los juegos, experiencias y simulaciones con materiales manipulativos y posteriormente con tablas de números aleatorios permiten abordar esta enseñanza con ejemplos interesantes al alumno, como hemos mostrado en Godino, Batanero y Cañizares (1997).

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por las Acciones Integradas Hispano- Alemanas HA2002-0069, y el Grupo PAI: FQM-126.

Referencias

- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (En prensa). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Coutinho, C. (2001). Introduction aus situations aléatoires dés le Collège: de la modélisation à la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II. Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble.
- Feller, W. (1950). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I. New York: John Wiley.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Girard, J. C. (1997). Modélisation, simulation et expérience aléatoire. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 73-76). Reims: Commission Inter-IREM.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1997). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1999). Student's probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 487-519.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

- Matalón, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En J. Piaget (Ed.), *Epistemología de la Matemática* (pp. 121-145). Buenos Aires: Paidós.
- Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth*. London: William Hodge and company. (Trabajo original publicado en 1928.)
- Székel, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Reidel.
- Truran, J. M. y Truran, K. M. (1997). Statistical independence: One concept or two? En B. Phillips (Ed.), *Papers from Statistical Education Presented at Topic Group 9, ICME 8* (pp. 87–100). Hawthorn, Victoria: Swinburne University of Technology.