Facultad de Física

Métodos Numéricos

Dr. Antonio Marín Hernández

Centro de Investigación en Inteligencia Artificial
Universidad Veracruzana
Sebastían Camacho # 5
Xalapa, Veracruz

Solución de ecuaciones no lineales

1. Método de punto fijo
2. Criterio de Convergencia
3. Método de Newton-Rhapson
4. Métodos de dos puntos
5. Aceleración de la convergencia
6. Método de Horner
7. Método de Newton-Rhapson-Horner

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- El método de Horner realiza la evaluación de polinomios a partir de lo que se conoce como multiplicación anidada.
- Sea:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

nuestro polinomio el cual queremos evaluar en un valor X.

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Generalmente la operación de evaluación en una computadora se realiza de la siguiente manera:

$$f(X) = 2*X*X*X*X + 3*X*X*X + 4*X*X + 5*X + 6$$

- Sin embargo si lo realizamos de la siguiente manera se reduce el número de operaciones

$$f(X) = (((2*X+3)*X+4)*X+5)*X+6$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Para este caso específico,
- La multiplicación anidad requiere de 4 multiplicaciones y 4 sumas,
- Mientras que en el caso general tendremos 10 multiplicaciones y 4 sumas.

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Para los casos en los cuales se requiere evaluar varias veces el mismo polinomio, resulta significante la reducción de operaciones realizadas con la multiplicación anidada.

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Ya que es difícil determinar el número de llaves o corchetes que se tiene que poner para realizar la multiplicación anidada se puede hacer lo siguiente,
- Sea :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

el polinomio que se desea evaluar en un punto *X*

Universidad Veracruzana

7

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Se puede hacer:

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = b_0 X + a_1 = a_0 X + a_1$$

$$b_2 = b_1 X + a_2 = (a_0 X + a_1) X + a_2$$

$$b_3 = b_2 X + a_3 = ((a_0 X + a_1) X + a_2) X + a_3$$

Universidad Veracruzana

8

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Y en general se tiene:

$$b_i = b_{i-1}X + a_i, \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, n$$

y por lo tanto el valor de b_n es igual a $f(X)$.

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Definamos un nuevo polinomio $g(x)$ de grado n -1 con los coeficientes b_i,

$$g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

el cual multiplicado por el binomio (x - X) nos da:

$$(x - X) g(x) = b_0 x^n + (b_1 - b_0 X) x^{n-1} +$$

$$(b_2 - b_1 X) x^{n-2} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-2} X) x + b_{n-1} X$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- El cual es :

$$(x-X)g(x)=$$

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+(a_n-b_{n-1})X$$

y por lo tanto:

$$(x-X)g(x)=f(x)-b_n$$

Que confirma que $f(X)=b_n$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Se tiene a partir de la ecuación anterior, que :

$$f'(x)=g(x)+(x-X)g'(x)$$

y por lo tanto:

$$f'(X)=g(X)$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Horner

- Para evaluar *f*(*X*), entonces simplemente se aplica la técnica de multiplicación anidada *g*(*X*):

$$c_0 = b_0$$

$$c_i = c_{i-1}X + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

- Siendo la evaluación de la derivada en X:

$$f'(X) = g(X) = c_{n-1}$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- El método de Newton-Rhapson, encuentra las raices de una ecuación no lineal, usando un proceso iterativo construido con la propia funcion *f*(*x*) y con su derivada *f'*(*x*) de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- Ahora si la función *f*(*x*) es un polinomio *p*(*x*) entonces podemos usar el Método de Horner para evaluar tanto el polinomio *p*(*x*) como su derivada *p'*(*x*) en el valor inicial semilla x_0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- Y cómo :

$$p(x_i) = \mathrm{b_n} \qquad \text{y} \qquad p'(x_i) = \mathrm{c_{n-1}}$$

se tiene que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{b_n}{c_{n-1}}$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- Mucha atención tanto

$$f(x_i) = \mathrm{b_n}$$

como

$$f'(x_i) = \mathrm{c_{n-1}}$$

son evaluaciones en el punto x_i

Universidad Veracruzana

17

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- Por lo tanto la aplicación consecutiva del método de Horner tiene sentido al aplicarse en conjunto con el método de Newton-Rhapson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$

Universidad Veracruzana

18

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

- Más aun, gracias a que se tiene:

$$(x-X)g(x)=$$

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+(a_n-b_{n-1})X$$

entonces, sí *X* es raíz de *p*(*x*), entonces podemos factorizar la ecuación anterior y *g*(*x*) es el residuo.

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton Rahpson Horner

$$(x-X)g(x)=$$

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+(a_n-b_{n-1})X$$

Luego entonces, se pueden obtener todas las raices reales del polinomio p(x) aplicando el método conjunto de *Newton-Rhapson Horner*

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales

¿Preguntas?

anmarin@uv.mx

Universidad Veracruzana