Facultad de Física

Métodos Numéricos

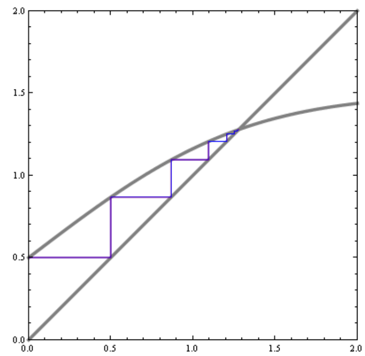
Dr. Antonio Marín Hernández

Centro de Investigación en Inteligencia Artificial
Universidad Veracruzana
Sebastían Camacho # 5
Xalapa, Veracruz

Solución de ecuaciones no lineales

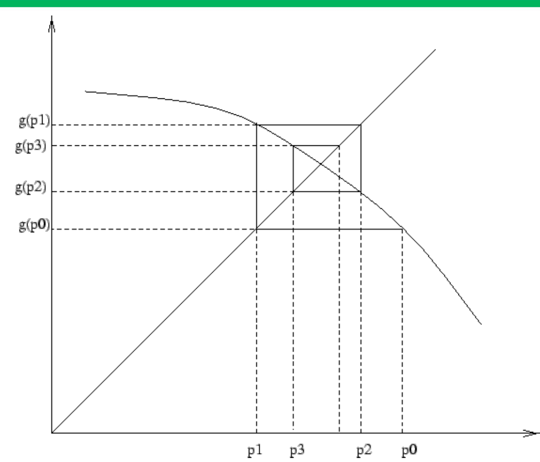
1. Método de punto fijo
2. Criterio de Convergencia
   - Orden de Convergencia
3. Método de Newton-Rhapson
4. Aceleración de la convergencia
5. Método de la secante
6. Método de bisección
7. Método de punto falso
8. Método de Horner

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia



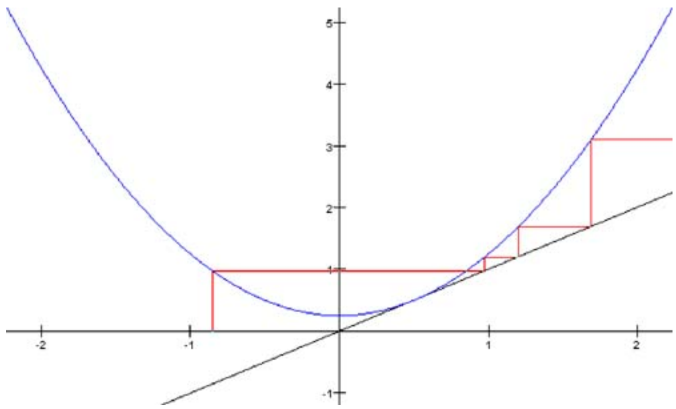
- Convergencia Monotónica

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia



- Convergencia oscilatoria

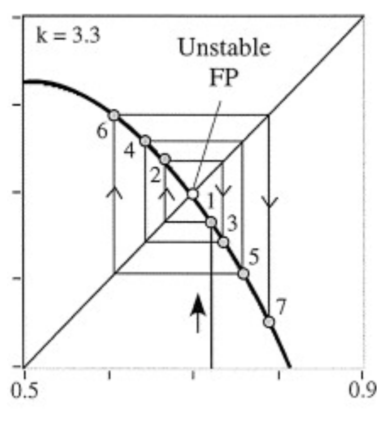
Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia



- Divergencia monótonica

Universidad Veracruzana

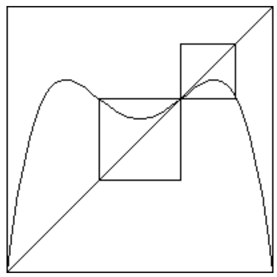
Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia



- Divergencia oscilatoria

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia



- Oscilación infinita

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- La magnitud de $g'(x)$ puede usarse como criterio de convergencia
  - no solo para saber si existe o no
- Sea ε_i el error de la i-ésima iteración:

$$\varepsilon_i = x_i - x_r$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- Sí, se conoce el valor de $g(x)$ y sus derivadas en x_r, se puede expandir $g(x)$ alrededor de x_r (series de Taylor)

$$g(x_i) = g(x_r) + g'(x_r)(x_i - x_r)$$

$$+\frac{1}{2!}g''(x_r)(x_i - x_r)^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_r)(x_i - x_r)^3 + \ldots$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- O bien:

$$g(x_i) - g(x_r) = g'(x_r)(x_i - x_r)$$

$$+\frac{1}{2!}g''(x_r)(x_i - x_r)^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_r)(x_i - x_r)^3 + \ldots$$

- y como:

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{y} \quad x_r = g(x_r)$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- La ecuación anterior se puede escribir como:

$$x_{i+1} - x_r = g'(x_r)\varepsilon_i + g''(x_r)\frac{\varepsilon_i^2}{2!} + g'''(x_r)\frac{\varepsilon_i^3}{3!} + \ldots$$

- y como:

$$\varepsilon_{i+1} = x_{i+1} - x_r$$

- entonces se tiene:

$$\varepsilon_{i+1} = g'(x_r)\varepsilon_i + g''(x_r)\frac{\varepsilon_i^2}{2!} + g'''(x_r)\frac{\varepsilon_i^3}{3!} + \ldots$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

$$\varepsilon_{i+1} = g'(x_r)\varepsilon_i + g''(x_r)\frac{\varepsilon_i^2}{2!} + g'''(x_r)\frac{\varepsilon_i^3}{3!} + \ldots$$

- Sí $|\varepsilon_i| < 1$, entonces ε_i^2, $|\varepsilon_i^3|$, ε_i^4…tendran valores mas pequeños que $|\varepsilon_i|$
- De esta manera si
- $g'(x) \neq 0$ el primer término domina a los demás y entonces ε_{i+1} es proporcional a ε_i

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

$$\varepsilon_{i+1} = g'(x_r)\varepsilon_i + g''(x_r)\frac{\varepsilon_i^2}{2!} + g'''(x_r)\frac{\varepsilon_i^3}{3!} + \ldots$$

- $g'(x) = 0$ y $g''(x) \neq 0$ el segundo término domina a los demás y entonces ε_{i+1} es proporcional a ε_i^2
- *Sí,* $g'(x) = 0$, $g''(x) = 0$ y $g'''(x) \neq 0$, entonces ε_{i+1} es proporcional a ε_i^3
- etc.

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- El proceso se considera de orden uno sí: $g'(x) \neq 0$
- De orden 2 sí: $g'(x) = 0$ y $g''(x) \neq 0$
- De orden 3 sí: $g'(x) = 0$, $g''(x) = 0$ y $g'''(x) \neq 0$, etc.
- entonces dado *n* el orden de convergencia se tiene que

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Orden de convergencia

- ε_{i+1} es proporcional a ε_i^n
- El error será más pequeño entre más grande sea n y la convergencia más rápida

Universidad Veracruzana

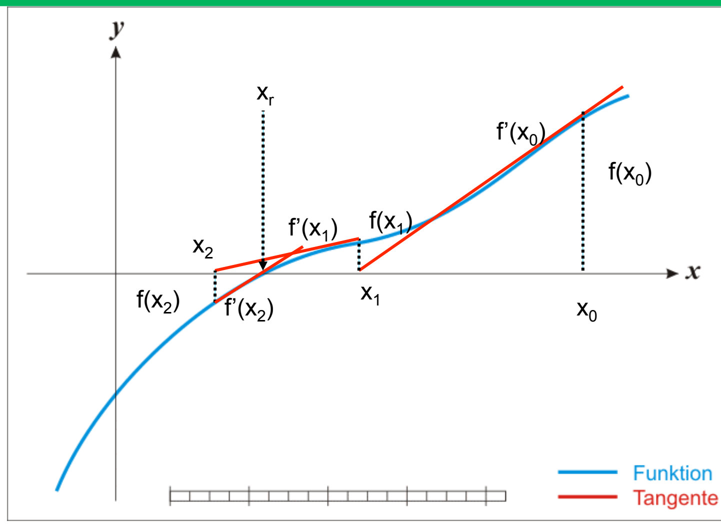
Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Raphson

- El Método de Newton-Raphson se basa en el uso de la derivada para obtener un orden de convergencia más alto

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Rhapson



Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Raphson

- Usando la definición de la derivada se tiene:

$$f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

- y entonces:

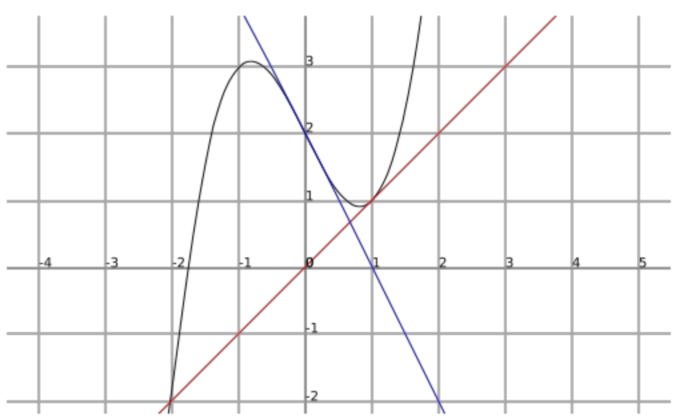
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Universidad Veracruzana

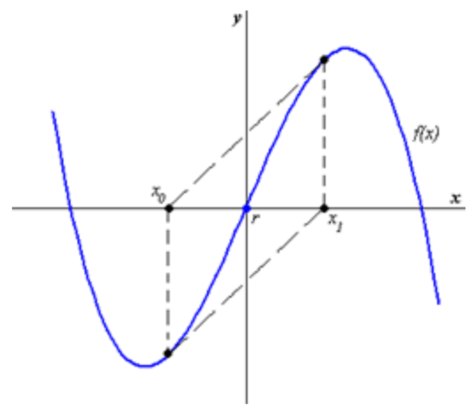
Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- $f(x)$ debe ser diferenciable
- Orden de convergencia cuadrático
- **Desventajas**
- La derivada debe ser calculada analiticamente.
- Problemas con raices de multiplicidad mayor a uno
- Puntos de inflexión
- Mínimos o máximos locales

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Rhapson

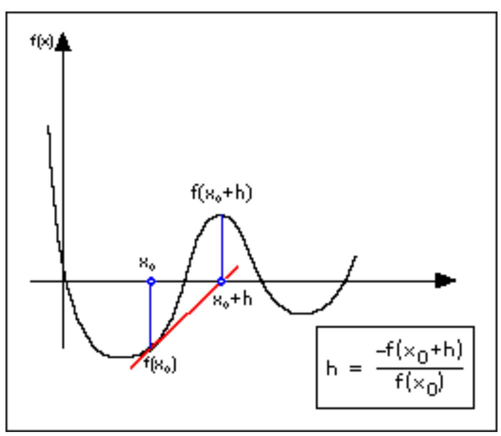


Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Rhapson



Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Rhapson



Universidad Veracruzana

Solución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Rhapson

¿Preguntas?

anmarin@uv.mx

Universidad Veracruzana