Facultad de Física

Métodos Numéricos

Dr. Antonio Marín Hernández

Centro de Investigación en Inteligencia Artificial
Universidad Veracruzana
Sebastían Camacho # 5
Xalapa, Veracruz

Solución de ecuaciones no lineales

1. Método de punto fijo
2. Criterio de Convergencia
3. Método de Newton-Rhapson
4. Aceleración de la convergencia
5. Método de la secante
6. Método de bisección
7. Método de punto falso
8. Método de Horner

Solución de ecuaciones no lineales

- Dada una función *f*, definida en los reales
- Determinar los valores de *x*, para los cuales :

$$f\left(x\right)=0$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- Un punto *x* se llama punto fijo, sí satisface la ecuación:

$$g\left(x\right)=x$$

- Existen puntos fijos estables e inestables

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- El método de punto fijo es un método iterativo
- La idea principal es encontrar las raices de una ecuación al proponerlas como puntos fijos de una formulación alternativa.

$$f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- Se construye un proceso iterativo a partir del valor semilla x_0:

$$g(x_0) = x_1$$

$$g(x_1) = x_2$$

$$\vdots$$

$$g(x_{n-1}) = x_n$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- El proceso termina para un dado valor de x_i tal que :

$$g(x_{i-1}) - x_i = 0$$

- Pero dadas las incertidumbres :

$$\left|g(x_{i-1}) - x_i\right| < \varepsilon$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- O, si cumple la condición:

$$f(x_i) = 0$$

- Pero dadas las incertidumbres :

$$\left|f(x_i)\right| < \varepsilon$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- Ejemplo 2.1.
- Resolver la siguiente ecuación no-lineal:

$$f(x) = 0.5\sin(x) - x + 1 = 0$$

- Se obtiene el proceso iterativo definido por:

$$g(x) = x = 0.5\sin(x) + 1$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- Resolviendo el proceso tenemos:

$$x_1 = g(0) = 0.5\sin(0) + 1 = 1$$

$$x_2 = g(1) = 0.5\sin(1) + 1 = 1.420735$$

$$x_3 = g(1.420735) = 1.494380$$

$$x_4 = g(1.494380) = 1.498540$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

$$x_5 = g(1.498540) = 1.498695$$

$$x_6 = g(1.498695) = 1.498700$$

$$x_7 = g(1.498700) = 1.498701$$

$$x_8 = g(1.498701) = 1.498701$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- La solución de

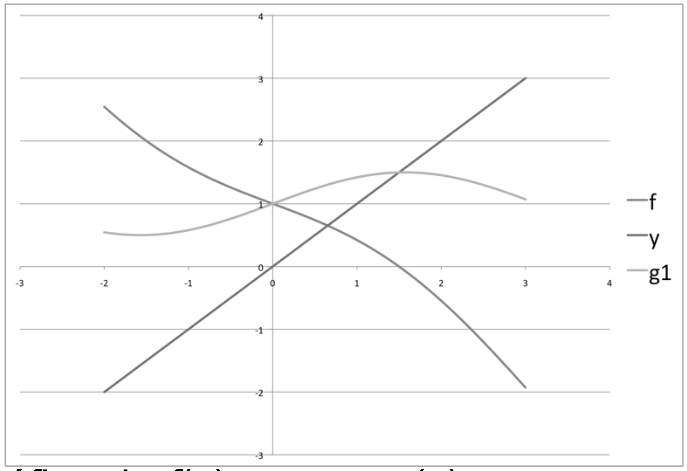
$$f(x) = 0.5\sin(x) - x + 1 = 0$$

- es:

$$x = 1.498701$$

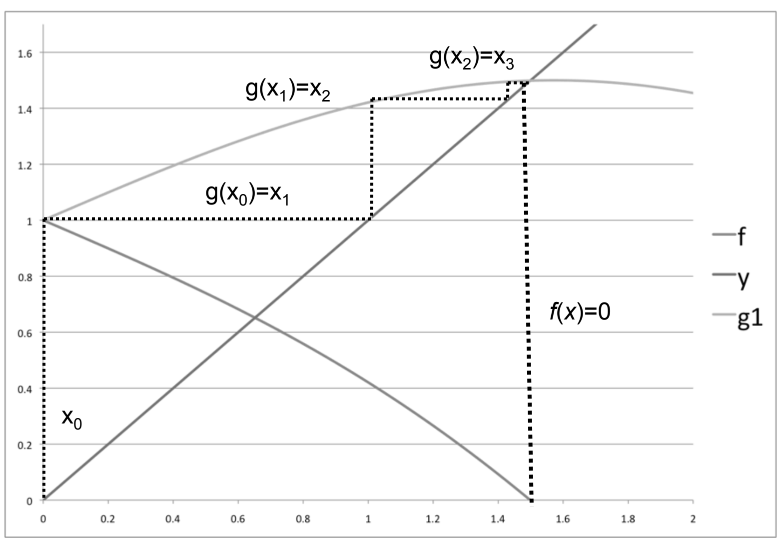
$$f(1.498701) = 0.0000001334465$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



- Gráfica de *f*(*x*), *y* = *x* y *g*(*x*)

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- Hay varias maneras de obtener el proceso iterativo, pero depende de la función *f*
- Ejemplo 2.2:

$$f(x) = 2x^2 - x - 5 = 0$$

- Se puede proponer:

$$g_1(x) = 2x^2 - 5 = x$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

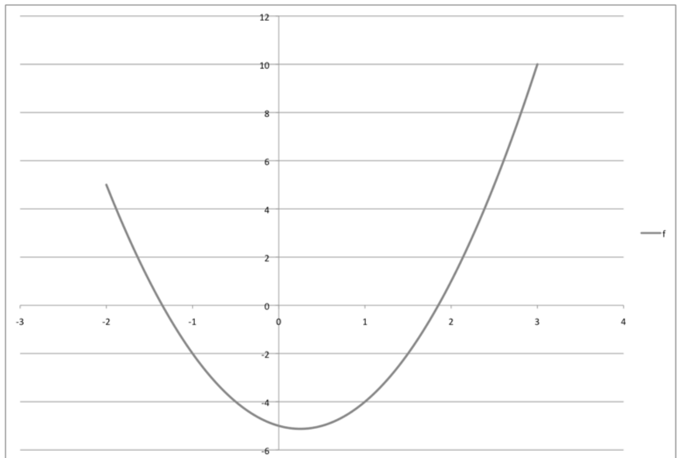
- Y otras opciones son:

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{x+5}{2}} = x$$

$$g_3(x) = \frac{5}{2x-1} = x$$

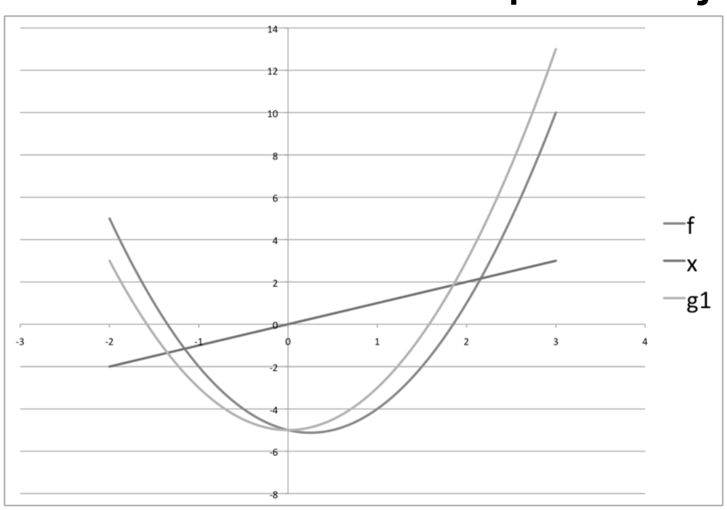
$$g_4(x) = x - \frac{2x^2 - x - 5}{4x-1} = x$$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



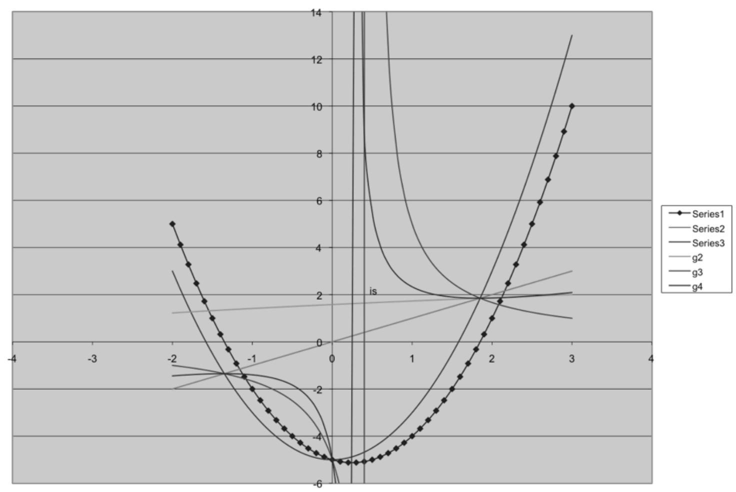
- Gráfica de $f(x)$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



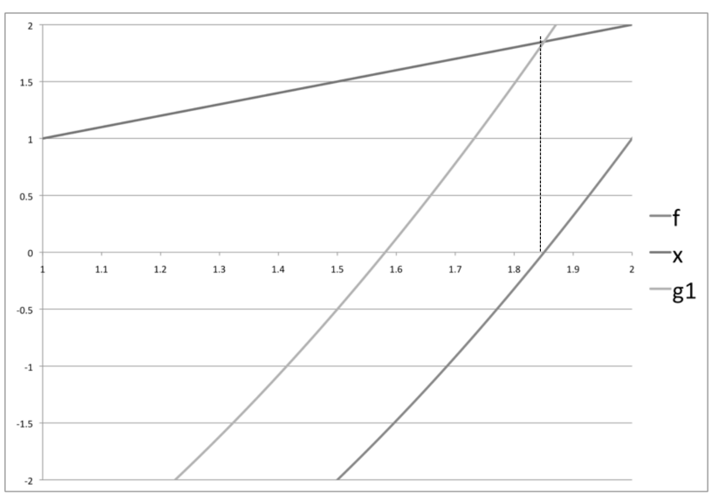
- Gráficas de $f(x)$, $g1(x)$ y $y = x$

Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

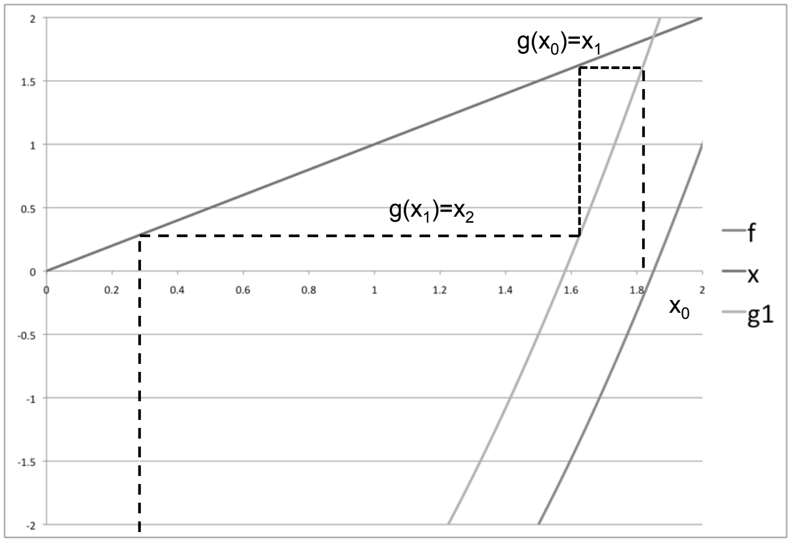


- $g(x)$'s

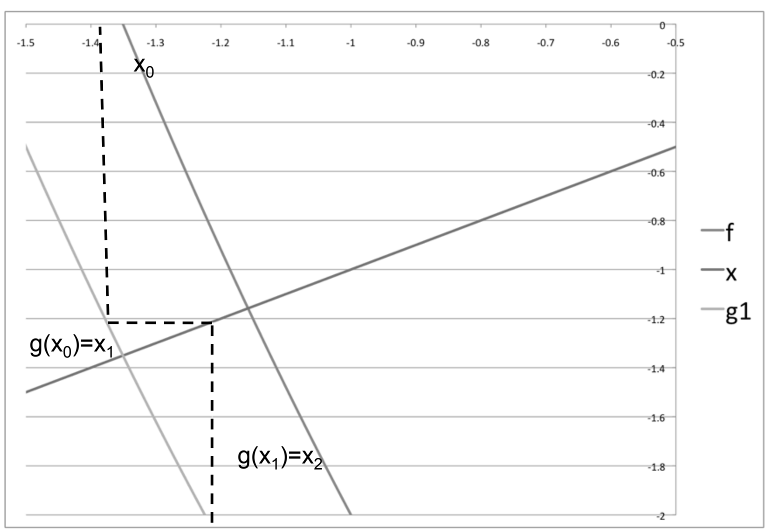
Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo



Solución de ecuaciones no lineales: Método de punto fijo

- ¿Cómo asegurar obtener la solución?
- ¿Cuál es la mejor formulación?

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Algunas $x = g(x)$ de $f(x) = 0$ conducen a una raíz en el método de punto fijo y otras no, aun con el mismo valor inicial.
- Sería bueno tener:
  - Una manera de evaluar si la $g(x)$ propuesta converge o diverge
  - El grado de convergencia

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Aplicaremos el teorema del punto medio a la función *g(x)* en el intervalo comprendido entre x_{i-1} y x_i
- Suponemos *que g(x) satisface las condiciones de aplicabilidad.*

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Como:

$$g(x_i) = x_{i+1} \quad \text{y} \quad g(x_{i-1}) = x_i$$

sustituyendo se obtiene:

$$x_{i+1} - x_i = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

Tomando valor absoluto en ambos miembros :

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| = \left|g'(\xi_i)\right|\left|x_i - x_{i-1}\right|$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

Con lo que nos queda, para cada *i*:

$$\left|x_2 - x_1\right| = \left|g'(\xi_1)\right|\left|x_1 - x_0\right| \quad \xi_1 \in (x_1, x_0)$$

$$\left|x_3 - x_2\right| = \left|g'(\xi_2)\right|\left|x_2 - x_1\right| \quad \xi_2 \in (x_2, x_1)$$

$$\left|x_4 - x_3\right| = \left|g'(\xi_3)\right|\left|x_3 - x_2\right| \quad \xi_3 \in (x_3, x_2)$$

.

.

.

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Supóngase ahora que en la región que comprende a $x_0, x_1, \ldots$ y en x_r misma, la función g'(x) está acotada;
- esto es :

$$\left|g'(x)\right| \leq M$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

Entonces:

$$\left|x_2 - x_1\right| \leq M\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|x_3 - x_2\right| \leq M\left|x_2 - x_1\right|$$

$$\left|x_4 - x_3\right| \leq M\left|x_3 - x_2\right|$$

.

.

.

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Si se sustituye la primera desigualdad en la segunda, se obtiene:

$$\left|x_3 - x_2\right| \leq M\left|x_2 - x_1\right| \leq MM\left|x_1 - x_0\right|$$

- O bien:

$$\left|x_3 - x_2\right| \leq M^2\left|x_1 - x_0\right|$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Si se sustituye este resultado en la tercera desigualdad se tiene:

$$\left|x_4 - x_3\right| \leq M\left|x_3 - x_2\right| \leq MM^2\left|x_1 - x_0\right|$$

o

$$\left|x_4 - x_3\right| \leq M^3\left|x_1 - x_0\right|$$

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Procediendo de la misma manera se obtiene:

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| \leq M^i \left|x_1 - x_0\right|$$

- El proceso puede converger por diversas razones, pero si $M < 1$ en un entorno de x que incluya $x_0, x_1, x_2, \ldots$
- Entonces $M < 1$ es una condición suficiente, pero no necesaria para la convergencia.

Solución de ecuaciones no lineales: Criterio de Convergencia

- Un método práctico de emplear este resultado es obtener distintas formas de $x = g(x)$ a partir de $f(x) = 0$,
- y así calcular $|g'(x)|$;
- Las $f(x)$ que satisfagan el criterio $|g'(x)| < 1$ prometerán convergencia al aplicar el método de punto fijo.

Unidad 1: Manejo de errores e incertidumbre en la computadora

¿Preguntas?

anmarin@uv.mx