3.- Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de *m* ecuaciones lineales en *n* incógnitas tiene la forma general:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{3.1}$$

La solución de estos sistemas de ecuaciones lineales las podemos catalogar según la tabla 3.1

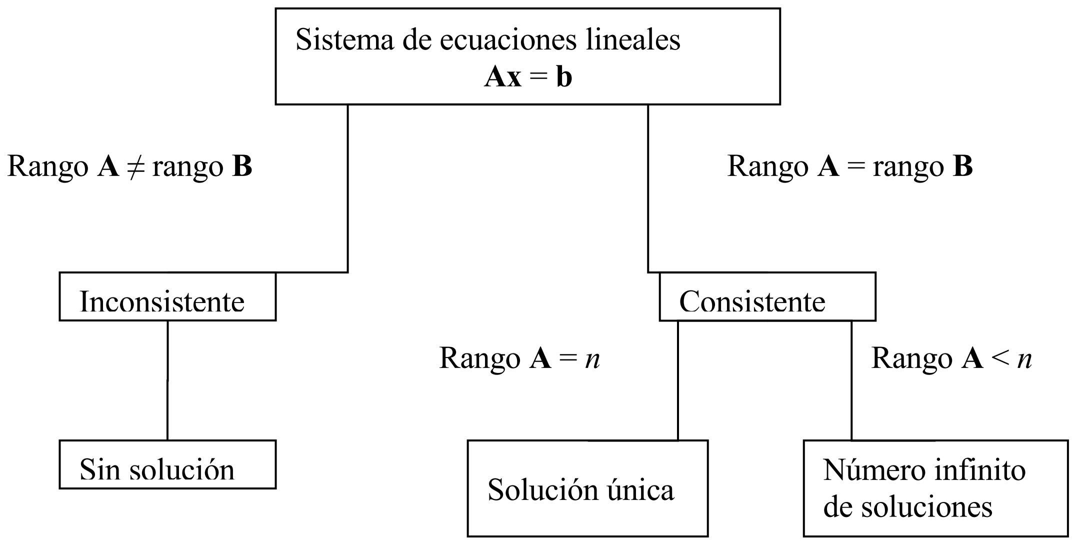

Tabla 3.1 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

En este curso nos enfocaremos a resolver los sistemas de ecuaciones lineales *consistentes* con solución única, es decir Rango de **A** = *n*.

3.1 Eliminación de Gauss

Considérese el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 2w+4x+y+2z=5 \\ 4w+14x-y+6z=11 \\ w-x+5y-z=9 \\ -4w+2x-6y+z=-2 \end{bmatrix}$$

La primera tarea es eliminar la incógnita *w*. Lo cual se logra restando un múltiplo adecuado de la ecuación (1) de cada una de las ecuaciones (2), (3) y (4) para así obtener las siguientes ecuaciones

$$
\begin{array}{ccc}
(5) & 6x-3y+2z=1 & (2)-2\cdot(1) \\
(6) & -3+9/2\,y-2z=13/2 & (3)-1/2\cdot(1) \\
(7) & 10x-4y+5z=8 & (4)+2\cdot(1)
\end{array}
$$

Ahora el problema se ha reducido a tres ecuaciones con tres incógnitas. Al repetir este procedimiento se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, después una ecuación con una incógnita, la cual puede resolverse de inmediato.

	w	x	y	z	RHS	SUMA	
(1)	2	4	1	2	5	14	
(2)	4	14	-1	6	11	34	
(3)	1	-1	5	-1	9	13	
(4)	-4	2	-6	1	-2	-9	
(5)		6	-3	2	1	6	(2)-2*(1)
(6)		-3	9/2	-2	13/2	6	(3)-1/2*(1)
(7)		10	-4	5	8	19	(4)+2*(1)
(8)			-3	-1	7	9	(6)+1/2*(5)
(9)			1	5/3	19/3	9	(7)-5/3*(5)
(10)				2	4	6	(9)- 1/3*(8)

$$
\begin{gathered}
y=1/3(7+z)=3, \\
x=1/6(1+3y-2z)=1, \\
w=1/2(5-4x-y-2z)=-3
\end{gathered}
$$

Esto completa la solución de las ecuaciones.

3.2 Algoritmo.

Algoritmo:

Datos N= No. de ecuaciones, **A**= Matriz coeficiente, y **b** vector de términos independientes.

```
1. Hacer DET=1
2. Hacer I=1
3. Mientras I≤N-1 repetir pasos 4 al 14
4.      Hacer DET=DET*A(I,I)
5.      Si DET = 0 imprimir mensaje "Hay un cero en la diagonal
   principal" y     terminar, de otro modo continuar.
6.      Hacer K = I +1
7.      Mientras K≤ N repetir los pasos 8 al 13
```

```
8.             Hacer J = I +1
9.             Mientras J≤ N repetir los pasos 10 y 11
10.                  Hacer A(K,J)=A(K,J) - A(K,I)*A(I,J)/A(I,I)
11.                  Hacer J=J+1
12.            Hacer b(K)= b(K) - A(K,I)*b(I)/A(I,I)
13.            Hacer K=K+1
14.      Hacer I=I+1
15.Hacer DET=DET *A(N,N)
16.Si DET = 0 imprimir mensaje "Hay un cero en la diagonal
   principal") y terminar, de otro modo continuar.
17.Hacer x(N) =b(N)/A(N,N)
18.Hacer I=N-1
19.Mientras I ≥ 1 repetir los pasos 20 a 26
20.      Hacer x(I)=b(I)
21.      Hacer J=1
22.      Mientras J ≤ N repetir los pasos 23 y 24
23.            Hacer x(I)=x(I) -A(I,J)*x(J)
24.            Hacer J = J+1
25.      Hacer x(I)=x(I)/A(I,I)
26.      Hacer I=I-1
27.Imprimir x y DET y terminar
```

3.3 Eliminación de Gauss con pivoteo

Desafortunadamente el utilizar el conjunto de ecuaciones pivotes que escogimos puede fallar si en esta

```
1. Hacer DET=1
2. Hacer R=0
3. Hacer I=1
4. Mientras I ≤ N-1 repetir pasos 5 al 12
5.       Encontrar PIVOTE(elemento de mayor valor absolute en la
         parte relevante de la columna I de A) y P la fila donde se
         encuentra PIVOTE
6.       Si PIVOTE = 0 imprimir mensaje "Matriz singular, sistema
         sin solución, en caso contrario continuar
7.       Si P = I ir al paso 10, de otro modo realizar los pasos 8 y
         9.
8.             Intercambiar la fila I con la fila P.
9.             Hacer R= R +1
10. Hacer DET=DET *A(I,I)
11.Realizar los pasos 6 al 13 del algoritmo anterior
12.Hacer I= I +1
13. Hacer DET=DET *A(N,N)*(-1)**R
14.Realizar los pasos 17 a 26 del algoritmo anterior
15.Imprimir x y DET y terminar
```

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación, la memoria de máquina requerida es proporcional al cuadrado del orden de A, y el trabajo computacional es proporcional al cubo del orden de la matriz coeficiente A. Debido a esto, la solución de sistemas lineales grandes (n>50), con matrices coeficientes densas (pocos ceros como elementos), se vuelve costoso y difícil en una computadora con los métodos de eliminación, ya que se requiere de mucho espacio de memoria; así como de el número de operaciones que se debe realizar es muy grande.

Métodos iterativos

Los métodos iterativos más sencillos y conocidos son una generalización del método de punto fijo. Esta técnica se puede aplicar para realizar métodos para determinar la solución de

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

A partir de la ecuación (3.2) se puede obtener la ecuación vectorial siguiente

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

La cual corresponde a $f(x) = 0$ en el método de punto fijo. Para resolver $f(x)$ en dicho método se propone obtener una $g(x) = x$, de manera que nosotros buscamos una matriz **B** y un vector **c** tal que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c} \tag{3.4}$$

sea un arreglo de la ecuación (3.3), Es decir que la solución de una sea también solución de la otra. La ecuación 3.4 correspondería a $x = g(x)$.

Así como en el método de punto fijo, aquí también se propone un valor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ como primera aproximación al vector solución **x**. Luego se calcula la sucesión vectorial $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Bx}^{(k)} + \mathbf{c},\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

donde

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \ldots & x_n^k \end{bmatrix}^T \tag{3.6}$$

Para que la sucesión $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$, converja al vector solución x es necesario que eventualmente $\mathbf{x}_j^{\mathrm{m}}$, $1 \le j \le n$, se aproximen tanto a $\mathbf{x}_j$, $1 \le j \le n$, que todas las diferencias $|\mathbf{x}_j^{\mathrm{m}} - \mathbf{x}_j^{\mathrm{m}}|$, $1 \le j \le n$ sean menores que un valor pequeño previamente fijado, y que se conserven menores para todos los vectores siguientes de la iteración; es decir :

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{x}_j^m = \mathbf{x}_j \qquad 1 \le j \le n \tag{3.7}$$

La forma como se llega a la ecuación 3.4 define el algoritmo y su convergencia. Dado el sistema Ax=b, la manera más sencilla es despejar x1 de la primera ecuación, x2 de la segunda, etc. Para ello, es necesario que todos los elementos de la diagonal principal de **A**, sean distintos de cero.

Ejemplo n

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

con a_{11}, a_{22} y a_{33} distintos de cero.

Se despeja x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera con lo que se obtiene:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = & & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & -\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & -\frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 = & -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_2 & & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_2 & -\frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3 = & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & & -\frac{b_3}{a_{33}}
\end{array}
\qquad (3.8)
$$

Que en notación matricial queda:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = & & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & -\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & -\frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 = & -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_2 & & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_2 & -\frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3 = & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & & -\frac{b_3}{a_{33}}
\end{array}
\qquad (3.8)
$$

3.4 Método de Jacobi

Método de Jacobi

$$
x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} a_{ij}x_j^k\right], \text{ para } 1 \leq i \leq n \qquad (3.8)
$$

3.5 Método de Gauss-Seidel

$$
x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=1+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right], \text{ para } 1 \leq i \leq n \qquad (3.8)
$$